数理解析研究所講究録 1241 巻 2001 年 30-38

貢献度に基づく協力ゲームの解とその応用*

大阪大学大学院工学研究科
鶴見 昌代 (Masayo Tsurumi) 谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)
乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)
Graduate School of Engineering, Osaka Univ.

1. はじめに

協力ゲームにおける解概念に，Shapley 値や Banzhaf 値がある．これらは，それぞれ各順列または各提携が等確率で成立するという仮定に基づいた，各プレイヤーの限界貢献度の期待値であると考えられる．また，投票が行われる状況を協力ゲームとして定式化したものが投票ゲームであり，プレイヤーの発言力を分析する投票力指数として，Shapley 値や Banzhaf 値を投票ゲームに適用した Shapley-Shubik 指数や Banzhaf 指数が考えられている．しかし，実際には順列や提携が等確率で成立するとは限らないので，このような非対称性を扱うための協力ゲームの解として，確率値やランダム順序値 [5]，重みつき Shapley 値や重みつき Banzhaf 値が提案された．

また，投票ゲームにおいては，各プレイヤーや議案のイデオロギーを選好空間に配置することにより，選好空間に基づいた非対称な指数が考えられており [4]，それに基づいて実際の日本の参議院における政党の投票力の分析を行った研究がある [3]．近年松井・上原は，選考空間を導入せずに分析できる Shapley 指数を用いた非対称な投票力指数を提案し，公理化と日本の参議院における政党の投票力の分析を行った [2]．また，遠藤ら [1] は，Banzhaf 指数を用いた非対称な投票力指数を提案し，1998 年と 1999 年のデータを導出し，参議院の投票力を測定した．

本研究では，非対称な協力ゲームの値について扱う．順列や提携を含むような基準の概念を考え，各基準におけるプレイヤーの限界貢献度の概念を導入する．各基準が生じる確率，あるいは重みに，その基準におけるプレイヤーの限界貢献度を乗じたものの和を限界貢献度の加重和として提案する．この値は，順列や提携などの限界貢献度の基準が確率分布にしたがって生じる場合には各プレイヤーの限界貢献度の期待値となる．さらに，これを全体合理性を満たすように基準化したものを新しい解として提案する．この解概念を公理化し，性質を明らかにする．この解の一つを用いて，実際の日本の参議院における政党の影響力を評価する．

2. 既往の研究

$N=\{1,2,\dots,n\}$ をプレイヤーの集合とする．このとき，$v(\emptyset)=0$ を満たす $v: P(N)\to\mathbb{R}$ は，協力ゲーム，あるいは単にゲームとよばれる．すべてのゲームの集合を G とかく．

定義 1 次式が成り立つとき，ゲーム v はゼロ単調であると言われる．

$$v(S)\geq v(T)+\sum_{S\setminus T} v(\{i\}),\quad \forall S,T,T\subseteq S\subseteq N.$$

また，任意の提携 $R\subseteq N$ に対して，つぎのようなゲームを定義する．

$$w_R(S)=\begin{cases}1, & \text{if } S\supseteq R,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

*この研究の一部は，日本学術振興会特別研究員奨励費による援助を受けています．

定義 2 つぎをみたす $x \in \mathbb{R}^n$ は，それぞれ個人合理的，全体合理的であると言われる．

1. $x_i \geq v(\{i\})$,

2. $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

全体合理的な $x \in \mathbb{R}^n$ は準配分とよばれ，個人合理的な準配分 $x \in \mathbb{R}^n$ は配分とよばれる．

任意の $S \subseteq N$ に対して，$s = |S|$ とするとき全単射 $\pi_S : S \to \{1, 2, \ldots, s\}$ を提携 S における順列とし，この順列の集合を $\Pi(S)$ と表す．混乱の恐れがない場合には，N における順列を単に順列とよぶ．$i \in N$ に対して $P(\pi, i) = \{j \in N \mid \pi(j) < \pi(i)\}$ とするとき，プレイヤー i の提携 S における限界貢献度 $C_i(v)(S)$ および順列 π における限界貢献度 $m_i(v)(\pi)$ はつぎのように定義される．

$$C_i(v)(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S \backslash \{i\}),$$
$$m_i(v)(\pi) = v(P(\pi, i) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i)).$$

