数理解析研究所講究録 1239 巻 2001 年 90-98

Painlevé propertyを持つ3連立の微分方程式について

お茶の水大　松田千鶴子(Tizuko Matuda)
Ochanomizu Univ.

§1　以前に2連立の微分方程式が動く分岐点を持たないための必要条件(すなわちPainlevé propertyを持つための必要条件)について調べたことがある.[2]. これがきっかけで3連立の次の形の微分方程式がPainlevé propertyを持つための必要条件を求めることを考えた. この報告では, その計算の方法を簡単に説明し, まだ少ししか得られていないが, 結果を述べる. 考える方程式は

$$
(1.1)\quad \begin{cases} y' = \sum_{l=0}^{3} f_l(x, y, z, w) \\ z' = \sum_{l=0}^{3} g_l(x, y, z, w) \\ w' = \sum_{l=0}^{3} h_l(x, y, z, w) \end{cases}
$$

とする. $f_l, g_l, h_l\ (l=0,1,2,3)$ は y, z, w について l 次の斉次式

$$f_l(x, y, z, w) = \sum_{i+j+k=l} a_{ijk}(x)\, y^i z^j w^k$$

$$g_l(x, y, z, w) = \sum_{i+j+k=l} b_{ijk}(x)\, y^i z^j w^k$$

$$h_l(x, y, z, w) = \sum_{i+j+k=l} c_{ijk}(x)\, y^i z^j w^k$$

係数 a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk} は x について有理関数, f_3, g_3, h_3 の少くとも1つは恒等的に0ではないとする. 実は total order は4としたかったのである. その根拠は3階有理的微分方程式について, Painlevé property を持つための必要条件をみたすものを求めてみたところ, これから total order 4 の3連立の微分方程式が得られたからである. しかし計算が複雑になるので, 3次から始めることにした.

§2. 計算の方法 Painlevé property を持つための必要条件を求めるには, 次の(i)～(v)をくりかえし用いる.

(i) phase space の blow-up

(ii) parameter ε を入れる Painlevé の方法 [1]

(iii) Briot-Bouquet の微分方程式 $y'^m = P(y)$ (m は正整数, P は定数を係数とする y の多項式) の解が1価であるための必要十分条件 [1]

(iv) 線形微分方程式, Riccati の微分方程式を解く.

(v) 2連立の微分方程式が Painlevé property を持つための必要条件.

では実際にどのようにして計算するかというと, まず(1.1)に blow-up

(2.1) $\qquad y = 1/\eta, \quad z = \zeta/\eta, \quad w = \xi/\eta$

を行い，続けて blow-up

$$(2.2)\qquad \eta = \zeta \eta_1$$

を行うと

$$(2.3)\begin{cases} \zeta^3\eta_1\eta_1' = -g_3(x,1,\zeta,\xi) - \zeta\eta_1 g_2(x,1,\zeta,\xi) - \zeta^2\eta_1^2(\cdots) \\ \zeta^2\eta_1^2\zeta' = g_3(x,1,\zeta,\xi) - \zeta f_3(x,1,\zeta,\xi) \\ \qquad\qquad + \zeta\eta_1\{g_2(x,1,\zeta,\xi) - \zeta f_2(x,1,\zeta,\xi)\} + \zeta^2\eta_1^2(\cdots) \\ \zeta^2\eta_1^2\xi' = h_3(x,1,\zeta,\xi) - \xi f_3(x,1,\zeta,\xi) \\ \qquad\qquad + \zeta\eta_1\{h_2(x,1,\zeta,\xi) - \xi f_2(x,1,\zeta,\xi)\} + \zeta^2\eta_1^2(\cdots) \end{cases}$$

となる．(2.3) に変換 $\zeta = \varepsilon\zeta_1$，$x = x_0 + \varepsilon^3 u$ (x_0 は fixed generic point) をして，$\varepsilon = 0$ とすると

$$(2.4)\begin{cases} \zeta_1^3\eta_1\dfrac{d\eta_1}{du} = -g_3(x_0,1,0,\xi) \\ \zeta_1^2\eta_1^2\dfrac{d\zeta_1}{du} = g_3(x_0,1,0,\xi) \\ \zeta_1^3\eta_1^2\dfrac{d\xi}{du} = 0 \end{cases}$$

