数理解析研究所講究録 1243 巻 2002 年 9-21

コロフキン型近似定理

新潟大・理　泉池敬司 (Keiji Izuchi)
Faculty of Science
Niigata University

§1. 序

１９５３年、コロフキン [19,20] は次の近似定理を証明した。

コロフキン近似定理. $C(I)$ を $I=[0,1]$ 上の実数値連続関数の空間とする。$\{T_n\}_n$ は $C(I)$ 上の正線形作用素で

(1.1) $$\|T_nx^j - x^j\|_\infty \to 0 \text{ for } j=0,1,2$$

とする。そのとき

(1.2) $$\|T_nf - f\|_\infty \to \infty \quad \forall f \in C(I).$$

この定理は正線形作用素列が $I=$ 恒等作用素に強収束することを示すためには、たった３つの関数で試験すれば良いというものである。この定理はなんともいえない不可思議さをもっており、この後、この種の定理は多くの研究者の興味を引き、研究対象を拡大させながら現在も研究が続けられている。

１９６８年 Wulbert [40] はコロフキンの定理の「正線形作用素列」の条件を

$$\|T_n\| \to 1 \text{ as } n \to \infty$$

に置き換えても (1.1) の条件のもとで (1.2) が成立することを示した。Wulbert の論文はコロフキン型近似定理の研究において、もっともすばらしいものの１つであると考えている。

ここで問題を設定し直すことにする。X を Banach 空間で $S \subset X$ とする。T を X 上の有界線形作用素とする。

定義 1.1. $\|T\|=1$ とする。T が $BKW(S)$-作用素であるとは、

$$\|T_\alpha h - Th\| \to 0 \text{ as } \alpha \to \infty \ (\forall h \in S),$$

$$\|T_\alpha\| \to \|T\| = 1 \text{ as } \alpha \to \infty$$

が成立する任意の作用素 net $\{T_\alpha\}_\alpha$ に対して

$$\|T_\alpha f - Tf\| \to 0 \text{ as } \alpha \to \infty \ (\forall f \in X),$$

が成立するときにいう。$BKW(S)$ で $BKW(S)$-作用素全体を表す。

S は試験関数空間と呼ばれる。この定義は高橋氏 [36] によって与えられたものである。B は Bohman、K は Korovkin、W は Wulbert の頭文字を取ったものである。Korovkin (Wulbert) の定理は恒等作用素 I は $BKW(\{1, x, x^2\})$-作用素であることをいっている。

理論上は net 型の定義の方が、Korovkin の定理を拡張する上で都合が良いが、sequence 型の研究も重要と思われる。

定義 1.2. $\|T\| = 1$ とする。T が s-$BKW(S)$-作用素であるとは、

$$\|T_n h - Th\| \to 0 \ \text{ as } n \to \infty \ (\forall h \in S),$$

$$\|T_n\| \to \|T\| = 1 \ \text{ as } n \to \infty$$

が成立する任意の作用素列 $\{T_n\}_n$ に対して

$$\|T_n f - Tf\| \to 0 \ \text{ as } n \to \infty \ (\forall f \in X),$$

が成立するときにいう。s-$BKW(S)$ で s-$BKW(S)$-作用素全体を表す。

s-BKW の s は sequential であることを意味している。次は定義より従う。

命題 1.3. (i) $BKW(S) \subset s\text{-}BKW(S)$.

(ii) $S_1 \subset S_2 \subset X$ ならば $BKW(S_1) \subset BKW(S_2)$, $s\text{-}BKW(S_1) \subset s\text{-}BKW(S_2)$.

(iii) $\tilde{S}$ を S より張られる閉部分空間とすると、$BKW(S) = BKW(\tilde{S})$, $s\text{-}BKW(S) = s\text{-}BKW(\tilde{S})$.