つぎで定義される $\phi_i(v)$ と $\beta_i(v)$ は，それぞれゲーム v におけるプレイヤー i の Shapley 値，絶対 Banzhaf 値とよばれる．

$$\phi_i(v) = \sum_{\pi \in \Pi(N)} \frac{1}{n!} \cdot m_i(v)(\pi),$$
$$\beta_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{1}{2^n} \cdot C_i(v)(S).$$

Shapley/絶対 Banzhaf 値は，各順列/提携が生じる確率が等しいと考えたときの限界貢献度の期待値といえる．また，$\sum_{j \in N} \beta_j(v) \neq 0$ をみたす v に対して定義される $\hat{\beta}_i(v) = \{v(N)/\sum_{j \in N} \beta_j(v)\} \cdot \beta_i(v)$ は（正規化）Banzhaf 値とよばれる．一般の協力ゲームにおいて，提携が生じる確率が異なる場合に適用可能な限界貢献度に基づく解に，確率値とよばれる解概念がある．確率値はつぎのように定義される．

定義 3 ([5]) つぎの値は $2^{N \backslash \{i\}}$ 上の確率分布 p_i が与えられたときの確率値とよばれる．

$$\chi_i(v; p_i) = \sum_{S \subseteq N \backslash \{i\}} p_i(S) \cdot C_i(v)(S)$$

$p_i(S)$ は i が S に参加する確率と考えることができる．また，順列が生じる確率に基づく解に，確率値の特殊形であるランダム順序値がある．

定義 4 ([5]) つぎの値は $\Pi(N)$ 上の確率分布 p が与えられたときのランダム順序値とよばれる．

$$\xi_i(v; p) = \sum_{\pi \in \Pi(N)} p(\pi) \cdot m_i(v)(\pi).$$

また，任意の $S \subseteq N$ に対して $v(S) \in \{0, 1\}$ で，任意の $S \subseteq T \subseteq N$ に対して $v(S) \leq v(T)$ で，$v(N) = 1$ を満たす協力ゲームは，投票ゲームとよばれる．投票ゲームに適用した Shapley/Banzhaf 値は Shapley-Shubik/Banzhaf 指数と呼ばれる．また，投票ゲームにおいて提携が生じる確率が異なる場合を扱うため，松井・上原はプロファイルに基づく Shapley 指数を考えた [2]．松井・上原が提案した指数をそのまま一般の協力ゲームに適用すると，つぎのような定義が得られる．

定義 5 ([2]) $p : 2^N \to [0,1]$ をプロファイルとし，$\phi_i(v)[S]$ をゲーム v と S における i の *Shapley* 値とする．すなわち，$\phi_i(v)[S] = 1/s! \cdot \sum_{\pi_S \in \Pi(S)} m_i(v)(\pi_S)$ とする．このとき，つぎで定義される $\rho_i^{\phi}(v;p)$ をプロファイル p が与えられたときの *MU* 値とよぶ．

$$\rho_i^{\phi}(v;p) = \sum_{S \subseteq N} p(S) \cdot \phi_i(v)[S]$$

遠藤らは，プロファイルに基づく Banzhaf 指数を提案した．この指数をそのまま一般の協力ゲームに適用したものがつぎである．

定義 6 ([1]) $p : 2^N \to [0,1]$ をプロファイルとし，$\beta_i(v)[S]$ をゲーム v と S における i の *Banzhaf* 値とする．すなわち，$\beta_i(v)[S] = 1/2^s \cdot \sum_{T \subseteq S} C_i(v)(T)$ とする．このとき，つぎで定義される $\rho_i^{\beta}(v;p)$ をプロファイル p が与えられたときの *ESA* 値とよぶ．

$$\rho_i^{\beta}(v;p) = \sum_{S \subseteq N} p(S) \cdot \beta_i(v)[S]$$

また，投票ゲームの特殊形として重みつき多数決ゲームがある．これは，各プレイヤー i に重み w_i が与えられ，割り当て数 $q \geq \sum_{i \in N} w_i/2$ が与えられているときに，つぎで定義される投票ゲームである．

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \displaystyle\sum_{i \in S} w_i \geq q, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

