数理解析研究所講究録 1243 巻 2002 年 85-95

C^1-空間上のコロフキン定理

新潟工科大学　渡邉　誠治 (Seiji Watanabe)
Niigata Institute of Technology

1. はじめに

以下の内容は、平沢氏、泉池氏との共同研究 ([11]) により得られた結果を中心として、$C^{(1)}([0,1])$ 上のコロフキン定理について述べたものである。

$C(K)$ をコンパクト・ハウスドルフ空間 K 上の実数値連続関数空間とし、$C(K)\ni f$ に対して、$\|f\|_\infty=\max\{|f(x)|:x\in K\}$ とおく。

$K=[0,1]$ のとき、P. P. Korovkin は次の定理を示した。

Korovkin 近似定理 ([15]) $\{T_n\}$ を $C([0,1])$ 上の正作用素列で $\|T_nx^j-x^j\|_\infty\to 0$ $(j=0,1,2)$ とする。このとき、 $\|T_nf-f\|_\infty\to 0\quad(\forall f\in C([0,1]))$ である。

これは、 3 個の関数族 $\{1,x,x^2\}$ に対して収束していれば、すべての $f\in C([0,1])$ に対して収束することを主張しているわけで大変興味深い結果である。その後、この近似定理は $C([0,1])$ を他の種々の関数空間や作用素空間、バナッハ空間へ、作用素も正作用素から他の作用素族へ、さらに関数族 $\{1,x,x^2\}$ も他の関数族へ変えて、様々なコロフキン定理が研究されてきた。

応用上は、正値性を検証することが容易な場合 (例えば、Bernstein 作用素) が多いが、正作用素と並んで、興味深いのは縮小作用素の場合であろう。

コロフキンの定理は次のように一般的に定式化される。

X をバナッハ空間、 S をその部分集合とする。

定義 1. 試験関数族 S に対して、(縮小作用素に関する) コロフキン定理が成り立つ

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

X 上の縮小作用素列 $\{T_n\}$ $(i.e.\|T_n\|\leq 1)$ に対して $\|T_ns-s\|\to 0\ (\forall s\in S)$ なら $\|T_nx-x\|\to 0\ (\forall x\in X)$

X に順序が与えられているときは、

定義 2. 試験関数族 S に対して、(正作用素に関する) コロフキン定理が成り立つ

X 上の正作用素列 $\{T_n\}$ に対して $\|T_n s - s\| \to 0\ (\forall s \in S)$ なら $\|T_n x - x\| \to 0\ (\forall x \in X)$

この定義で、列をネットで置き換えたとき、「ネットタイプのコロフキン定理が成り立つ」という。

定義 3. $Kor^1(S) = \{x \in X; X$上の縮小作用素列 $\{T_n\}$ に対して $\|T_n s - s\| \to 0\ (\forall s \in S)$ なら $\|T_n x - x\| \to 0\ \}$

定義 4. $Kor^+(S) = \{x \in X; X$上の正作用素列 $\{T_n\}$ に対して $\|T_n s - s\| \to 0\ (\forall s \in S)$ なら $\|T_n x - x\| \to 0\ \}$

$Kor^1(S)$, $Kor^+(S)$ を、それぞれ縮小作用素、正作用素に関する S のコロフキン閉包という。$Kor^1(S) = X$, または $Kor^+(S) = X$ は S に対してコロフキン定理が成り立つことを意味する。

この定義で列をネットで置き換えたものを、$Kor^{n+}(S)$, $Kor^{n1}(S)$ で表す。

[12, Theorem 1] で X が可分のとき、コロフキン定理が成り立つことと、ネットタイプのコロフキン定理が成り立つことは同値であることが示されている。また、そこでの議論から X が可分のとき $Kor^1(S) = Kor^{n1}(S)$ がわかる。