よって定義 1.1, 2 の S は閉部分空間と仮定しても良いことになる。S が separable のときは、$BKW(S) = s\text{-}BKW(S)$ である [16, Theorem 1]。ここで問題は 2 つに分かれてくる。Korovkin 本来の定理からすると

問題 1.4. 具体的な $T, \|T\| = 1,$ が与えられたとき、できるだけ小さな $S \subset X$ で $T \in BKW(S)$ 又は $T \in s\text{-}BKW(S)$ が成立する S を求めよ。

歴史的には $T = I$ のとき、上の問題に対する多くの研究結果がある、[1] を参照せよ。逆に

問題 1.5. $S \subset X$ が与えられたとき、$BKW(S)$ 又は $s\text{-}BKW(S)$ に入る作用素すべてを記述せよ。

これらの問題は Banach 空間 X および閉部分空間 $S \subset X$ の特性に非常に影響され、空間 X 知る上でも非常に興味ある問題である。

§2. $X = C(\Omega)$ **のとき。**

「1」　Ω を compact Hausdorff 空間とし、$C(\Omega)$ を Ω 上の複素数値連続関数の空間とする。S を X の閉部分空間とする。$BKW(S)$ のクラスの決定に関しては高橋氏の基本的な結果が知られている。$X_1^* = \{F \in X^*; \|F\| \le 1\}$ とする。

定義 2.1. $U_S(X_1^*) = \{F \in X_1^*;$ if $G \in X_1^*, F = G$ on S, then $F = G$ on $X\}$.

集合 $U_S(X_1^*)$ は S に対する uniqueness 集合と呼ばれる。ノルムを保存する Hahn-Banach 拡張が unique なものを集めたものであることに由来する。

定理 2.2 (高橋 [34, Theorem 2.1]). E を X^* の weak*-閉集合で

$$\|x\| = \sup\{|F(x)|; F \in E\}, \quad \forall x \in X$$

が成り立つと仮定する。$\|T\| = 1$ とする。

$$T^*(E) \subset U_S(X_1^*)$$

ならば $T \in BKW(S)$ である、ここで T^* は T の dual 作用素である。

$X = C(\Omega)$ のときは逆が成立する。$C(\Omega)^*$ は Riesz-Kakutani の表現定理より Ω 上の有界 Borel 測度の空間 $M(\Omega)$ と考えてよい。このとき、$E = \{\delta_x; x \in \Omega\}$ とすると定理 2.2 の条件を満たしている。$M_1(\Omega) = \{\mu \in M(\Omega); \|\mu\| \le 1\}$, $T^*(\Omega) = \{T^*\delta_x; x \in \Omega\}$ とする。$S \subset C(\Omega)$ に対する uniquness 集合は次のようになる。

$$U_S(M_1(\Omega)) = \{\mu \in M_1(\Omega); \text{if } \nu \in M_1(\Omega), \textstyle\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f d\nu \text{ for } f \in S, \text{ then } \mu = \nu\}.$$

定理 2.3 (高橋 [34, Theorem 1.4]). $X = C(\Omega)$ とする。$\|T\| = 1$ とする。$T \in BKW(S)$ である必要十分条件は $T^*(\Omega) \subset U_S(M_1(\Omega))$.

ここで

$$(Tf)(x) = (T^*\delta_x)(f) = \int_\Omega f dT^*\delta_x \tag{2.1}$$

である。よって $X = C(\Omega)$ のとき、$BKW(S)$ を記述するためには、定理 2.3 より $U_S(M_1(\Omega))$ を決定することが必要になる。しかし S が与えられたとき、$U_S(M_1(\Omega))$ が完全に記述できるかというと、その点についてはまだ不十分である。

補題 2.4 ([14, Lemma 1], [34, Lemma 2.1]). $\mu \in U_S(M_1(\Omega))$ ならば、$\|\mu\| = 1$, $-\mu \in U_S(M_1(\Omega))$ であり

$$1 = \sup\Big\{\Big|\int_\Omega f d\mu\Big|; f \in S, \|f\|_\infty = 1\Big\}.$$

この補題を用いると、特殊な場合には uniqueness 集合の特徴ずけが得られる。$I=[0,1]$ とし、

$$S_n = 1, x, x^2, \ldots, x^n \text{ で張られる部分空間}$$

とする。次が成立する。

定理 2.5 ([13, Theorem 1]).

$$U_{S_n}(M_1(I)) = \{\mu \in M_1(I); \|\mu\| = 1, \int_I f d\mu = 1 \text{ for some nonconstant } f \in S_n \\ \text{with } \|f\|_\infty = 1\}.$$