3. 加重和限界貢献度と限界型非対称解

3.1. 加重和限界貢献度，限界型非対称解と関連概念の定義

順列や提携などのように，プレイヤーの限界貢献度の基準となりうるものを一般に x と表し，基準 x の集合を X ($|X| < \infty$) と表す．このとき，各基準 $x \in X$ に一つの提携を対応させる適当な関数 $f_i^X : X \to P(N)$ を考えたとき，$i \in N$ の $x \in X$ に関する限界貢献度 $D_i^X(v)(x)$ を

$$D_i^X(v)(x) = v(f_i^X(x) \cup \{i\}) - v(f_i^X(x) \backslash \{i\})$$

で定義する．限界貢献度 $D_i^X(v)(x)$ は，$X = \Pi(N)$ ととったとき $D_i^{\Pi(N)}(v)(\pi) = v(P(\pi,i) \cup \{i\}) - v(P(\pi,i)) = m_i(v)(\pi)$ となり，$X = P(N)$ ととったとき $D_i^{P(N)}(v)(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S \backslash \{i\}) = C_i(v)(S)$ となる．また，関数 $p^X : X \to \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ を X 上のプロファイルと考える．確率分布をプロファイルとして考えることができることに注意しておく．また，任意の X と $G' \subseteq G$ に対して，$[G' \times \mathcal{P}][X] = \{(v, p^X) \in G' \times \mathcal{P}^X \mid \sum_{j \in N} \eta_j(v;p^X) \neq 0\}$ とし，任意の $(v, p^X) \in [G' \times \mathcal{P}][X]$ に対して，$e[v, p^X] = v(N)/\sum_{j \in N} \eta_j(v;p^X)$ とする．このとき，限界貢献度とプロファイルに基づく非対称な協力ゲームの解をつぎのように定義する．

定義 7 任意の $G' \subseteq G$ と任意の X が与えられたとき，任意の $v \in G'$ と任意の $p^X \in \mathcal{P}^X$ に対してつぎで定義される値をゲーム v における p^X に対する加重和限界貢献度とよぶ．

$$\eta_i^X(v;p^X) = \sum_{x \in X} p^X(x) \cdot D_i^X(v)(x). \tag{1}$$

η_i^X は $G' \times \mathcal{P}^X$ 上の関数と考えられるので，加重和関数とよぶ．また，任意の $(v, p^X) \in [G' \times \mathcal{P}][X]$ に対してつぎで定義される値を限界型非対称解とよぶ．

$$\hat{\eta}_i^X(v;p^X) = e[v, p^X] \cdot \eta_i^X(v;p^X). \tag{2}$$

$\hat{\eta}$ は $[G' \times \mathcal{P}][X]$ 上の関数と考えられるので，非対称解関数とよぶ．

また，限界型非対称解は，つぎのようにプロファイルを変換したときの加重和限界貢献度となる．

注意 1 任意の $(v, p^X) \in [G' \times \mathcal{P}][X]$ に対して，プロファイル $\hat{p}$ を任意の $x \in X$ について $\hat{p}^X(x) = e[v, p^X] \cdot p^X(x)$ と定義する．このとき，限界型非対称解はつぎのように表現できる．

$$\hat{\eta}_i^X(v;p^X) \;=\; \sum_{x \in X} \hat{p}^X(x) \cdot D_i^X(v)(x)$$

このことから，限界貢献度型非対称解は，プロファイルを $\hat{p}^X(x) = e[v, p^X] \cdot p^X(x)$ によって変換したときの加重和限界貢献度であることがわかる．ここで任意の $x \in X$ に対して $p^X(x)$ が等しい場合をつぎのように定義する．

定義 8 プロファイル $p^X(x)$ が任意の $x \in X$ に対して等しい値をとるとき，対称であるという．加重和限界貢献度/限界型非対称解は，対称なプロファイルが与えられたとき対称であるという．

X の範囲を制限したときの解概念として，つぎのような定義を与える．

定義 9 $\Pi(N)$ と $p^{\Pi(N)}$ が与えられたときの加重和限界貢献度/限界型非対称解を *Shapley* 型加重和限界貢献度/限界型 *Shapley* 値とよぶ．すなわち，i の *Shapley* 型加重和限界貢献度 $\eta_i^{\Pi(N)}(v;p^{\Pi(N)})$ はつぎのように表される．

$$\eta_i^{\Pi(N)}(v;p^{\Pi(N)}) = \sum_{\pi \in \Pi(N)} p^{\Pi(N)}(\pi) \cdot m_i(v)(\pi).$$