Wulbert(1968), Shashkin(1969), Beren-Lorenz(1975), Altomare-Boccatio(1982) 等により、$C(K)$ では正作用素と縮小作用素に関するネットタイプのコロフキン定理は同値であることが示された。特に、Altomare-Boccatio は $C(K) \supset S \ni 1$ に対して、$Kor^{n1}(S) = Kor^{n+}(S)$ を示した。$C(K)$ が可分のときは $Kor^{n1}(S) = Kor^{n+}(S) = Kor^1(S) = Kor^+(S)$ となり、Korovkin 近似定理で正作用素を縮小作用素で置き換えられる。

次に、$C^{(1)}([0,1])$ を [0,1] 上の実数値連続微分可能関数の全体とする。

$C^{(1)}([0,1])$ におけるノルムと正値性を次のように与える。

$$f \succcurlyeq 0 \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad f \geq 0,\ f' \geq 0 \quad (\Leftrightarrow f(0) \geq 0,\ f' \geq 0) \quad (f \in C^{(1)}([0,1]))$$

$$\|f\|_m = \max\{\, |f(0)|,\ \|f'\|\,\} \quad (f \in C^{(1)}([0,1]))$$

このとき、$C^{(1)}([0,1])$ と $C([0,1]) \oplus_{l^\infty} R = C([0,1] \cup \{w\})$ は対応：$f \longleftrightarrow (f', f(0))$ により、等距離線形順序同型である。したがって、$C^{(1)}([0,1])$ は順序に関しても、ノルムに関しても連続関数空間と見なせるので議論が $C(K)$ の場合に帰着される。

上で述べたことより、$C^{(1)}([0,1])$ では $\succcurlyeq$ による正作用素に関するコロフキン定理と $\|\cdot\|_m$ による縮小作用素に関するコロフキン定理は同値である。

これらのことより、$C^{(1)}([0,1])$ では $\succcurlyeq$ と $\|\cdot\|_m$ のもとでは、試験関数族 $\{1, x, x^2, x^3\}$

に対して、コロフキン定理が成り立つことが予想される。実際、1989 年 Altomare と Rasa は $\{1, x, x^2, x^3\}$ に対して、正作用素 (したがって、縮小作用素) に関するコロフキン定理が成り立ち、$\{1, x, x^2\}$ に対しては成り立たないことを示した ([3])。証明はコロフキン閉包の特徴付けを $C([0,1] \cup \{w\})$ を通して行うものである。縮小作用素に関しては、以下の我々の方法でも直接示せる。今までに得られている $C^{(1)}([0,1])$ 上のコロフキン定理に関する結果は、$\succcurlyeq$ と $\|\cdot\|_m$ またはその変形したものが多いように思われる。しかし、$\|\cdot\|_m$ 以外のノルムの場合は、連続関数空間の場合に簡単に帰着できない。

2. 種々のノルムに対するコロフキン定理

以下では、いくつかのノルムの場合に $\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\} \supset S$ に対して、縮小作用素に関するコロフキン定理が成り立つかどうかを考える。

特に断らない限り、コロフキン定理とは縮小作用素に関するものとする。

$C^{(1)}([0,1]) \ni f$ に対して、次のノルムを考える。

$$\|f\|_M = \max\{\|f\|_\infty,\ \|f'\|_\infty\}$$

$$\|f\|_m = \max\{|f(0)|,\ \|f'\|_\infty\}$$

$$\|f\|_\Sigma = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

$$\|f\|_\sigma = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

$$\|f\|_c = \sup\{|f(x)| + |f'(x)|\ :\ x \in [0,1]\}$$

$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$ より, $\|f\|_\Sigma/2 \leq \|f\|_M \leq \|f\|_c \leq \|f\|_\Sigma$, かつ $\|f\|_\sigma/2 \leq \|f\|_m \leq \|f\|_M \leq \|f\|_\sigma \leq \|f\|_\Sigma$. 即ち、これらのノルムはすべて同値である。

ノルム $\|\cdot\|_M$ を持った $C^{(1)}([0,1])$ を $C^{(1)}_M([0,1])$ で表す。$C^{(1)}_m([0,1])$, $C^{(1)}_\Sigma([0,1])$, $C^{(1)}_\sigma([0,1])$, $C^{(1)}_c([0,1])$ も同様とする。