となる．Painlevé によると (2.3) が Painlevé property を持つならば，(2.4) の解は 1 価である．$g_3(x_0,1,0,\xi) \neq 0$ の時，解は 1 価であるが，更に続けて計算すると，今までのところ本質的に 2 連立となる場合しか得られないので

$$(2.5)\qquad g_3(x_0,1,0,\xi) \equiv 0$$

の場合を考える．次に微分方程式 (2.3) において，条件 (2.5) がみたされている時，(2.3) に変換 $\zeta = \varepsilon\zeta_1$，$x = x_0 + \varepsilon^2 u$ をして，$\varepsilon = 0$ とした式の右辺も恒等的に 0 であるとすると

$$(2.6)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\zeta} g_3(x_0, 1, \zeta, \xi)\right]_{\zeta=0} \equiv 0, \quad g_2(x_0, 1, 0, \xi) \equiv 0, \\ f_3(x_0, 1, 0, \xi) \equiv 0, \quad h_3(x, 1, 0, \xi) \equiv 0 \end{cases}$$

を得る．さらに(1.1)に対して，blow-up (2.2) に続けて

$$(2.7)\qquad \eta = \xi \eta_1$$

を行い，同様の計算をすることによって

$$(2.8)\quad \begin{cases} h_3(x_0, 1, \zeta, 0) \equiv 0, \quad \left[\dfrac{1}{\xi} h_3(x_0, 1, \zeta, \xi)\right]_{\xi=0} \equiv 0, \\ h_2(x_0, 1, \zeta, 0) \equiv 0, \quad f_3(x_0, 1, \zeta, 0) \equiv 0, \\ g_3(x_0, 1, \zeta, 0) \equiv 0 \end{cases}$$

を得る．

§3. 計算の例　§2までによって吾々は次の形の方程式について計算を進めることにする．

$$(3.1)\quad \begin{cases} y' = a_{111}yzw + a_{021}z^2w + a_{012}zw^2 + a_{200}y^2 + a_{110}yz + a_{101}yw \\ \qquad + a_{020}z^2 + a_{011}zw + a_{002}w^2 + a_{100}y + a_{010}z + a_{001}w + a_{000} \\ z' = b_{021}z^2w + b_{110}yz + b_{020}z^2 + b_{011}zw + b_{100}y + b_{010}z + b_{001}w + b_{000} \\ w' = c_{012}zw^2 + c_{101}yw + c_{011}zw + c_{002}w^2 + c_{100}y + c_{010}z + c_{001}w + c_{000} \end{cases}$$

例えば(3.1)に blow-up (2.1) を行い，さらに変換 $\eta = \varepsilon \eta_1$，$x = x_0 + \varepsilon^2 u$ をして $\varepsilon = 0$ とすると

$$(3.2)\quad \begin{cases} \eta_1 \dfrac{d\eta_1}{du} = -a_{111}\zeta\xi - a_{021}\zeta^2\xi - a_{012}\zeta\xi^2 \\ \eta_1^2 \dfrac{d\zeta}{du} = -(a_{111} - b_{021})\zeta^2\xi - a_{021}\zeta^3\xi - a_{012}\zeta^2\xi^2 \\ \eta_1^2 \dfrac{d\xi}{du} = -(a_{111} - c_{012})\zeta\xi^2 - a_{021}\zeta^2\xi^2 - a_{012}\zeta\xi^3 \end{cases}$$

となる．$a_{012} = 0$ または $a_{021} = 0$ ならば，(3.2)の解が1価であ

る条件を，次の様にして求めることができる．

こゝでは $a_{012}=0$，$a_{021}\neq 0$，$a_{111}-b_{021}\neq 0$ の場合の計算を示す．(3.2)の第1，2式より

(3.3) $$\frac{d\eta_1}{\eta_1 d\zeta}=\frac{-a_{021}\zeta-a_{111}}{-a_{021}\zeta^2-(a_{111}-b_{021})\zeta}=\frac{X}{\zeta}+\frac{Y}{\zeta-\gamma}$$