X が提携の集合 $P(N)$ に制限された場合については，つぎのように定義する．

定義 10 $P(N)$ と $p^{P(N)}$ が与えられたときの加重和限界貢献度/限界型非対称解を *Banzhaf* 型加重和限界貢献度/限界型 *Banzhaf* 値とよぶ．すなわち，i の *Banzhaf* 型加重和限界貢献度 $\eta_i^{P(N)}(v;p^{P(N)})$ はつぎのように表される．

$$\eta_i^{P(N)}(v;p^{P(N)}) = \sum_{S \subseteq N} p^{P(N)}(S) \cdot C_i(v)(S).$$

3.2. 加重和限界貢献度と他の解の関係

加重和限界貢献度について，他の解概念との関係を議論する．Shapley 型加重和限界貢献度と MU 値の関係と Shapley 型加重和限界貢献度と ESA 値の関係については，それぞれつぎの命題が成り立つ．

命題 1 $P_k(\pi) = \{i \in N \mid \pi(i) \leq k\}$ とする．*MU* 値 $\rho_i^{\phi}(v;p)$ は，任意の $\pi \in \Pi(N)$ に対して $p^{\Pi(N)}(\pi) = \sum_{k=1}^{n} p(P_k(\pi))/\{(n-k)! \cdot k!\}$ で定義される $p^{\Pi(N)}$ が与えられたときの加重和限界貢献度である．すなわち，*MU* 値 $\rho_i^{\phi}(v;p)$ は，つぎのように表される．

$$\rho_i^{\phi}(v;p) = \sum_{\pi \in \Pi(N)} \sum_{k=1}^{n} \frac{p(P_k(\pi))}{(n-k)! \cdot k!} \cdot m_i(v)(\pi).$$

命題 2 *ESA* 値 $\rho_i^{\beta}(v;p)$ は，任意の $T \in P(N)$ に対して $p^{P(N)}(T) = \sum_{S \subseteq N, S \supseteq T} p(S)/2^s$ で定義される $p^{P(N)}$ が与えられたときの *Banzhaf* 型加重和限界貢献度である．すなわち，*ESA* 値 $\rho_i^{\beta}(v;p)$ は，つぎのように表される．

$$\rho_i^{\beta}(v;p) = \sum_{T \subseteq N} \sum_{S \subseteq N, S \supseteq T} \frac{p(S)}{2^s} \cdot C_i(v)(T).$$

命題 1, 命題 2 から，MU 値，ESA 値は加重和限界貢献度が持つ性質を満たすことがわかる．Shapley 型加重和限界貢献度と限界型 Shapley 値については，つぎが成り立つ．

命題 3 プロファイルが $\sum_{\pi \in \Pi(N)} p^{\Pi(N)} = 1$ をみたすとき，*Shapley* 型加重和限界貢献度と限界型 *Shapley* 値は一致する．

注意 2 $\sum_{\pi \in \Pi(N)} p^{\Pi(N)}(x) = 1$ をみたす $p^{\Pi(N)}$ が与えられたときの限界型 *Shapley* 値（*Shapley* 型加重和限界貢献度）は，ランダム順序値である．

この注意から，ランダム順序値は限界型 Shapley 値のもつ性質をみたすことがわかる．また，加重和限界貢献度と確率値の関係がつぎのように得られる．

命題 4 $H_i^X(S) = (f_i^X)^{-1}(S) \cup (f_i^X)^{-1}(S \cup \{i\})$ とする．このとき，$\sum_{x \in X} p^X(x) = 1$ をみたすプロファイル p^X に対する加重和限界貢献度 $\eta_i^X(v;p^X)$ は，$p_i(S) = \sum_{x \in H_i^X(S)} p^X(x)$ としたときの確率値となる．すなわち，加重和限界貢献度 $\eta_i^X(v;p^X)$ は，つぎのように表される．

$$\eta_i^X(v;p^X) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \sum_{x \in H_i^X(S)} p^X(x) \cdot C_i(v)(S)$$

このことから，加重和限界貢献度は確率値の性質をすべて満たすことがわかる．また，限界型 Shapley/Banzhaf 値と通常の Shapley/Banzhaf 値との関係も，つぎのように得られる．

注意 3 対称な限界型 *Shapley/Banzhaf* 値は，プロファイルが $\sum_{x \in X} p^X(x) = 1$ を満たすとき，通常の *Shapley/Banzhaf* 値に一致する．

