数理解析研究所講究録 1241 巻 2001 年 187-195



# 複数の窓口を持つ需要処理配分問題

大阪府立大学総合科学部　北條仁志 (Hitoshi HOHJO)
関西大学情報処理センター　北尾匡史 (Masachika KITAO)
関西大学総合情報学部　仲川勇二 (Yuji NAKAGAWA)
大阪府立大学総合科学部　寺岡義伸 (Yoshinobu TERAOKA)

## 1 モデルと定式化

ある地域内に$m$個の需要点と呼ばれる点と$n$個の施設が散在している．そして需要点と施設は固定されているものとする．需要点$i$では，rate $r_i$をもつポアソン過程に従って要求が発生する．この要求は全需要点に対して共通の種目の要求となっており，発生の仕方は各需要点に関して独立であるものとする$(i = 1, \ldots, m)$．各需要点で需要が発生するとこの要求を処理するため，施設$j$へ送る$(j = 1, \ldots, n)$．需要点$i$から施設$j$へ要求を送るに際しては，$d_{ij}$の時間がかかるものとし，また施設$j$では各要求に対してrate $\lambda_j$の指数分布に従って処理されるものとする．

ここで我々の問題は，rate $r_i$で発生する需要点$i$での要求を$n$個の施設の中のどれに送って処理すると最も短い時間で処理できるかということである．すなわち，需要点$i$で発生した要求どの割合で施設$j$へ送るかを考える．そこで，

$$x_{ij} = \text{需要点}\,i\,\text{で rate}\ r_i\,\text{のポアソン過程で発生した要求のうち施設}\,j\,\text{へ配分される rate}$$

とすると，

$$x_{i1} + \cdots + x_{in} = r_i, \quad x_{i1} \geq 0, \ldots, x_{in} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

を満足する$x_{ij}$を決定する問題ということになる．そうすると施設$j$への要求の到着は到着率

$$x_j = x_{1j} + \cdots + x_{mj}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

をもつポアソン到着ということになり，各$j$での処理時間もrate $\lambda_j$をもつ指数分布に従うので，要求が発生してから処理を開始するまでの平均所要時間は待ち行列におけるM/M/1 待ちシステムの期待待ち時間と需要点から施設への移動時間として評価することができる．目的は，このシステム全体で発生した要求の処理完了までの期待時間を最小にするような配分$x_{ij} \geq 0$, ただし$i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$を決定することとなる．

## 2 一般的定式化

あるシステム内で複数の要求が発生し，これらの要求を複数の施設で処理しようとする場合，システム全体としての要求処理完了までの時間を最小にするとは，要求発生場所から施設までの移動時間を含め処理待ち時間と処理に関する時間の和が最も長くかかりそうな部署を最小時間で済ませるような要求配分を考えることに他ならない．そう考えると我々のモデルは下記のように定式化できる．

$$\begin{aligned} W_j &= \text{施設}\,j\,\text{での待ち時間を示す確率変数} \\ S_j &= \text{施設}\,j\,\text{での処理時間を示す確率変数} \\ d_{ij} &= \text{需要点}\,i\,\text{から施設}\,j\,\text{への移動時間} \end{aligned}$$

とすると，

$$\min_X \max_{i,j} \{E(W_j + S_j) + u(x_{ij}) d_{ij}\}, \tag{3}$$

ここに，$E(Z)$ は確率変数 $Z$ の期待値を意味し，$u(\cdot)$ は

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

である．また，$X$ は制約条件を満足する $mn$ 組の配分 $x_{ij} \geq 0$ 全体の集合である $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$.

上記の定式化は，要求の発生や処理がポアソン過程に従うことを限定せず，独立性さえ仮定すればどのような確立法則に対しても通用できる定式化である．要求の発生や処理がポアソン過程に従うことに限定した場合の形式で表現してみよう．$W_j$ を M/M/1 待ち時間とすると，

$$E(W_j) = \frac{x_j}{\lambda_j(\lambda_j - x_j)} \tag{4}$$

であることが知られており，これに伴うトラフィック条件として

$$x_j < \lambda_j$$

が課せられることも知られている．従って制約条件として

$$x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j < \lambda_j \tag{5}$$

が要請される．また，後の議論のため，

$$R = r_1 + \cdots + r_m; \quad M = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

