数理解析研究所講究録 1242 巻 2002 年 40-49

非線形楕円型偏微分方程式に対する粘性解の内部正則性について

(Interior regularity of viscosity solutions for nonlinear second order ellitic partial differential equations)

神戸商船大学　石井　克幸 (Katsuyuki Ishii)

Abstract. This note presents a brief introduction of regularity theory of viscosity solutions of nonlinear second order elliptic partial differential equations. We mainly describe $C^{2,\alpha}$ estimates of viscosity solutions.

1 Introduction

本稿では非線形楕円型偏微分方程式に対する粘性解の内部正則性についての最近の結果を紹介する. まず, 次のような線形楕円型偏微分方程式を考える.

(1.1)
$$-a_{ij}(x)u_{x_ix_j} = f(x) \quad \text{in} \quad \Omega$$

ここで, $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ は開集合で, $a_{ij}(x)$ は一様楕円性の条件

$$\lambda I \leqq (a_{ij}(x)) \leqq \Lambda I \quad (\forall x \in \Omega, 0 < \lambda \leqq \Lambda < +\infty)$$

を満たすとする.

(1.1) に対する解の内部正則性については以下のような結果がよく知られている. $0 < \alpha < 1$, $1 < p < +\infty$ とし, u を $\Omega = B_1$ としたときの (1.1) の有界な解とする.

(1) (Cordes-Nirenberg) 小さな $\delta = \delta(\alpha) > 0$ に対して $(a_{ij}(x))$ が $\|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B_1)} \leqq \delta$ を満たすと仮定する. このとき, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_{1/2})$ かつ $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \leqq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)})$ を満たす.

(2) (Schauder) $a_{ij}, f \in C^\alpha(\overline{B}_1)$ ならば, $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}_{1/2})$ かつ $\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \leqq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^\alpha(B_1)})$ を満たす.

(3) (Calderón-Zygmund) $a_{ij} \in C(B_1)$, $f \in L^p(B_1)$ ならば, $u \in W^{2,p}(B_{1/2})$ かつ $\|u\|_{W^{2,p}(B_{1/2})} \leqq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^p(B_1)})$ を満たす.

これらは 方程式 (1.1) を Laplace 方程式の摂動とみなし, Laplace 方程式に対する解の正則性の結果を使うことで得られている. その後の発展や詳細については D. Gilberg-N. S. Trudinger [5] 等を参照のこと.

非発散系の非線形楕円型偏微分方程式に関しては, N. S. Trudinger [8] によって粘性解の $C^{1,\alpha}$-評価が初めて得られた. また, 1989 年に L. A. Caffarelli [2] は上記 (1)-(3) に対応する結果を一般の非線形一様楕円型偏微分方程式の粘性解に対して得た. 本稿では線形方程式 (1.1) に対して解説した Q. Han-F.-H. Lin [6] に沿って [2] の結果, 特に $C^{2,\alpha}$-評価についてその概要を紹介する. 詳しい内容に関しては, 彼らの本や L. A. Caffarelli-X. Cabré [1] を参照されたい. また, 最近の進展については小池茂昭氏の解説 [7] を参照されたい.

2 Preliminaries

方程式 (1.1) に関して次の仮定をおく.

(A.1) 正定数 λ, Λ $(\lambda \leqq \Lambda)$ が存在して

$$\lambda I \leqq (a_{ij}(x)) \leqq \Lambda I \qquad (\forall x \in \Omega)$$

を満たす.

(A.2) $a_{ij} \in C(\Omega)$ $(i, j = 1, \cdots, n)$.

(A.3) $f \in C(\Omega) \cap L^n(\Omega)$.

本稿では線形方程式 (1.1) の解について考えるが, 非発散系の非線形楕円型偏微分方程式の解を念頭に置いている. そのため, 弱解として粘性解を用いる.

定義 2.1 $u \in C(\Omega)$ とする.

(1) u が (1.1) の粘性劣解であるとは, 任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ に対して $u - \varphi$ が $x_0 \in \Omega$ で最大値を取るとき

$$-a_{ij}(x_0)\varphi_{x_ix_j}(x_0) \leqq f(x_0)$$

を満たす.

(2) u が (1.1) の粘性優解であるとは, 任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ に対して $u - \varphi$ が $x_0 \in \Omega$ で最小値を取るとき

$$-a_{ij}(x_0)\varphi_{x_ix_j}(x_0) \geqq f(x_0)$$

を満たす.