と書くことができる．こゝに $X=-a_{111}/(-a_{111}+b_{021})$，$X+Y=1$，(3.3)の解は

(3.4) $$c_1\eta_1=\zeta^X(\zeta-\gamma)^Y \qquad (c_1 \text{は任意定数})$$

である．次に(3.2)の第2，3式より

(3.5) $$\frac{d\xi}{\xi d\zeta}=\frac{-a_{021}\zeta-(a_{111}-c_{012})}{-a_{021}\zeta(\zeta-\gamma)}=\frac{P}{\zeta}+\frac{Q}{\zeta-\gamma}$$

こゝに $P=(-a_{111}+c_{012})/(-a_{111}+b_{021})$, $P+Q=1$，(3.5)の解は

(3.6) $$c_2\xi=\zeta^P(\zeta-\gamma)^Q \qquad (c_2 \text{は任意定数})$$

である．(3.2)の第2式の η_1, ξ に(3.4)，(3.6)を代入すると

(3.7) $$\frac{d\zeta}{du}=-a_{021}c_1^2c_2^{-1}\zeta^{2-2X+P}(\zeta-\gamma)^{1-2Y+Q}$$

を得る．(3.7)はBriot-Bouquetの微分方程式で

$$2-2X+P+1-2Y+Q=2$$

であることから(3.7)の解 ζ が1価であるための必要十分条件は，次の2つの場合である．

A_1　$2-2X+P=1-\frac{1}{k}$，　$1-2Y+Q=1+\frac{1}{k}$　($k\neq 0$, 整数)

A_2　$2-2X+P=1$，　$1-2Y+Q=1$

各々の場合について考えると

$\mathfrak{A}_1$ $2X-P=1+\frac{1}{k},\quad 2Y-Q=-\frac{1}{k}$

$$2X-P=(-a_{111}-c_{012})/(-a_{111}+b_{021})$$

この時ζは1価であるから，η_1，ξが1価であるためには，(3.4)，(3.6) によってX, Y, P, Qが整数：$X=n$（nは整数）$k=\pm1$であればよい．この時$a_{111}, b_{021}, c_{012}$についての関係式

$$(n-1)a_{111}-nb_{021}=0,$$

$$\{(n-1)k-1\}b_{021}+(n-1)kc_{012}=0\quad(k=\pm1)$$

を得る．

$\mathfrak{A}_2$ $2X-P=1,\quad 2Y-Q=0$

$\mathfrak{A}_1$と同様にして，$X=n$（nは整数），$a_{111}, b_{021}, c_{012}$についての関係式 $(n-1)a_{111}-nb_{021}=0,\quad b_{021}+c_{012}=0$

を得る．

2連立の微分方程式についての結果が必要となるのは，例えば，次の様な場合である．(3.1)に blow-up $z=y\zeta$, $w=y\xi$ を行って得た方程式において，$a_{000}=0$，$c_{000}=0$ の時，変換 $y=\varepsilon\eta$ をして $\varepsilon=0$とすると

$$(3.8)\begin{cases}\eta'=\eta(a_{010}\zeta+a_{001}\xi+a_{100})\\ \zeta'=-a_{010}\zeta^2-a_{001}\zeta\xi-(a_{100}-b_{010})\zeta+b_{001}\xi\\ \xi'=-a_{010}\zeta\xi-a_{001}\xi^2+c_{010}\zeta-(a_{100}-c_{001})\xi+c_{100}\end{cases}$$