とおくと，(1),(2),(5) より

$$R < M \tag{6}$$

を前提とするのは言うまでもない．次に施設 $j$ での処理時間も rate $\lambda_j$ の指数分布を仮定してあるので

$$E(S_j) = \frac{1}{\lambda_j} \tag{7}$$

となる．(1),(2),(3),(4),(5),(7) をまとめると我々の問題は，次のような数理計画問題として表現することができる．

$$\begin{array}{l} \displaystyle\min_{x_{ij}} \max_{i,j} \left[ \frac{1}{\lambda_j - x_j} + u(x_{ij}) d_{ij} \right] \\ \text{subject to} \\ \qquad x_{i1} + \cdots + x_{in} = r_i, \\ \qquad x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j < \lambda_j, \\ \qquad x_{ij} \geq 0, \\ \qquad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n \end{array} \tag{A}$$

ここに，

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

これは，非線形の数理計画問題であり，一般的取り扱いは非常に難しい．

以後，需要点から施設への移動時間がそれらの位置に関係せず一定と考えられる場合，および移動時間は需要点と施設の位置に依存するが施設の数が 2 の場合の特別な場合について考察する．ここで，需要点全体の集合を $D$ で，施設全体の集合を $F$ で表すこととする．すなわち，

$$D = \{1, \ldots, m\}; \quad F = \{1, \ldots, n\}.$$

## 3 移動時間が一定の場合

本節では，需要点から施設への移動時間がそれらの位置に関係せず一定の場合，すなわち

$$d_{ij} = d \qquad \text{for all } (i,j) \in D \times F \tag{8}$$

となっている場合を考察する．このとき問題(A)の目的関数は，

$$\begin{aligned} &\min_{x_{ij}} \max_{i,j} \left[ \frac{1}{\lambda_j - x_j} + u(x_{ij})d \right] \\ &= \min_{x_j} \max_{j} \left( \frac{1}{\lambda_j - x_j} \right) + d \end{aligned} \tag{9}$$

となる．これは，とりあえず$x_j$を求める問題である．そこで，

$$\lambda_1 - x_1 = \cdots = \lambda_n - x_n = \text{const} \tag{10}$$

を満足する$x_1, \ldots, x_n$をそれぞれ$x_1^*, \ldots, x_n^*$とおくと，すなわち

$$x_1 + \cdots + x_n = R \tag{11}$$

であるから

$$x_j^* = \lambda_j - \frac{M-R}{n}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{12}$$

とおくと，

$$\min_{x_j} \max \left( \frac{1}{\lambda_j - x_j} \right) = \frac{1}{\lambda_j - x_j^*} \tag{13}$$

を得る．なぜならば式(10)を満足しない$x_j$に対しては少なくとも１つ

$$\frac{1}{\lambda_k - x_k} > \frac{1}{\lambda_j - x_j^*} = \frac{n}{M-R} \tag{14}$$

となる$x_k$が存在する．もしそうでなければ，すべての$j$に対して，

$$\lambda_j - x_j \leq \frac{M-R}{n} \tag{15}$$

であり，さらにある$k$に対して

$$\lambda_k - x_k \leq \frac{M-R}{n} \tag{16}$$

でなければならない．そうすると

$$\sum_{j=1}^{n} x_j < R \tag{17}$$

となってしまうからである．(9),(10),(11)を比較すると(10)で与えられる$x_j^*$が目的関数を満足する施設$j$への配分の和であることがわかる．

さて，(10)によって$x_1^*, \ldots, x_n^*$が求まると，需要点$C$から施設$j$への配分$x_{ij}$は(1)と(2)の両方を満足しなければならないから，需要点から施設への輸送費が一定である輸送問題

| $D \diagdown F$ | 1 | 2 | $\cdots$ | $j$ | $\cdots$ | $n$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $\cdots$ | $x_{1j}$ | $\cdots$ | $x_{1n}$ | $r_1$ |
| 2 | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $\cdots$ | $x_{2j}$ | $\cdots$ | $x_{2n}$ | $r_2$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $i$ | $x_{i1}$ | $x_{i2}$ | $\cdots$ | $x_{ij}$ | $\cdots$ | $x_{in}$ | $r_i$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $m$ | $x_{m1}$ | $x_{m2}$ | $\cdots$ | $x_{mj}$ | $\cdots$ | $x_{mn}$ | $r_m$ |
| 計 | $x_1^*$ | $x_2^*$ | $\cdots$ | $x_j^*$ | $\cdots$ | $x_n^*$ | $R$ |