(3) u が (1.1) の粘性解であるとは, (1.1) の粘性劣解かつ粘性優解であるときをいう.

より一般の非線形楕円型偏微分方程式に対する粘性解の定義やその理論に関しては M. G. Crandall-H. Ishii-P.-L.Lions [3] 等を参照されたい.

(1.1) の粘性解に対する $C^{2,\alpha}$-評価を導くためにいくつかの定理や系を用意する. 解の内部正則性を考えているので, 今後は $\Omega = B_1$ としておく.

定理 2.2 (Alexandorff-Bakelman-Pucci maximum principle) (A.1), (A.3) を仮定する. $u \in C(B_1)$ を (1.1) の粘性優解とし, ∂B_1 上で $u \geqq 0$ と仮定する. このとき,

$$\sup_{B_1} u^- \leqq C \left(\int_{\{x \in B_1 \mid u(x) = \Gamma_u(x)\}} (f^+(x))^n dx \right)^{1/n}$$

が成り立つ. ここで $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$ は定数, $u^- = \max\{-u, 0\}$ で

$$\Gamma_u(x) = \sup\{L(x) \mid L \leqq -u^- \text{ in } B_1, L : \text{affine function}\}.$$

定理 2.3 (Harnack inequality) (A.1), (A.3) を仮定する. $u \in C(B_1)$ を (1.1) の非負な粘性解とする. このとき, 次の評価を得る.

$$\sup_{B_{1/2}} u \leqq C \left\{ \inf_{B_{1/2}} u + \|f\|_{L^n(B_1)} \right\}.$$

ここで $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$ は定数.

系 2.4 (Local Hölder estimate) (A.1), (A.3) を仮定する. $u \in C(B_1)$ を (1.1) の粘性解とする. このとき, $u \in C^\alpha(B_1)$ $(\exists \alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda) \in (0,1))$ となり, 次の評価を満たす. 任意の x, $y \in B_{1/2}$ に対して

$$|u(x) - u(y)| \leqq C|x-y|^\alpha \left\{ \sup_{B_1} |u| + \|f\|_{L^n(B_1)} \right\}.$$

ここで $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$ は定数.

これらの結果についての詳細, 及びその後の進展に関しては小池氏の解説 [] を参照されたい.

3 $C^{2,\alpha}$-estimate

前節の結果を用いて, (1.1) の粘性解に対する $C^{2,\alpha}$-評価を導く.

定理 3.1 (A.1)-(A.3) を仮定する. $u \in C(B_1)$ を (1.1) の粘性解とする. 更に, a_{ij}, f に関して次を仮定する. ある $\alpha \in (0,1)$ に対して

$$(3.1) \qquad [g]_{C^{\alpha}_{L^n}}(0) \equiv \sup_{0<r<1} \frac{1}{r^{\alpha}} \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |g(x) - g(0)|^n dx \right)^{1/n} < +\infty \quad (g = a_{ij}, f)$$

が成り立つ. このとき u は原点 O で $C^{2,\alpha}$ である. 即ち, 次の評価を満たす 2 次多項式 P が取れる.

$$(3.2) \qquad \|u - P\|_{L^\infty(B_r)} \leqq C_* r^{2+\alpha} \quad (0 < \forall r < 1),$$

$$(3.3) \qquad |P(0)| + |DP(0)| + \|D^2 P(0)\| \leqq C_*,$$

$$(3.4) \qquad C_* \leqq C \left\{ \|u\|_{L^\infty(B_1)} + |f(0)| + [f]_{C^{\alpha}_{L^n}} \right\},$$

但し $C = C(n, \lambda, \Lambda, \alpha, [a_{ij}]_{C^{\alpha}_{L^n}}) > 0$ は定数.

注意 (1) 仮定 (3.1) は $g(0)$ を基準にしたときの $g(x)$ の振動が小さいことを意味する. 従って $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $f(0) = 0$ としたとき, 方程式 (1.1) は Laplace 方程式の摂動とみなせる. また, この仮定は a_{ij}, f の原点 O における Hölder 連続性よりも弱い仮定である (Introduction で述べた Schauder 評価 (2) を参照).