また，つぎの命題も成り立つ．

1. ゲームがゼロ単調でプロファイル p^X が $\sum_{x\in X} p^X(x) \geq 1$ を満たすならば，加重和限界貢献度は個人合理的である．
2. $\sum_{j\in N}\sum_{x\in X} p^X(x)\cdot D_j^X(v)(x) = v(N)$ ならば，加重和限界貢献度は準配分である．
3. 限界型非対称解は準配分である．
4. ゲームがゼロ単調で，プロファイル p^X が $v(N)\sum_{x\in X} p^X(x) \geq \sum_{x\in X} p^X(x)\sum_{j\in N} D_j^X(v)(x)$ を満たすとき，限界型非対称解は配分である．
5. ゲームがゼロ単調ならば，限界型 *Shapley* 値は配分である．
6. $p^X(x) > 0$ となる任意の基準 x において $D_i^X(v)(x) = 1$ となるプレイヤーが 2 人以上存在しないなら，投票ゲームに対する限界型非対称解は配分である．
7. ゲームが凸で，プロファイル p^X が $\sum_{x\in X} p^X(x) = 1$ を満たすならば，限界型 *Shapley* 値（*Shapley* 型限界貢献度の加重和）はコアの要素である．

3.3. 加重和限界貢献度と限界型非対称解の公理化

G の部分集合となるような任意の集合 G' と任意の基準の集合 X を考える．また，X 上で定義されるすべてのプロファイルからなる集合を $\mathcal{P}^X$ とかく．つぎでは，任意の G', X に対して定義できる性質を考える．つぎの記号を用意しておく．

$$J_i^X(S) = \begin{cases} \{x \mid f_i^X(x) \supseteq S\backslash\{i\}\}, & i \in S, \\ \emptyset, & i \notin S, \end{cases}$$

公理 1 $w_R \in G', p^X \in \mathcal{P}^X$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\theta_i^X(w_R; p^X) = 0, \quad \forall i \notin R,$$

$$\theta_i^X(w_R; p^X) : \theta_j(w_R; p^X) = \sum_{x\in J_i^X(R)} p^X(x) : \sum_{x\in J_j^X(R)} p^X(x), \forall (i,j) \in R^2.$$

公理 2 $v_1, v_2, c_1\cdot v_1 + c_2\cdot v_2 \in G'(c_1, c_2 > 0), p^X \in \mathcal{P}^X$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\theta^X(c_1\cdot v_1 + c_2\cdot v_2; p^X) = c_1\cdot\theta^X(v_1; p^X) + c_2\cdot\theta^X(v_2; p^X).$$

公理 3 $v \in G', p^X \in \mathcal{P}^X$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\sum_{i\in N}\theta_i^X(v; p^X) = \sum_{i\in N}\sum_{x\in X} p^X(x) D_i^X(v)(x).$$

公理 4 プロファイル $p_{\bar{x}}^X : X \to \mathbb{R}_+$ を $p_{\bar{x}}^X(\bar{x}) = 1$，任意の $x \neq \bar{x}$ に対して $p_{\bar{x}}^X(x) = 0$ で定義する．このとき，$v \in G'$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\theta_i^X(v; p_{\bar{x}}^X) = D_i^X(v)(\bar{x}).$$

公理 5 $v \in G', p_1^X, p_2^X \in \mathcal{P}^X$, $c_1, c_2 > 0$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\theta^X(v; c_1\cdot p_1^X + c_2\cdot p_2^X) = c_1\cdot\theta^X(v; p_1^X) + c_2\cdot\theta^X(v; p_2^X).$$

公理 6 $w_R \in G', p^X \in \mathcal{P}^X$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\theta_i^X(w_R; p^X) = \begin{cases} \sum_{x \in J_i^X(R)} p^X(x), & i \in R, \\ 0, & i \notin R. \end{cases}$$

公理 7 $v, c \cdot v \in G'(c > 0), p^X \in \mathcal{P}^X$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\theta^X(c \cdot v; p^X) = c \cdot \theta^X(v; p^X)$$

$v_1, v_2, v_1 + v_2 \in G', p^X \in \mathcal{P}^X$ ならば，つぎが成り立つ．

$$e[v_1 + v_2, p^X] \cdot \theta^X(v_1 + v_2; p^X) = e[v_1, p^X] \cdot \theta^X(v_1; p^X) + e[v_2, p^X] \cdot \theta^X(v_2; p^X).$$