S_n は高々 n 次多項式であるから、nonconstant な $f \in S_n, \|f\|_\infty = 1$, に対して $\{x \in I; |f(x)| = 1\}$ の元の個数は高々 $n+1$ 個であり、定理 2.5 より $\mu \in U_{S_n}(M_1(I))$ は

$$\mu = \sum_{j=1}^{n+1} a_j \delta_{x_j}, \ \ x_j \in I, \ \ \sum_{j=1}^{n+1} |a_j| = 1$$

の形をしていることが分かる。よって (2.1) より、$T \in BKW(S_n)$ は

$$(Tf)(t) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j(t) f(x_j(t)), \ \ f \in C(I), \ \ t \in I \tag{2.2}$$

の形で表せる。しかし (2.2) の形の作用素はすべて $BKW(S_n)$ に入るとは限らない。特に正線形作用素に限定すれば次の定理が得られる。

定理 2.6 ([13, 23]). $T \geq 0, \|T\| = 1$ とする。$n = 2k$ 又は $2k+1$ とする。このとき、$T \in BKW(S_n)$ であるための必要十分条件は

$$(Tf)(t) = \sum_{j=0}^{k} a_j(t) f(x_j(t)), \ \ f \in C(I), \ \ t \in I,$$

ここで

(i) $\sum_{j=0}^{k} a_j(t) = 1, \ \ a_j(t) \geq 0 \ \forall j, t \in I$,

(ii) $x_j(t) \in I$、しかし $x_j(t)$ は連続である必要はない、

(iii) $n = 2k$ のとき、もし $x_i(t_0) = x_j(t_0)$ かつ $a_j(t_0) \neq 0$ なる t_0 があるならば、$0, 1 \in \{x_j(t_0); 0 \leq j \leq k\}$,

(iv) $n = 2k+1$ のとき、もし $x_i(t_0) = x_j(t_0)$ かつ $a_j(t_0) \neq 0$ なる t_0 があるならば、0 又は $1 \in \{x_j(t_0); 0 \leq j \leq k\}$,

(v) $\sum_{j=0}^{k} a_j(t) \delta_{x_j(t)}$ は weak*-連続 in t.

正作用素でない場合の表現は、$n=2$ のときは [14]、$n=3$ のときは [10] にあり、一般の場合は一応 [13] にある。しかし複雑であり、面白味も少ない。一般の $BKW(S_n)$ の表現を求めるのではなく、その中の特別な形をもつもの、たとえば $x_1(t), x_2(t)$ を連続関数で、$x_1(t) < x_2(t)\ \forall t \in I$, $x_i(I) \subset I$ とするとき、

$$(T_0 f)(f) = f(x_1(t)) - f(x_2(t)),\quad f \in C(I)$$

とする。T_0 がいつ $BKW(S_n)$ に入るかという問題が考えられる。そのような $x_1(t), x_2(t)$ は無数にあるから

$$G_n = \{(x_1(t), x_2(t)) \in I^2; T_0 \in BKW(S_n), t \in I\}$$

の集合を決定する問題でもある。定理 2.3, 5 を適用すると

$$G_n = \{(x,y) \in I^2; x < y, f(x) = 1 \text{ and } f(y) = -1 \text{ for some } f \in S_n,\ \|f\|_\infty = 1\}$$

を決定することである。この集合 G_n は $n=3,4$ のときは [10] で記述されている。

「2」　次に sequential の場合をみよう。$BKW(S) \subset s\text{-}BKW(S)$ であった。$BKW(S) \neq s\text{-}BKW(S)$ である場合があることを最初に指摘したのは、Scheffold であった。

定理 2.7 ([32]). Ω を Stonian 空間とし、x_0 を Ω の孤立点ではない点とする。$S = \{f \in C(\Omega); f(x_0) = 0\}$ とすると $I \notin BKW(S)$ かつ $I \in s\text{-}BKW(S)$ である。