(2) (3.2) は Campanato 空間 $\mathcal{L}_2^{\infty,2+\alpha}$ を定義する際に現れるセミノルムの評価と考えることができる. Campanato 空間の定義や性質などについては M. Giaquinta [4] 等を参照のこと.

(3) (3.2)-(3.4) のような評価が, 例えば, 任意の $x \in B_{1/2}$ で成り立つとすると, $u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$ が言える.

定理 3.1 を証明する上で次の補題 ((1.1) の粘性解 u の近似) が重要である.

補題 3.2 (A.1)-(A.3) を仮定する. $u \in C(B_1)$ を (1.1) の粘性解とし, $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqq 1$ を満たすとする. 更に, ある $\varepsilon \in (0, 1/16)$ に対して

$$\|a_{ij} - a_{ij}(0)\|_{L^n(B_{3/4})} \leqq \varepsilon$$

が成り立つと仮定する. このとき, $-a_{ij}(0) h_{x_i x_j} = 0$ in $B_{3/4}$, かつ $\|h\|_{L^\infty(B_{3/4})} \leqq 1$ となる関数 $h \in C(\overline{B}_{3/4})$ が存在して次の評価を満たす.

$$\|u - h\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leqq C \left\{ \varepsilon^{\gamma} + \|f\|_{L^n(B_1)} \right\}.$$

但し, $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$, $\gamma = \gamma(n, \lambda, \Lambda) \in (0,1)$ は定数.

証明. $h \in C(\overline{B}_{3/4})$ を次の境界値問題の古典解とする.

$$(3.5) \qquad \begin{cases} -a_{ij}(0) h_{x_i x_j} = 0 & \text{in} \quad B_{3/4}, \\ h = u & \text{on} \quad \partial B_{3/4}. \end{cases}$$

最大値原理より $\|h\|_{L\infty(B_{3/4})} \leqq 1$ である. u に関して, 系 2.4 の評価が成り立つことを使うと, h は次の評価を満たす.

$$\|h\|_{C^{\alpha/2}(\overline{B}_{3/4})} \leqq C\|u\|_{C^{\alpha}(\overline{B}_{3/4})} \leqq C(n,\lambda,\Lambda)\{1+\|f\|_{L^n(B_1)}\}.$$

また, $u-h=0$ on $\partial B_{3/4}$ と上の評価より

$$\|u-h\|_{L^\infty(\partial B_{3/4-\delta})} \leqq C\delta^{\alpha/2}\{1+\|f\|_{L^n(B_1)}\} \qquad \left(0<\forall\delta<\frac{1}{4}\right).$$

更に (3.5) の解に対する内部 C^2-評価より

$$|D^2h(x)| \leqq C\delta^{-2+\alpha/2}\{1+\|f\|_{L^n(B_1)}\} \qquad (\forall x \in B_{3/4-\delta})$$

を得る. $u-h$ が

$$\begin{cases} -a_{ij}(u_{x_ix_j}-h_{x_ix_j}) = f(x)-(a_{ij}(x)-a_{ij}(0))h_{x_ix_j}(x) & \text{in} \quad B_{3/4}, \\ h=u & \text{on} \quad \partial B_{3/4}. \end{cases}$$

の粘性解になることと定理 2.2 より

$$\|u-h\|_{L^\infty(B_{3/4-\delta})} \leqq C(\delta^{\alpha/2}+\delta^{-2+\alpha/2}\varepsilon)\{1+\|f\|_{L^n(B_1)}\}+C\|f\|_{L^n(B_1)}$$

が成り立つ. ここで, $\delta=\varepsilon^{1/2}$, $\gamma=\alpha/4$ と取ればよい. □

定理 3.1 の証明. *Step 1.* 簡単のため, $f(0)=0$ と仮定しておく. 更に

$$\|u\|_{L^\infty()B_1} \leqq 1, [\tilde{a}_{ij}]_{C^{\alpha}_{L^n}}(0) \leqq \delta, [\tilde{f}]_{C^{\alpha}_{L^n}}(0) \leqq \delta \tag{3.6}$$

と仮定してよい.