公理 8 $v \in G', p^X \in \mathcal{P}^X$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\sum_{i \in N} \theta_i^X(v; p^X) = v(N).$$

公理 9 $v \in G', p^X \in \mathcal{P}^X$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\theta_i^X(v; p^X) : \theta_j^X(v; p^X) = \eta_i^X(v; p^X) : \eta_i^X(v; p^X).$$

性質 1 $v \in G', p^X \in \mathcal{P}^X$ ならば，つぎが成り立つ．

$$D_i^X(v)(x) = 0, \forall x \in X \Longrightarrow \theta_i^X(v; p^X) = 0.$$

性質 2 $v \in G', p^X \in \mathcal{P}^X$ ならば，つぎが成り立つ．

$$v(S) \le v(T), \forall S, T \subseteq N, S \subseteq T \Longrightarrow \theta_i^X(v; p^X) \ge 0.$$

性質 3 $\{x \in X \mid p^X(x) > 0\} \subseteq X_b \subseteq X$ とし，$p^{X_b} : X_b \to \mathbb{R}_+$ を任意の $x \in X_b$ に対して $p^{X_b}(x) = p^X(x)$ と定義する．このとき，$v \in G', p^X \in \mathcal{P}^X$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\theta_i^X(v; p^X) = \theta_i^{X_b}(v; p^{X_b}).$$

性質 4 $v \in G', p^X \in \mathcal{P}^X$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\theta^X(v; c \cdot p^X) = \theta^X(v; p^X), \forall c > 0.$$

このとき，つぎの命題が成り立つ．

命題 6 任意の X, 任意の $G' \subseteq G$ が与えられたとき，$G' \times \mathcal{P}^X$ 上の加重和関数は，性質 *1, 2, 3* をみたす．

命題 7 任意の X, 任意の $G' \subseteq G$ が与えられたとき，$[G' \times \mathcal{P}][X]$ 上の非対称解関数は，性質 *1, 2, 3, 4* をみたす．

加重和関数と非対称解関数について，つぎのような公理化を行うことによって合理性を示すことができる．

定理 1 任意の X, 任意の $G' \subseteq G$ が与えられたとき，$G' \times \mathcal{P}^X$ 上で公理 *4, 5* をみたす関数は一意に存在して，加重和関数である．

定理 2 $\{w_R \mid \emptyset \neq R \subseteq N\} \subseteq G' \subseteq G$ を満たす任意の凸錐 G' と任意の X が与えられたとき，$G' \times \mathcal{P}^X$ 上で公理 *1, 2, 3* をみたす関数は一意に存在して，加重和関数である．

定理 3 $\{w_R \mid \emptyset \neq R \subseteq N\} \subseteq G' \subseteq G$ を満たす任意の凸錐 G' と任意の X が与えられたとき，$G' \times \mathcal{P}^X$ 上で公理 *2, 6* をみたす関数は一意に存在して，加重和関数である．

定理 4 任意の X, 任意の $G' \subseteq G$ が与えられたとき，$[G' \times \mathcal{P}][X]$ 上で公理 *8, 9* をみたす関数は一意に存在して，非対称解関数である．

定理 5 $\{w_R \mid \emptyset \neq R \subseteq N\}$ を含む任意の凸錐 $G' \subseteq G$ に対して $\mathcal{P}^X[G'] = \{p^X \in \mathcal{P}^X \mid \eta_i^X(v; p^X) \neq 0, \forall v \in G'\}$ とする．このとき，$G' \times \mathcal{P}^X[G']$ 上で公理 *1,7,8* をみたす関数は一意に存在して，非対称解関数である．

4. 投票力分析への応用

日本の参議院における政党の投票力分析を行った代表的な研究には，小野・武藤 [3] によるものがある．小野・武藤は，1989 年から 1992 年までの政党の投票行動を実際のデータから導出し，選好空間に基づいて非対称な投票力を導出する方法を与え，政党の投票力分析を行った．また，松井・上原 [2] は，小野・武藤が導出した投票行動のデータを用い，選好空間を導入せずに MU 指数を求めた．遠藤らは [1] は，1998 年と 1999 年の政党の投票行動を導出し，この投票行動に E 指数を適用した．