$C^{(1)}_M([0,1])$ 上の有界線形作用素 T のノルムを $\|T\|_M$ で表す。$\|T\|_m, \|T\|_\Sigma, \|T\|_\sigma, \|T\|_c$ も同様とする。

次の定理の $C^{(1)}_m([0,1])$ に対しては、[3] で別の方法を用いて示されている。

定理 5. 試験関数族 $\{1, x, x^2, x^3\}$ に対して、$C^{(1)}_M([0,1])$, $C^{(1)}_m([0,1])$ 上でコロフキン定理が成り立つ。

証明の概略. $\{T_n\}_n$ を $C_M^{(1)}([0,1])$ 上の縮小作用素列で、

$$\|T_n x^j - x^j\|_M \to 0 \quad (j = 0,1,2,3)$$

とする。このとき、$\|T_n f - f\|_M \to 0$ $(\forall f \in C_M^{(1)}([0,1]))$ を示す。

まず、

$$(V_n g)(x) = \Big(T_n\Big(\int_0^x g(t)\,dt\Big)\Big)' \text{ for } g \in C([0,1])$$

とおくと、$\|T_n\|_M \le 1$ より、すべての $g \in C([0,1])$ に対して、

$$\|V_n g\|_\infty \le \Big\|T_n\Big(\int_0^x g(t)\,dt\Big)\Big\|_M \le \Big\|\int_0^x g(t)\,dt\|_M \le \|g\|_\infty$$

となるので、V_n は $C([0,1])$ 上の縮小作用素となる。

$j = 0,1,2$ に対して、

$$\|V_n x^j - x^j\|_\infty \le \Big\|\frac{1}{j+1} T_n x^{j+1} - \frac{1}{j+1} x^{j+1}\Big\|_M \to 0$$

であるから、Korovkin 近似定理より $\|V_n g - g\|_\infty \to 0$ $(\forall g \in C([0,1])$. すなわち、

$$\Big\|\Big(T_n\Big(\int_0^x g(t)\,dt\Big)\Big)' - g\Big\|_\infty \to 0 \quad (\forall g \in C([0,1])).$$

このとき、$f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$ $(\forall f \in C^{(1)}([0,1]))$ を用いると、

$$\|(T_n f)' - f'\|_\infty \to 0\,, \quad \|T_n f - (T_n f)(0) - f + f(0)\|_\infty \to 0 \quad (\forall f \in C^{(1)}([0,1]))$$

が示せる。したがって、

$$(T_n f)(0) \to f(0) \quad (\forall f \in C^{(1)}([0,1]))$$

を示せば定理の証明が終わる。そのために、

$$F_n(f) = (T_n f)(0) \text{ for } f \in C_M^{(1)}([0,1]).$$

とおくと、$\{T_n\}_n$ は縮小作用素列だから、

$$|F_n(f)| \le \|T_n f\|_\infty \le \|T_n f\|_M \le \|f\|_M \text{ for } f \in C_M^{(1)}([0,1]).$$

ゆえに、F_n は $C_M^{(1)}([0,1])$ 上の有界線形汎関数で $\|F_n\| \le 1$ となる。ところが、

$$C_M^{(1)}([0,1]) \ni f \to (f, f') \in C([0,1]) \oplus_{l^\infty} C([0,1])$$

は等距離だから、ハーン・バナッハとリース・角谷の定理より [0, 1] 上の有界ボレル測度 μ_n と ν_n が存在して、

$$\|\mu_n\| + \|\nu_n\| \le 1,$$
$$(T_n f)(0) = F_n(f) = \int_{[0,1]} f\, d\mu_n + \int_{[0,1]} f'\, d\nu_n \quad (\forall f \in C_M^{(1)}([0,1]))$$