の解より得られることとなる．この解は無数に存在するが，北西隅法による解が簡便な解法といえよう．

## 4　平均処理時間が一定の場合

ここでは，各施設での平均処理時間が施設によって異ならないで一定となっている場合，すなわち

$$\lambda_j = \lambda \quad \text{for all} \;\; j \tag{18}$$

となっている場合を考察する．この場合，問題(A)の目的関数は

$$\begin{aligned} &\min_{x_{ij}} \max_{i,j} \left[ \frac{1}{\lambda - x_j} + u(x_{ij}) d_{ij} \right] \\ &= \min_{x_{ij}} \max_{j} \left[ \frac{1}{\lambda - x_j} + \max_{i} u(x_{ij}) d_{ij} \right] \end{aligned} \tag{19}$$

となる．したがって，もし適当な$x_j$が定まったとすると，我々の問題は

$$\begin{aligned} &\min_{x_{ij}} \{ \max_{i} u(x_{ij}) d_{ij} \} \\ &\text{subject to} \\ &\qquad x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j, \\ &\qquad x_{ij} \geq 0, \\ &\qquad i = 1, \ldots, m; \;\; j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

を満足するような"需要点$i$から施設$j$への最大移動時間を最小にするような経路を見つけ出す問題"に転化されることになる．この最短時間経路はすべての$j = 1, \ldots, n$に対して見つけられなければならないから，このような経路は輸送問題

$$\begin{aligned} &\min_{x_{ij}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} d_{ij} x_{ij} \\ &\text{subject to} \\ &\qquad x_{i1} + \cdots + x_{in} = r_i, \\ &\qquad x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j < \lambda, \\ &\qquad x_{ij} \geq 0, \\ &\qquad i = 1, \ldots, m; \;\; j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{S}$$

を解くことによって得られる．さらに問題(S)の解は，施設$j$へ配分される要求の総量が定まったと仮定した場合の，需要点$i$から施設$j$への最適配分量$x_{ij}$をも，与えてくれることになる．(各$x_j$に対しての最適配分量$x_{ij}$は一通りとは限らないが，移動時間$d_{ij}$に$x_{ij}$の負荷がかかると考えると一通りに定まる.)

そうすると，我々にとって残された問題は，$\lambda_j = \lambda$に対応する問題(A)を満足する適当な$x_j$を定めることとなる．いま，$x_j$が定まったとすると輸送問題(S)により配分$x_{ij}$が定まるのであるから，

$$D_j = \{\, i \mid x_{ij} > 0\}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{20}$$

すなわち，$D = \{1, \ldots, m\}$の中で施設$j \in F = \{1, \ldots, n\}$への配分を行なう需要点全体の集合を定義する．このとき，$i \neq j$に対して$D_i \cap D_j = \phi$になるとは限らない．そうすると

$$x_j = \sum_{i \in D_j} x_{ij} < \lambda_j, \quad j = 1, \ldots, n \tag{21}$$

となる．さらに実行可能な$D_1$と$D_2$に対して

$$\begin{aligned} d_j &= \max_{i \in D_j} d_{ij} \\ &= \max_i u(x_{ij}) d_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{22}$$

すなわち，施設$j$へ要求を配分する需要点の中で最長となる点までの距離$d_j$を定義する．そうすると問題(A)は

$$\begin{aligned} &\min_{x_j} \max_j \left[ \frac{1}{\lambda - x_j} + d_j \right] \\ &\text{subject to} \\ &\qquad x_1 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} r_i = R, \\ &\qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \end{aligned} \tag{T}$$

と変形できる．ただし

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in D_j} x_{ij} = x_j < \lambda_j, \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = r_i, \\ &x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m\,;\ j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

である．

問題(T)を観察すると，目的関数は$d_j$が定まると$x_j$につき凸関数かつ増加関数となっており，また$d_j$は$x_j$が定まると輸送問題(S)により可能な限り小さく決定されることがわかる．また，問題(T)の解は，$d_j$が$x_j$により変化しないとすると

$$\frac{1}{\lambda - x_j} + d_j = \text{一定} \quad \text{for all} \quad j \tag{23}$$

を満足する$x_j$により与えられることもわかる．しかしながら，$x_j$を増加すると$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_j$であるから$x_{ij} > 0$となる$i$の数も増加し，従って$x_{ij}$に対応する$d_{ij}$も大きな値の選択へ向かわざるをえなくなり，結果として$d_j$が大きな値に変化することになる。$x_j$を減少すると同様にして$d_j$がより小さな値の$d_{ij}$の選択へ移行して減少する可能性も出てくる。