を得る．Painlevéによると，(3.1)がPainlevé propertyを持

つならば，(3.8)もPainlevé propertyを持つ．(3.8)の第2，3式は2連立の微分方程式であるから，まずこれについて調べることになる．

$a_{012}=0$の時，(3.1)に対して，考え得るblow-upを行い，くりかえしこのような計算をして必要条件を求めた．たゞし解が1個である条件を求めるのに，十分条件の場合がある．尚こゝでは$a_{200}=0$を仮定している．

§4. 実は決定的な形とは言えないが，次の様にまとめた．

$$(4.1)\quad \begin{cases} y' = a_{021}z^2w + a_{011}zw + a_{100}y + a_{001}w + a_{000} \\ z' = z^2w + b_{011}zw + b_{010}z + b_{001}w \\ w' = yw + c_{011}zw + \frac{1}{n}w^2 + c_{001}w \end{cases}$$

こゝに $a_{021}+c_{011}=0,\ 4b_{001}=b_{011}^2-\frac{1}{n^2},\ a_{011}=a_{021}b_{011},\ a_{001}=a_{021}b_{\cdot}$

$$(4.2)\quad \begin{cases} y' = a_{021}z^2w + a_{100}y + a_{001}w + a_{000} \\ z' = z^2w + b_{010}z + \frac{1}{4}w \\ w' = yw + c_{011}zw \pm w^2 + c_{001}w \end{cases}$$

こゝに $a_{021}+c_{011}=0,\ a_{001}=a_{021}b_{001}$

$$(4.3)\quad \begin{cases} y' = a_{021}z^2w + a_{110}yz + a_{100}y + a_{010}z + a_{000} \\ z' = z^2w + yz + b_{010}z \\ w' = -zw^2 - yw \pm zw \pm y + c_{001}w + c_{000} \end{cases}$$

こゝに $a_{021}=a_{110},\ a_{110}c_{000}=\pm a_{010}$

$$(4.4)\begin{cases} y' = a_{021}z^2w + a_{110}yz + yw + a_{011}zw + a_{100}y \\ \qquad + a_{010}z + a_{001}w + a_{000} \\ z' = zw + b_{010}z \\ w' = zw + y + c_{001}w + c_{000} \end{cases}$$

こゝに $a_{021} = a_{110}$, $a_{110}c_{000} = a_{010}$

$$(4.5)\begin{cases} y' = a_{011}zw + a_{100}y + a_{010}z + a_{001}w + a_{000} \\ z' = z^2w + b_{110}yz + b_{010}z \\ w' = -zw^2 + c_{101}yw + c_{001}w \end{cases}$$

こゝに $b_{110} + c_{101} = 0$

$$(4.6)\begin{cases} y' = yzw + a_{011}zw + a_{100}y + z + a_{001}w + a_{000} \\ z' = -z^2w + yz + b_{010}z \\ w' = zw^2 + c_{001}w \end{cases}$$

$$(4.7)\begin{cases} y' = yzw + a_{100}y \\ z' = -z^2w + yz + zw + b_{010}z \\ w' = zw^2 + c_{001}w \end{cases}$$

どの場合にも係数は a_{100}, b_{010}, c_{001} 以外は恒等的に 0 ではない a_{100}, b_{010}, c_{001} については例えば $a_{100} = a/x$, $b_{010} = b/x$, $c_{001} = c/x$ とおくと、さらに条件が得られる.

これらは 3 階の有理的微分方程式に導くことができる.

尚 (4.5) は $zw = \lambda$ とおくと、第 2, 3 式より $\lambda = C\exp\int(b_{010} + c_{001})dx$ となり、第 1, 2 式は

$$
\begin{cases}
y' = a_{011}\lambda + a_{100}y + a_{010}z + a_{001}\lambda/z + a_{000} \\
z' = \lambda z + b_{110}yz + b_{010}z
\end{cases}
$$

となり，２連立であるが，第１式の右辺が y, z の多項式でないから，３連立のまゝにしておいた．

参考文献

[1] 福原満洲雄．常微分方程式論 岩波講座 数学 (1933)

[2] T. Kimura - T. Matuda, On systemes of differential equations of order two with fixed branch points Proc. Japan Acad. 56 A (1980) 445-449