と表示できる。証明の最初の仮定から、

$$\|T_n 1 - 1\|_\infty \to 0, \quad \|T_n(1-x) - (1-x)\|_\infty \to 0$$

だから、

$$\|\mu\| \to 1,\ \|\nu\| \to 0 \text{ かつ} \int_{[0,1]} (1-x)\, d\mu_n \to 1.$$

したがって、$\int_{[0,1]} h\, d\mu_n \to h(0)$ $(\forall h \in C([0,1]))$ となり、$(T_n f)(0) \to f(0)$ $(\forall f \in C^{(1)}([0,1]))$ がわかる。証明終。

定理 6. 試験関数族 $\{1, x, x^2\}$ に対して、$C_M^{(1)}([0,1])$, $C_m^{(1)}([0,1])$, $C_\Sigma^{(1)}([0,1])$, および $C_\sigma^{(1)}([0,1])$ 上ではコロフキン定理は成り立たない。.

証明の概略. $C_M^{(1)}([0,1])$, $C_m^{(1)}([0,1])$, $C_\Sigma^{(1)}([0,1])$, および $C_\sigma^{(1)}([0,1])$ 上で $\{1, x, x^2\}$ に対して、コロフキン定理が成り立たないような縮小作用素列 $\{T_n\}_n$ を構成する。

$n \ge 2$ に対して、$t_n = 1/2 - 1/n$, $s_n = 1/2 + 1/n$ とし、$f \in C([0,1])$ に対して、次のようにおく。

$$(J_n f)(t) = \begin{cases} f(t) & \text{if} \quad 0 \le t \le t_n \\ n\left(\frac{f(0)+f(1)}{2} - f(t_n)\right)(t - t_n) + f(t_n) & \text{if} \quad t_n \le t \le 1/2 \\ n\left(f(s_n) - \frac{f(0)+f(1)}{2}\right)(t - 1/2) + \frac{f(0)+f(1)}{2} & \text{if} \quad 1/2 \le t \le s_n \\ f(t) & \text{if} \quad s_n \le t \le 1. \end{cases}$$

このとき、

$$(L_n f)(x) = f(0) + \int_0^x (J_n f')(t)\, dt \quad \text{for } f \in C^{(1)}([0,1])$$

とおくと、L_n は $C^{(1)}([0,1])$ 上の線形作用素で、

$$L_n 1 = 1,\ L_n x = x,\ \text{かつ}\ L_n x^2 = x^2.$$

さらに、$f \in C^{(1)}([0,1])$ に対して、$\|L_n f - f\|_\infty \le 4\|f'\|_\infty / n$.
これより、

$$\|L_n f\|_\infty \le \|f\|_\infty + 4\|f'\|_\infty/n,\ |(L_n f)(0)| = |f(0)|,\ \text{かつ}\ \|(L_n f)'\|_\infty = \|J_n f'\|_\infty \le \|f'\|_\infty.$$

ゆえに、$\|L_n\|_M \le 1+4/n$, $\|L_n\|_\sigma \le 1$, $\|L_n\|_\Sigma \le 1+4/n$.

$T_n = \dfrac{n}{n+4} L_n$ とおくと、$\{T_n\}_n$ は $C^{(1)}([0,1])$ 上の線形作用素列で、

$$\|T_n\|_M \le 1,\ \|T_n\|_m \le 1,\ \|T_n\|_\Sigma \le 1,\ \|T_n\|_\sigma \le 1.$$

このとき、j=0,1,2 に対して、

$$\max\{\|T_n x^j - x^j\|_M, \|T_n x^j - x^j\|_m, \|T_n x^j - x^j\|_\Sigma, \|T_n x^j - x^j\|_\sigma\} \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

ところが、$\|L_n x^3 - x^3\|_M \ge 3/4$ が示せるので、$\{T_n x^3\}_n$ は x^3 に $C_M^{(1)}([0,1])$ 上で収束しない。ノルム $\|\cdot\|_M$, $\|\cdot\|_m$, $\|\cdot\|_\Sigma$, $\|\cdot\|_\sigma$ はすべて同値であるから、$C_m^{(1)}([0,1])$, $C_\Sigma^{(1)}([0,1])$, $C_\sigma^{(1)}([0,1])$ 上でも $\{T_n x^3\}_n$ は x^3 に収束しない。結局 $C_M^{(1)}([0,1])$, $C_m^{(1)}([0,1])$, $C_\Sigma^{(1)}([0,1])$, および $C_\sigma^{(1)}([0,1])$ 上で $\{1, x, x^2\}$ に対してコロフキン定理は成立しない。証明終。