ここでは，遠藤らが導出した投票行動に関するデータ（表 1）を用いて，提案した限界型非対称解を適用することによって投票力分析を行う．なお，表 1 では全員一致で可決された議案は取り除かれている．この状況を政党をプレイヤー，各政党の議席数を各プレイヤーの重みとみなし，割り当て数 127 の重みつき多数決ゲームとして考える．表 1 に示されている各議案パターンを貢献度を測る基準とみなし，各議案パターンが生じる確率をプロファイルの値と考える．また，$f_i^X(x)$ を，議案パターン x においてY を表明したプレイヤーの集合あるいは N を表明したプレイヤーの集合のうち，重みの合計が 127 を越える方の集合とし，いずれの集合も重みの合計が 127 を越えない場合は空集合であるとする．以上の手続きから得られた限界型非対称解を，他の解概念によって得られた値とともに表 2 に示した．なお,（正規化）MU 指数と正規化 ESA 指数を計算する際には，Y を表明したプレイヤーの集合の重みの合計と N を表明したプレイヤーの集合の重みの合計がいずれも 127 を超えないような議案パターンにおける Shapley 値，Banzhaf 値はゼロであるとみなした上で，得られた値を正規化した．また，松井・上原や遠藤らと同様に議案が可決されたときは Y，否決されたときは N を表明したプレイヤーの集合が発言力をもつと考えると，議席比例を重みづけしたものが考えられる．ここではこの概念を加重議席比例とし，これを正規化した（正規化）加重議席比例を参考として表 2 に示しておく．

5. おわりに

本研究では，加重和限界貢献度と限界型非対称解を提案し，他の解との関係を示し，いくつかの公理化を行った．また，限界型非対称解を実際の日本の参議院における投票力分析に応用した．

表 1: 参議院における 6 大政党の議案に対する反応 (1999 年) [1]

議案パターン \ 議席数	自民	民主	公明	共産	社民	自由	議案数
	104	51	23	23	13	12	
x_1	Y	Y	Y	N	Y	Y	63
x_2	Y	N	Y	N	Y	Y	26
x_3	Y	N	Y	N	N	Y	17
x_4	Y	Y	Y	N	N	Y	17
x_5	Y	N	N	N	Y	Y	5
x_6	N	Y	N	Y	Y	N	4
x_7	Y	Y	Y	N	Y	N	1
x_8	Y	N	N	N	N	Y	1
x_9	Y	N	Y	Y	N	Y	1
x_{10}	N	Y	Y	Y	Y	Y	1
x_{11}	N	Y	N	N	N	N	1

Y:賛成, N：反対

表 2: 参議院における 6 大政党の投票力 (1999 年)

	政党	自民	民主	公明	共産	社民	自由
対称	議席比例	0.460	0.226	0.102	0.102	0.058	0.053
	Shapley-Shubik 指数	0.667	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067
	正規化 Banzhaf 指数	0.750	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050
非対称	（正規化）MU 指数	0.628	0.077	0.205	0.002	0.044	0.044
	正規化 ESA 指数	0.571	0.099	0.224	0.003	0.052	0.052
	（正規化）加重議席比例	0.599	0.153	0.126	0.002	0.051	0.069
	限界型非対称解 $\hat{\eta}$	0.813	0.000	0.127	0.000	0.030	0.030

参考文献

[1] 遠藤理世, 鈴木貴, 穴太克則, 選考空間を構成せずに議案行動より直接計算する非対称 Banzhaf 指数, 京都大学数理解析研究所研究集会講究録 1207「不確実なモデルによる動的計画理論の課題とその展望」研究集会報告集 (2001) 128–135.

[2] T. Matsui and Y. Uehara, A note on asymmetric power index for voting games, 日本 OR 学会 2000 年度秋季研究発表会アブストラクト集.

[3] R. Ono and S. Muto, Party power in the house of councilors in Japan: an application of the nonsymmetric Shapley-Owen index, Journal of the Operations Research Society of Japan 40 (1997) 21–32.

[4] G. Owen, Political games, Naval Research Logistics Quarterly 18 (1971) 345–355.

[5] R.J. Weber, Chapter 7: Probabilistic values for games, in: "The Shapley value – Essays in honor of Lloyd S. Shapley," edited by A.E. Roth, Cambridge University Press, pp. 101–119, 1988.