何故ならば, スケール変換

$$\tilde{u}(y) = \frac{r_1^{-2}u(r_1y)}{r_1^{-2}\|u\|_{L^\infty(B_1)}+\delta^{-1}[f]_{C^{\alpha}_{L^n}}(0)} \equiv \frac{r_1^{-2}u(r_1y)}{K} \quad (y \in B_{1/r_1})$$

により $\tilde{u}$ は

$$-\tilde{a}_{ij}(y)\tilde{u}_{y_iy_j} = \tilde{f}(y) \qquad \text{in} \quad B_{1/r_1},$$
$$(\tilde{a}_{ij}(y)=a_{ij}(r_1y), \tilde{f}(y)=\frac{f(r_1y)}{K}),$$

の粘性解で $\|u\|_{L^\infty(B_{1/r_1})}$ となる. ここで

$$\frac{1}{r^\alpha}\left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|\tilde{a}_{ij}(y)-\tilde{a}_{ij}(0)|^n dy\right)^{1/n}$$

$$
\begin{aligned}
&= r_1^\alpha \left(\frac{1}{(r_1 r)^\alpha} \frac{1}{|B_{r/r_1}|} \int_{B_{r/r_1}} |a_{ij}(x) - a_{ij}(0)|^n dx \right)^{1/n} \\
&\leqq r_1^\alpha [a_{ij}]_{C^\alpha_{L^n}}(0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r^\alpha} \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |\tilde{f}(y)|^n dy \right)^{1/n} \\
&= \frac{r_1^\alpha}{K} \frac{1}{(r_1 r)^\alpha} \frac{1}{|B_{r/r_1}|} \left(\int_{B_{r/r_1}} |f(x)|^n dx \right)^{1/n} \\
&\leqq \delta r_1^\alpha,
\end{aligned}
$$

であるから, $r_1 = \{\delta([a_{ij}]_{C^\alpha_{L^n}}(0) + 1)^{-1}\}^{1/\alpha}$ ととることにより

$$
[\tilde{a}_{ij}]_{C^\alpha_{L^n}}(0), [\tilde{f}]_{C^\alpha_{L^n}}(0) \leqq \delta \tag{3.7}
$$

とできる. $\tilde{u}$, $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{f}$ をそれぞれ u, a_{ij}, f と見なせばよい.

Step 2. $\delta = \delta(n, \lambda, \Lambda, \alpha) > 0$ を小さく取ることにより, 次のことが成り立つことを示す: $u \in C(B_1)$ を $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqq 1$ となる (1.1) の粘性解とし, a_{ij}, f は (3.7) を満たすとする. このとき,

$$
\|u - P\|_{L^\infty(B_r(0))} \leqq C r^{2+\alpha} \quad (0 < \forall r < 1), \tag{3.8}
$$

$$
|P(0)| + |DP(0)| + \|D^2 P(0)\| \leqq C, \tag{3.9}
$$

を満たす 2 次多項式 P が存在する. 但し, $C = C(n, \lambda, \Lambda, \alpha)$ は定数. これが証明できれば, スケール変換を元に戻すことにより, 定理の結論が導かれる.

Step 3. 前 *Step* の主張を示すには以下の事柄が証明できればよい: $\mu = \mu(n, \lambda, \Lambda, \alpha) \in (0, 1)$ 及び, 2 次多項式の列

$$
P_k(x) = a_k + \langle b_k, x \rangle + \frac{1}{2} \langle C_k x, x \rangle \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)
$$

が存在して

$$
-a_{ij}(0) P_{k, x_i x_j} = 0, \tag{3.10}
$$

$$
\|u - P_k\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} \leqq \mu^{k(2+\alpha)}, \tag{3.11}
$$

$$
|a_k - a_{k-1}| + \mu^{k-1} |b_k - b_{k-1}| + \mu^{2(k-1)} \|C_k - C_{k-1}\| \leqq C \mu^{(k-1)(2+\alpha)} \tag{3.12}
$$

を満たす. 但し, $P_{-1} = P_0 \equiv 0$, $C = C(n, \lambda, \Lambda, \alpha)$ は定数.