定理 5 で試験関数族 $\{1, x, x^2, x^3\}$ を 2 次関数まで下げることが出来ないことを定理 6 は示している。しかし、c-ノルムでは次の定理 8 が成り立つ。

定理 8 を証明するために次の補題 7([24,Theorem1.2]) を必要とする。

補題 7. X をバナッハ空間、S を X の閉線形部分空間とする。共役空間 X^* の閉単位球の w*-閉部分集合 E で次の条件 a), b) を満たすものが存在するとする。

a) $\|h\| = \sup_{\varphi\in E} |\varphi(h)| \quad (\forall h \in X)$,

b) $\varphi \in E$ と $\psi \in X^*$ ($\|\psi\| \le 1$) が S 上で $\varphi = \psi$ なら、$\varphi = \psi$ である。

このとき、$\{T_n\}_n$ が X 上の縮小作用素列で、すべての $h \in S$ に対して $\|T_n h - h\| \to 0$ なら、$\|T_n f - f\| \to 0$ $(\forall f \in X)$ である。

定理 8. 試験関数族 $\{1, x, x^2\}$ に対して、$C_c^{(1)}([0,1])$ 上でコロフキン定理が成り立つ。

証明の概略. ノルム $\|\cdot\|_c$ は次のように書き換えることが出来る。

$$\|f\|_c = \max\{\|f + f'\|_\infty, \|f - f'\|_\infty\} \quad (f \in C_c^{(1)}([0,1])).$$

ゆえに、対応

$$C_c^{(1)}([0,1]) \ni f \to (f + f', f - f') \in C([0,1]) \oplus_{l^\infty} C([0,1])$$

は等距離線形である。 $x \in [0,1]$ に対して、

$$\delta_x f = f(x),\ \delta'_x f = f'(x),\ \ (f \in C_c^{(1)}([0,1]))$$

とおくと、$\delta_x+\delta'_x$ と $\delta_x-\delta'_x$ は $C_c^{(1)}([0,1])$ 上の有界線形汎関数で、$\|\delta_x\pm\delta'_x\|\le 1$ である。

定理 8 を証明するために、補題 7 を用いる。S を $1,x,x^2$ の線形包とし、

$$E=\{\delta_x+\delta'_x,\ \delta_x-\delta'_x\ ;\ x\in[0,1]\}$$

とおくと、E は $C_c^{(1)}([0,1])$ の共役空間 $(C_c^{(1)}([0,1]))^*$ の閉単位球の w*-閉部分集合となる。 このとき、

$$\|f\|_c=\max\left\{\max_{0\le x\le 1}|(\delta_x+\delta'_x)f|,\ \max_{0\le x\le 1}|(\delta_x-\delta'_x)f|\right\}=\max_{\varphi\in E}|\varphi(f)|\ (\forall f\in C_c^{(1)}([0,1])).$$

すなわち、補題の条件 a) が満たされる。

次に、補題の条件 b) が成り立つことを示す。

$x_0\in[0,1]$ に対して、ψ^+ と ψ^- を $C_c^{(1)}([0,1])$ 上の有界線形汎関数で

$$\|\psi^+\|\le 1,\ \|\psi^-\|\le 1$$

$$\psi^+(h)=(\delta_{x_0}+\delta'_{x_0})(h),\quad \psi^-(h)=(\delta_{x_0}-\delta'_{x_0})(h)\quad (\forall h\in S)$$