したがって，適当な$x_j$の設定に対して，$d_j$に変化が生ぜず

$$\frac{1}{\lambda - x_j} + d_j = \text{一定} \quad \text{for all} \quad j \tag{24}$$

であれば，この$x_j$が最適解を与えることとなり，$x_j$の設定により$d_j$が変化し，その$d_j$に応じて$x_j$が変化する関係が発生した時は，

$$D_j \cap D_k \neq \phi \tag{25}$$

の状態で$x_j$と$d_j$が相互に影響し合う関係が発生したこととなるので，

$$D_j \cap D_k = \phi \tag{26}$$

となるように$x_{ij}$を調整し，$d_j$もできるだけ小さく選ぶようにすることから最適解が得られることになる．

以上の考察をもとに次の手順を得る．

**最適解への手順**

1. 初期値を以下のように決定する．

 1.1. $x_j^0$を

$$x_j^0 = \lambda - \frac{M-R}{n}, \quad j = 1, \ldots, n$$

 により定める．

 1.2. 1.1で求めた$x_j^0$をもとに，輸送問題(S)を解き，その解を$x_{ij}^0$とおく．($i = 1, \ldots, m$ ; $j = 1, \ldots, n$).

 1.3. 1.2で求めた$x_{ij}^0$をもとに

$$D_j^0 = \{\, i \mid x_{ij}^0 > 0\}, \quad j = 1, \ldots, n$$

 および

$$d_j^0 = \max_{i \in D_j^0} d_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n$$

 を定める．

 1.4. 1.3で定めた$d_j^0$が$j \in F$に関係せず一定，すなわち

$$d_j^0 = d^0 \quad \text{for all} \quad j \in F$$

 であるならば，1.1と1.2で定めた$x_j^0$および$x_{ij}^0$は最適解となる．ただし，$i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$.

 また，この時，最適値$v^0$は

$$v^0 = \frac{n}{M-R} + d^0$$

 である．ここで停止．

 もしそうでなければ2へ進む．

2. 1で最適解が求まらなかった時は，以下のように改訂し，最適解を導く．

 2.1. 1で求められた$x_j^0, x_{ij}^0, d_j^0, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$に対して

$$\frac{1}{\lambda - x_j} + d_j^0 = w^0 \ (\text{一定}) \quad \text{for all} \quad j \in F$$

$$\text{ただし} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = R$$

を満足する$x_j$を$x_j^1$とおく．すなわち

$$x_j^1 = \lambda - \frac{1}{w^0 - d_j^0}, \quad j = 1, \ldots, n$$

とおく．ここに$w^0$は方程式

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w^0 - d_j^0} = M - R$$

の正の唯一根である．

2.2. 2.1で定まった$x_j^1$に対して輸送問題(S)を解き，その解を$x_{ij}^1$とおく．$(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$.

2.3. 2.2で定まった$x_{ij}^1$をもとに

$$D_j^1 = \{\, i \mid x_{ij}^1 > 0\}, \quad j = 1, \ldots, n$$

および

$$d_j^1 = \max_{i \in D_j^1} d_{ij}$$

を定める．

2.4. 2.1で定まった$x_j^1$と2.3で定まった$d_j^1$に対して

$$w_j^1 = \frac{1}{\lambda - x_j^1} + d_j^1, \quad j = 1, \ldots, n$$

とおく．さらに

$$w_l^1 = \min_{j \in F} w_j^1 \ ; \quad w_u^1 = \max_{j \in F} w_j^1$$

とおく．

2.5. 2.4で求められた$w_l^1$と$w_u^1$に対して，

$w_l^1 = w_u^1$ならば，

2.1で定められた$x_j$と2.2で定められた$x_{ij}^1$は最適解を与える．ただし，$i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$. この時，最適値$v^1$は

$$v^1 = \frac{1}{\lambda - x_j^1} + d_j^1 = w_u^1 \quad \text{for all} \quad j \in F$$

$w_l^1 < w_u^1$ならば，

$D_j \cap D_k = \phi, j \neq k$となるように，すなわち$x_{ij} = 0$または$x_{ik} = 0$となるように$x_{ij}^1$を調整する．この調整された$x_{ij}$を$x_{ij}^*$とおく．$(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$. この$x_{ij}^*$に従って

$$\begin{aligned} D_j^* &= \{\, i \mid x_{ij}^* > 0\}; \\ d_j^* &= \max_{j \in D_j^*} d_{ij} \\ w_m^* &= \max_{j \in F} \left[ \frac{1}{\lambda - x_j^1} + d_j^* \right] \end{aligned}$$