このような μ, $\{P_k\}_{k \geqq 0}$ が取れたとして, 前 *Step* の主張を示す. まず, (3.12) より $\{a_k\}_{k \geqq 0}$, $\{b_k\}_{k \geqq 0}$, $\{C_k\}_{k \geqq 0}$ は収束するので, それらの極限をそれぞれ a_∞, b_∞, C_∞ とおく. このとき, 多項式

$$
p(x) = a_\infty + \langle b_\infty, x \rangle + \frac{1}{2} \langle C_\infty x, x \rangle
$$

は $|x| \leqq \mu^k$ となる任意の x に対して

$$|P_k(x) - p(x)| \leqq C\{|x|^2\mu^{\alpha k} + |x|\mu^{(\alpha+1)k} + |x|\mu^{(\alpha+2)k}\} \leqq C\mu^{(2+\alpha)k}$$

を満たす. よって $|x| \leqq \mu^k$ となる任意の x に対して (3.11) とこの評価を使って

$$|u(x) - p(x)| \leqq |u(x) - P_k(x)| + |P_k(x) - p(x)| \leqq C\mu^{(2+\alpha)k}$$

が成り立つ. 任意の $x \in B_1$ に対して $k \geqq 0$ を $\mu^k \leqq |x| \leqq \mu^{k-1}$ となるように取り, 上の評価を用いると

$$|u(x) - p(x)| \leqq C\mu^{-1}|x|^{2+\alpha}$$

が言える. 故に任意の $0 < r < 1$ に対して (3.8) を得る. (3.9) は明らかである.

Step 4. *Step 3* の主張を証明する. $k = 0$ のときは明らかである. $k = 0, 1, \cdots, l$ に対して (3.10)-(3.12) を満たす μ, P_k が取れたと仮定する (μ の決め方は後でわかる).

$$\tilde{u}(y) = \frac{1}{\mu^{(2+\alpha)l}}(u - P_l)(\mu^l y) \qquad (\forall y \in B_1)$$

とおくと $\tilde{u}$ は

$$\begin{aligned} -\tilde{a}_{ij}(y)\tilde{u}_{y_i y_j} &= \tilde{f}(y) \qquad \text{in} \quad B_1 \\ \tilde{a}_{ij}(y) = \frac{1}{\mu^{\alpha l}}a_{ij}(\mu^l y), \tilde{f}(y) &= \frac{1}{\mu^{\alpha l}}\{f(\mu^l y) - a_{ij}(\mu^l y)P_{k, y_i y_j}\} \end{aligned}$$

を粘性解の意味で満たす. ここで仮定 (3.1) と (3.12) より

$$\|D^2 P_l\| \leqq \sum_{k=1}^{l} \|D^2 P_k - D^2 P_{k-1}\| \leqq \sum_{k=1}^{l} \mu^{(k-1)\alpha} \leqq C$$

が言えることに注意すると, $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{f}$ が

$$\|\tilde{a}_{ij} - \tilde{a}_{ij}(0)\|_{L^n(B_1)}, \|\tilde{f}\|_{L^n(B_1)} \leqq C\delta$$

を満たすことは容易に確かめられる. $\varepsilon = C\delta$ とおく. すると, 補題 3.2 より

$$\begin{cases} -\tilde{a}_{ij}(0)h_{x_i x_j} = 0 & \text{in} \quad B_{3/4}, \\ h = \tilde{u} & \text{on} \quad \partial B_{3/4}, \end{cases}$$

及び,

$$\begin{aligned} &\|h\|_{L^\infty(B_{3/4})} \leqq 1, \\ &\|\tilde{u} - h\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leqq C\{\varepsilon^\gamma + \varepsilon\} \leqq 2C\varepsilon^\gamma \end{aligned}$$

を満たす $h \in C(\overline{B}_{3/4})$ が取れる.

$$\widetilde{P}(y) = h(0) + \langle Dh(0), y\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2h(0)y, y\rangle$$

とおく. h の内部評価を使って

$$\|\tilde{u} - \widetilde{P}\|_{L^\infty(B_\mu)} \leqq \|\tilde{u} - h\|_{L^\infty(B_\mu)} + \|h - \widetilde{P}\|_{L^\infty(B_\mu)} \leqq 2C\varepsilon^\gamma + C\mu^3 \leqq \mu^{2+\alpha}$$

を得る. ここで, μ と ε (即ち δ) を小さく選ぶが, その選び方は $k = 0, 1, \cdots$ によらないことに注意する. スケール変換を元に戻すと

$$|u(x) - P_l(x) - \mu^{(2+\alpha)l}\widetilde{P}(\mu^{-l}x)| \leqq \mu^{(l+1)(2+\alpha)} \qquad (x \in B_{\mu^{l+1}})$$

となる. そこで

$$P_{l+1}(x) = P_l(x) + \mu^{(2+\alpha)l}\widetilde{P}(\mu^{-l}x)$$

とおけば P_{l+1} は (3.10)-(3.12) を満たす. □

次に (1.1) の粘性解に対する $C^{1,\alpha}$-評価を述べる.