上の条件を満たす Ω の典型的な例は $L^\infty[0,1]$ の極大イデアル空間である。上の S は $C(\Omega)$ のイデアルである。少し一般化して Γ を空でない Ω の閉部分集合とし、イデアル

$$S_0 = \{f \in C(\Omega); f = 0 \text{ on } \Gamma\}$$

について考える。このとき uniquness 集合は簡単に得られる。

命題 2.8 ([15]).

$$U_{S_0}(M_1(\Omega)) = \{\mu \in M_1(\Omega); \|\mu\| = 1, \mu_{|\Gamma} = 0\}.$$

扱う作用素は合成作用素にする。φ を $\Omega \to \Omega$ の連続写像とする。すると合成作用素

$$C_\varphi f = f \circ \varphi,\quad \forall f \in C(\Omega)$$

が得られる。$\varphi = \mathrm{id}$ のとき $C_\varphi = I$ である。

定理 2.9 ([15]). $X = C(\Omega)$ とする。$C_\varphi \in BKW(S_0)$ であるための必要十分条件は $\varphi^{-1}(\Gamma) = \emptyset$ である。

sequential の場合は少し複雑である。それを述べるために、次の定義をする。E を空でない Ω の閉集合とする。

定義 2.10 ([15]). E が quasi G_δ-集合であるとは

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \quad \text{and} \quad U_{n+1} \subset U_n$$

である Ω の開集合列 $\{U_n\}_n$ が存在するときにいう。

空でない閉 G_δ-集合は quasi G_δ-集合である。しかし逆は成立しない。

定理 2.15 ([15]). $X = C(\Omega)$ とする。$C_\varphi \in s\text{-}BKW(S_0)$ であるための必要十分条件は $\varphi^{-1}(\Gamma)$ が quasi G_δ-集合を含まない。

$L^\infty[0,1]$ の極大イデアル空間の各点は quasi G_δ-集合でないが、他にもそのような集合は数多く存在する。

§3. $X =$ 関数環のとき。

「1」　$X = A$ を関数環とする。∂A で A の Shilov 境界を表す。§2 の $X = C(\Omega)$ のときの結果が $X = A = A(\partial A)$ のときに成立するかという問題が生ずる。定理 2.3 は次の形になる。

定理 3.1 ([16, Theorem 2]). T を $X = A$ 上の線形作用素で、$\|T\| = 1$ とする。$S \subset A$ とする。$T \in BKW(S)$ である必要十分条件は $T^*(\partial A) \subset U_S(A_1^*)$.

D を単位開円板とし、$A(D)$ を disk 環とする。この上の Korovkin 型定理を考える上で、試験関数を

$$S_n = 1, z, z^2, \ldots, z^n \text{ で張られる部分空間}$$

とする。高橋氏 [33] は、φ が有限 Blaschke 積のとき、$C_\varphi \in BKW(S_1)$ となることを示した。2つの関数 ψ, φ に対して

$$(\psi C_\varphi)(f) = \psi \cdot (f \circ \varphi), \quad f \in A(D)$$

と定義する。

定理 3.2 ([16]). $X = A(D)$ とする。

$$BKW(S) = \{\psi C_\varphi; \psi, \varphi \text{ は有限 Blaschke 積}\}$$

定理 3.3 ([16]). $X = A(D)$ とする。$n \geq 2$ のとき、$BKW(\{1, z^n\}) = \emptyset$ である。

又高橋氏 [33, Theorem 1] は

$$\frac{a_1 C_{\varphi_1} + a_2 C_{\varphi_2}}{\|a_1 C_{\varphi_1} + a_2 C_{\varphi_2}\|} \in BKW(S_2), \quad \varphi_1, \varphi_2 \text{ 有限 Blaschke 積}$$

であることを示した。しかし $BKW(S_2)$ は上の形以外のものが存在し、かなり複雑である。まだ完全な記述はできていない [7]。個人的には $BKW(S_2)$ の決定は興味ある問題である。