とする。

ψ^+ と ψ^- はハーン・バナッハ の拡張定理によって、$C([0,1])\oplus_{l^\infty}C([0,1])=C([0,1]\cup[0,1])$ へノルムを変えないで拡張できるので、[0, 1] 上の有界ボレル測度 μ^+, ν^+, μ^-, ν^- を用いて $\|\mu^+\|+\|\nu^+\|\le 1$, $\|\mu^-\|+\|\nu^-\|\le 1$,

$$\psi^+(g)=\int_{[0,1]}(g+g')\,d\mu^++\int_{[0,1]}(g-g')\,d\nu^+\ \text{ for } g\in C_c^1([0,1]),$$

$$\psi^-(g)=\int_{[0,1]}(g+g')\,d\mu^-+\int_{[0,1]}(g-g')\,d\nu^-\ \text{ for } g\in C_c^1([0,1])$$

と表示できる。このとき、補題の条件 b) を示すためには、次の I., II. を示せばよい。

I. $\mu^+=\delta_{x_0}$ かつ $\nu^+=0$.

II. $\mu^-=0$ かつ $\nu^-=\delta_{x_0}$.

I. の証明　まず、

$$\mu^+\ge 0,\ \nu^+\ge 0 \text{ かつ } \|\mu^+\|+\|\nu^+\|=1.$$

が示せる。次に、

$$f(x)=-\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{5}(1+x_0)x+\frac{1}{5}(3-2x_0-x_0^2).$$

とおくと、

$$f+f'=-\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{5}x_0x+1-\frac{1}{5}x_0^2,$$

$$f-f'=-\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{5}(2+x_0)x+\frac{1}{5}(1-4x_0-x_0^2).$$

したがって、

$$(f+f')(x_0)=1,\ \|f+f'\|_\infty=1,\ \ \|f-f'\|_\infty<1.$$

$|(f+f')(x)|=1$ となるのは $x=x_0$ のときに限る事に注意すると、$\operatorname{supp}\mu^+=\{x_0\}$. $\|\mu^+\|=1$ だから、$\mu^+=\delta_{x_0}$ を得る。

II. の証明

$$g(x)=-\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{5}(x_0-1)x+\frac{1}{10}(8+2x_0-x_0^2)$$

とおく。このとき、$(g-g')(x_0)=1$, $\|g+g'\|_\infty<1$, $\|g-g'\|_\infty=1$. さらに、$|(g-g')(x)|=1$ となるのは $x=x_0$ のときに限る。I. の証明と同様にして、 $\mu^-=0$, $\nu^-=\delta_{x_0}$を得る。証明終。

$C([0,1])$ 上では $\{1,x^2,x^3,\dots\}$ に対してコロフキン定理が成り立つことが知られている。ところが、$C_M^{(1)}([0,1])$, $C_m^{(1)}([0,1])$, $C_\Sigma^{(1)}([0,1])$, $C_\sigma^{(1)}([0,1])$, および $C_c^{(1)}([0,1])$ 上では次に示すように、$\{1,x^2,x^3,\dots\}$ に対してコロフキン定理は成り立たない。

命題 9. $C_M^{(1)}([0,1])$, $C_m^{(1)}([0,1])$, $C_\Sigma^{(1)}([0,1])$, $C_\sigma^{(1)}([0,1])$, および $C_c^{(1)}([0,1])$ 上では、$\{1,x^2,x^3,\dots\}$ に対してコロフキン定理は成り立たない。

証明. $n=0,1,2,\cdots,$ に対して、

$$\varphi_n(x)=x^{1+1/n},\qquad T_nf=\frac{n}{n+1}f\circ\varphi_n\quad(\forall f\in C^{(1)}([0,1]))$$

とおく。このとき、

$$\|T_n\|_M\le 1,\ \|T_n\|_m\le 1,\ \|T_n\|_\Sigma\le 1,\ \|T_n\|_\sigma\le 1,\ \ \|T_n\|_c\le 1.$$

さらに、$j=0,2,3,\dots$ に対して、

$$\|T_nx^j-x^j\|_\Sigma\to 0,\ \ \|T_nx^j-x^j\|_M\ge\left\|\left(\frac{n}{n+1}x^{1+1/n}-x\right)'\right\|_\infty=1$$