定理 3.3 (A.1)-(A.3) を仮定する. $u \in C(B_1)$ を (1.1) の粘性解とする. 更に, a_{ij} に関して次を仮定する: 任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して次を満たす $\theta = \theta(n, \lambda, \Lambda, \alpha) > 0$ が存在する.

$$(3.13) \qquad \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(0)|^n dx\right)^{1/n} \leqq \theta \qquad (0 < \forall r \leqq 1).$$

このとき u は原点 O で $C^{1,\alpha}$ である. 即ち, 次の評価を満たす affine 関数 L が取れる.

$$(3.14) \qquad \|u - L\|_{L^\infty(B_r(0))} \leqq C_* r^{1+\alpha} \quad (0 < \forall r < 1),$$

$$(3.15) \qquad |L(0)| + |DL(0)| \leqq C_*,$$

$$(3.16) \qquad C_* \leqq C\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \sup_{0<r<1} r^{1-\alpha}\left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(x)|^n dx\right)^{1/n}\right\},$$

但し $C = C(n, \lambda, \Lambda, \alpha) > 0$ は定数.

注意 (1) 仮定 (3.13) は $a_{ij}(0)$ を基準にしたときの $a_{ij}(x)$ の振動が小さいことを意味する. 従って $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$ としたとき, 方程式 (1.1) の主要部は Laplace 作用素の摂動とみなせる. この点に関しては Introduction で述べた Cordes-Nirenberg 評価 (1) で置かれている仮定よりも弱いものとなっている.

(2) (3.2) は Campanato 空間 $\mathcal{L}_1^{\infty,1+\alpha}$ を定義する際に現れるセミノルムの評価と考えることができる.

(3) (3.14)-(3.16) のような評価が, 例えば, 任意の $x \in B_{1/2}$ で成り立つとすると, $u \in C^{1,\alpha}(B_{1/2})$ が言える.

定理 3.3 の証明方法は定理 3.1 のそれと同じなので省略する.

最後に Introduction で述べた Calderón-Zygmund 評価 (3) に対応する粘性解の $W^{2,p}$-評価について述べておく.

定理 3.4 (A.1)-(A.3) を仮定する. $u \in C(B_1)$ を (1.1) の粘性解とする. 更に, a_{ij} に関して次を仮定する: 任意の $p \in (n, +\infty)$ に対して次を満たす $\varepsilon = \varepsilon(n, \lambda, \Lambda, p) > 0$ が存在する.

$$(3.17)\left(\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)|^n dx\right)^{1/n} \leqq \varepsilon \qquad (\forall B_r(x_0) \subset B_1).$$

このとき $u \in W^{2,p}_{loc}(B_1)$ であり, 次の評価を満たす.

$$\|u\|_{W^{2,p}(B_{1/2})} \leqq C\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^p(B_1)}\right\}$$

但し $C = C(n, \lambda, \Lambda, p) > 0$ は定数.

References

[1] L. A. Cafarelli and X. Cabré. *Fully Nonlinear Elliptic Equations* (AMS Colloquium Publications 43). AMS, Province, RI, 1995.

[2] L. A. Caffarelli. Interior a prioir estimates for solutions of fully nonlinear equations. *Ann. Math.*, 130:189–213, 1989.

[3] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. A. M. S.*, 27:1–67, 1992.

[4] M. Giaquinta. *Multiple Integrals in the Calvulus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems* (Annals of Mathematics Studies 105). Princeton University Press, Princeton, 1983.

[5] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Parital Differential Equations of Second Order (2nd Edition)*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[6] Q. Han and F.-H. Lin. *Elliptic Partial Differential Equations* (Courant Lecture Notes in Mathematics 1). New York University, New York, 1993.

[7] S. Koike. Interior hölder continuity for viscosity solutions of fully nonlinear second-order uniformly elliptic pdes with measurable ingredients. **京都大学数理解析研究所講究録**, 2002.

[8] N. S. Trudinger. Hölder gradient estimates for fully nonlinear equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 108:57–65, 1988.