を定める．

そうすると$x_j^1 (j = 1, \ldots, n)$と$x_{ij}^* (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$は最適解を与える．この時，最適値$v^*$は

$$v^* = w_m^*$$

である．

## 5　簡単な例

まず最初に，需要点は4点$(m=4)$，施設は2施設$(n=2)$あり，

$$r_i = 1,\ i = 1,\ldots,4,\quad R = 4$$
$$\lambda = 2.5,\ M = 5$$

そして移動時間は

| $j\backslash i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 1 |

で与えられている場合を扱う．

初期設定として，$x_1^0 = x_2^0 = 2$となるから，輸送問題(S)を解くことにより

$$x_{11}^0 = 1,\ x_{21}^0 = 1,\ x_{31}^0 = 0,\ x_{41}^0 = 0,$$
$$x_{12}^0 = 0,\ x_{22}^0 = 0,\ x_{32}^0 = 1,\ x_{42}^0 = 1$$

そして

$$D_1^0 = \{1,2\}\ ;\ D_2^0 = \{3,4\},$$
$$d_1 = 2\ ;\ d_2 = 2$$

を得る．そうすると$d_1 = d_2 = 2$であるから，最適解は

$$x_{11}^0 = x_{12}^0 = 1,\ x_{13}^0 = x_{14}^0 = 0,$$
$$x_{21}^0 = x_{22}^0 = 0,\ x_{23}^0 = x_{24}^0 = 1$$

であり，この時，最適値は

$$v^0 = \frac{1}{2.5-2} + 2 = 4$$

となる．

次に，移動時間はそのままにしておいて

$$r_1 = r_2 = 1,\ r_3 = r_4 = 1.5,\ R = 5$$
$$\lambda = 4,\ M = 8$$

と変化させた場合を扱う．

やはり初期設定として，$x_1^0 = x_2^0 = 2.5$となるから，輸送問題(S)を解くと

$$x_{11}^0 = x_{21}^0 = 1.0,\ x_{31}^0 = 0.5,\ x_{41}^0 = 0,$$
$$x_{12}^0 = 0,\ x_{22}^0 = 0,\ x_{32}^0 = 1.0,\ x_{42}^0 = 1.5$$

そして

$$D_1^0 = \{1,2,3\}\ ;\ D_2^0 = \{3,4\}$$
$$d_1^0 = 3\ ;\ d_2^0 = 2$$

を得る．そうすると$d_1^0 \neq d_2^0$だから

$$w^0 = \frac{1}{4-x_1} + 3 = \frac{1}{4-(5-x_1)} + 2$$

となるように$x_1$を選んで，$x_1^1 \approx 1.70$, $x_2^1 \approx 3.30$, $w^0 \approx 4.43$. したがって

$$x_{11}^1 = 1.00,\ x_{21}^1 \approx 0.70,\ x_{31}^1 = 0,\ x_{41}^1 = 0,$$
$$x_{12}^1 = 0,\ x_{22}^1 \approx 0.30,\ x_{32}^1 = 1.5,\ x_{42}^1 = 1.5$$

また

$$D_1^1 = \{1,2\},\ D_2^1 = \{2,3,4\}$$
$$d_1 = 2,\ d_2 = 2$$

となる．そうすると

$$w_1^1 = \frac{1}{4-x_1^1} + 2 < \frac{1}{4-x_2^1} + 2 = w_2^1$$

であるから，$D_1^* \cap D_2^* = \phi$となるように調整する．そうすると

$$x_{11}^* = 1,\ x_{21}^* = 1,\ x_{31}^* = 0,\ x_{41}^* = 0,$$
$$x_{12}^* = 0,\ x_{22}^* = 0,\ x_{32}^* = 1.5,\ x_{42}^* = 1.5$$

が最適解となり，最適値は

$$v^* = \max\left(\frac{1}{4-2} + 2,\ \frac{1}{4-3} + 2\right) = 3$$

となる．

## 参考文献

[1] Berman, O. and Larson, R. (1985) Optimal 2-Facility Network Districting in the Presence of Queuing, Transpotation Science, v19, p,261-277.

[2] Cooper, R. B. (1990) Queuing theory. In Handbooks in Operations Research and Management Science, 2, D. P Heyman and MJ. Sobel (eds). North-Holland, New York.