である。ところが、M,m,Σ,σ,c ノルムはすべて同値であるから命題が示せる。

3. まとめ

定理 5, 6 より、M,m ノルムの場合、$\{1,x,x^2,x^3\}$ に対してコロフキン定理が成立し、M,m,Σ,σ の場合、$\{1,x,x^2\}$ に対しては成立しないことがわかった。それでは、Σ,σ の

場合、$\{1, x, x^2, x^3\}$ に対してコロフキン定理が成立するか。この場合、定理 5 の方法はうまくいかない。ところが、Σ ノルムは次のように書き換えることが出来る。

$$\|f\|_\Sigma = \sup\{\,|f(x) + f'(y)|,\ |f(x) - f'(y)|\,;\, 0 \leq x, y \leq 1\}$$

したがって、対応 $f \longleftrightarrow (f(x) + f'(y), f(x) - f'(y))$ により $C^{(1)}_\Sigma([0,1])$ は $C([0,1] \times [0,1]) \oplus_{l^\infty} C([0,1] \times [0,1]) = C([0,1] \times [0,1] \cup [0,1] \times [0,1])$ の閉線形部分空間に等距離同型である。したがって、補題 7 を用いようとすると定理 8 の証明におけるような条件を満たす 2 変数 3 次関数を見つけることになるが、これは簡単でないように思われる。

次に、定理 8 より c ノルムの場合、$\{1, x\}$ に対してコロフキン定理が成立するか？成立しないように思われるが証明できていない。$C([0,1])$ では 2 個の試験関数族に対しては、コロフキン定理が成り立たないことが知られている ([15,16])。

定理 6 で M, m, Σ, σ の場合、$S = \{1, x, x^2\}$ に対してコロフキン定理が成り立たないことを、$x^3 \notin Kor^1(S)$ を示すことにより証明した。それでは、$Kor^1(S)$ は各ノルムの場合に、それぞれどの程度の大きさになるか？ $Kor^1(S)$ を決定できるか？

我々は、最初の Korovkin 近似定理が $C^{(1)}([0,1])$ ではどうなるかを問題にしたので、試験関数族 $\{1, x, x^2, x^3\}$ を中心に取り上げ、証明も直接的に与えた。しかし、任意の $S \subset C^{(1)}([0,1])$ に対して、コロフキン定理が成り立つ条件または $Kor^1(S)$ の特徴付けも興味ある問題である。

可微分関数空間上でコロフキン定理を論じている論文の多くは、$C^{(k)}$-級関数空間を扱っている。しかし、$C^{(k)}([0,1])$ で考えると形式的な煩雑さがでてくる。定理 5 をこの形に述べると、次のようになる。

定理 5'. $C^{(k)}([0,1]) \ni f$ に対して、$\|f\|_M = \max\{\,\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|f''\|_\infty, \cdots, \|f^{(k)}\|_\infty\}$ とすると、$C^{(k)}_M([0,1])$ では $\{1, x, x^2, \cdots, x^{k+2}\}$ に対してコロフキン定理が成り立つ。

参考文献

[1] Altomare, F. & Boccaccio, C., On Korovkin-type Theorems in Spaces of Continuous Complex-valued Functions, Boll. Un.Mat.Ital. **6:1-B**,(1982), 75-86.

[2] Altomare, F. & Campiti, M., Korovkin-Type Approximation Theory and its Applications, de Gruyter, Berlin and New York.1994.

[3] Altomare, F. & Rosa, I.,Approximation by Positive Operators in the Space $C^{(p)}([a,b])$, Anal. Numér. Théor. Approx. **18**(1989), 1-11.

[4] Anastassiou, G.A., A discrete Korovkin Theorem, J. Approx.Theory **45** (1985), 383-388.

[5] Badea, C., On a Korovkin-type Theorem for simultaneous Approximation, J. Approx. Theory **62** (1990), 223-234.

[6] Badea, C., Badea, I. & Cottin, C., A Korovkin-type Theorem for Generalizations of Boolean sum Operators and Approximation by trigonometric Pseudopolynomials, Anal.Numer.Theor.Approx.,**17** (1988), 7-17.

[7] Badea, C. & Cottin, C., Korovkin-type Theorems for generalized Boolean sum Operators, Approximation theory (Kecskemet, 1990), 51-68. Colloq.Math.Soc.Janos Bolyai, 58, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[8] Berens, H & Lorentz, G.G., Geometric Theory of Korovkin sets, J. Approx. Theory **15** (1975), 161-189.

[9] Brosowski, B., A Korovkin-type Theorem for Differentiable Functions, Approximation Theory III, ed. E. W. Cheney, Academic Press, 1980, 255-260.

[10] Efendiev, R. O., Conditions for Convergence of linear Operators to Derivatives, Akad.Nauk Azerbaidzhan. SSSR Dokl. **40**(1984), 3-4.[in Russian]

[11] Hirasawa,G., Izuchi, K., & Watanabe, S., Korovkin Type Approximation Theorems on the Space of Continuously Differentiable Functions, Approx.Theory and its Appl. **16**(2000), 19-27.

[12] Izuchi, K., Takagi, H. & Watanabe, S., Sequential BKW-operators and Function Algebras, J. Approx. Theory **85**(1996), 185-200.

[13] Knoop, H.B. & Pottinger, P., Ein Satz vom Korovkin-Typ für C^k-Räume, Math. Z. **148**(1976), 23-32.

[14] Knoop, H.B. & Pottinger, P., On simultaneous Approximation by certain linear positive Operators, Arch.Math.(Basel) **48**(1987), 511-520.

[15] Korovkin, P.P., On Convergence of Linear Opereators in the Space of Continuous Functions, Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N.S.) **90**(1953), 961-964. [In Russian]

[16] Korovkin, P. P., Linear Operators and Approximation Theory, Hindustan Publishing, Delhi,1960.

[17] Kudrjavcev, G. I., The Convergence of Sequences of Linear Operators to Derivatives, Proceedings of the central regional union of mathematical departments, No.1:Functional analysis and Function theory, 122-136. Kalinin.Gos.Ped.Inst., Kalinin, 1970. [In Russian]

[18] Kudrjavcev, G. I., Certain Questions on the Convergence of Sequences of linear Operators, A collection of articles on the constructive theory of functions and extremal problems of functional analysis, 77-86. Kalinin,Gos.Univ., Kalinin, 1972. [In Russian]

[19] Kudrjavcev, G. I., Convergence of the Derivatives of linear convex and smooth Operators, Application of functional analysis in approximation theory, **160** 61-65. Kalinin,Gos.Univ., Kalinin, 1979. [In Russian]

[20] Minkova, R. M., The Convergence of the Derivatives of linear Operators, C. R. Acad. Bulgare Sci. **23**(1970), 627-629.[in Russian]

[21] Sendov, B. I.& Popov, V., The Convergence of the Derivatives of positive linear Operators, C. R. Acad. Bulgare Sci. **22**(1969), 507-509.[in Russian]

[22] Šaškin, Y. A., On Convergence of Contraction Operators, Math. Cluj. **11** (1969), 355-360.

[23] Stadler, S., Uber 1-positive l ineare Operatoren, Linear operators and approximation, II(Proc.Conf.Math.Ress.Inst.,Oberwolfach,1974), 391-403.Internat.Ser.Numer. Math.,Vol.25. Birkhauser, Basel, 1974.

[24] Takahasi, S. -E., (T, E)-Korovkin Closures in Normed Spaces and BKW-operators, J. Approx. Theory **82**(1995), 340-351.

[25] Ustinov, G. M. & Vasil'čenko, A. A., Convergence of Operators in the Space of Differentiable Functions, Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. **10** (1977), 8-14. [in Russian]

[26] Vasil'čenko, A. A., Korovkin Systems in some Function Spaces, Studies in functional analysiss, 6-14. Ural.Gos. Univ.,Sverdlovsk, 1978. [in Russian]

[27] Wulbert, D. E., Convergence of Operators and Korovkin's Theorem, J. Approx. Theory **1**(1968), 381-390.