C^n の領域で、試験関数が

$$S_n = \{1, z_1, z_2, \ldots, z_n\}$$

のときは、古典的空間の $BKW(S_n)$ を決定することは可能である。

定理 3.4 ([17]). $X = A(D^n)$ polydisk 環とし、$\|T\| = 1$ とする。$T \in BKW(S_n)$ である必要十分条件は

$$(Tf)(z) = u(z) f(\Phi(z)), \quad z \in \overline{D}^n, \quad f \in A(D^n)$$

ここで u は inner 関数、Φ は D^n から D^n への inner 写像である。

定理 3.5 ([17]). $X = A(B_n)$ ball 環とし、$\|T\| = 1$ とする。$n \geq 2$ のとき、$T \in BKW(S_n)$ である必要十分条件は

$$(Tf)(z) = cf(\Phi(z)), \quad z \in \overline{B}_n, \quad f \in A(B_n),$$

ここで c は $|c| = 1$ である定数、Φ は B_n の automorphism

又は

$$(Tf)(z) = cf(\zeta_0), \quad z \in \overline{B}_n, \quad f \in A(B_n),$$

ここで $|c| = 1$, $\zeta_0 \in \partial B_n$.

「2」　$X = L^\infty(\partial D)$ について考えてみる。この空間は separable でないから、この空間において s-BKW を考えるのはそぐわないように思われる。しかし続ける。$C = C(\partial D)$ を ∂D 上の連続関数の空間とする。

命題 3.6 ([11]). $X = L^\infty(\partial D)$ とする。$I \notin s$-$BKW(C)$ である。

Korovkin の定理にある $\{1, x, x^2\}$ にあてはまる試験関数空間は L^∞ においては何になるか。Sarason [29] は次の空間を導入した：

$$QC = (H^\infty + C) \cap \overline{(H^\infty + C)}, \quad QA = QC \cap H^\infty.$$

ここで H^∞ は D 上 bounded analytic な関数全体である。QC 空間は H^∞, L^∞ の研究においては重要な役目を果たしてきた、[18, 参照]。QC 空間は考え方にもよるが L^∞ 空間に較

べてかなり小さな空間とも考えられる。QC 関数は $M(L^\infty)$ の極大イデアル空間 $M(L^\infty)$ の点を分離しないから、定理 2.3 より $I \notin BKW(QC)$ である。[18] の結果の応用として次を示すことができる。

定理 3.7 ([11]). $X = L^\infty(\partial D)$ とする。$I \in s\text{-}BKW(QC)$ である。

これにより QC は $BKW \neq s\text{-}BKW$ となる例を与えている（§2 参照）。次は H^∞ 版である。

定理 3.8 ([11]). $X = H^\infty(\partial D)$ とする。$I \in s\text{-}BKW(QA)$ である。

上記に関連して Lotz [21]（[12] 参照）は次の定理を示している。

定理 3.9. $\{T_n\}_n$ を L^∞ 上の線形作用素の列で、$\|T_n\| \to 1$ とする。

$$\|T_n f - f\|_\infty \to 0 \;\; \forall f \in L^\infty$$

ならば $\|T_n - I\| \to 0$ である。

定理 3.8, 9 より次を得ることができる。

定理 3.10 ([12]). $\{T_n\}_n$ を H^∞ 上の線形作用素の列で、$\|T_n\| \to 1$ とする。

$$\|T_n f - f\|_\infty \to 0 \;\; \forall f \in QA$$

ならば $\|T_n - I\| \to 0$ である。つまり $I \in s\text{-}BKW(QA)$ である。この応用として次が得られる。

定理 3.11 ([12]). $\{T_n\}_n$ を H^∞ 上の線形作用素の列で、$\|T_n\| \to 1$ とする。

$$\|T_n f - f\|_\infty \to 0 \;\; \forall f \in H^\infty$$

ならば $\|T_n - I\| \to 0$ である。

簡単にいうと、$\{T_n\}_n$ が I に強収束するならノルム収束する。正確さに少し欠けるが、$I = C_z$ は合成作用素の空間でノルム位相で孤立点であるが、強収束位相でもそうであることをいっている。定理 3.10 に関連して次の問題が生ずる。

問題 3.12. $X = H^\infty(D)$ とする。φ を D の self analytic map とするとき、いつ $C_\varphi \in s\text{-}BKW(QA)$ であるか。

最近 [9, 22] で $H^\infty(D)$ の合成作用素の空間のノルム位相による連結成分が決定されている。作用素論の立場から見ると強収束位相の連結成分を決定することは興味ある問題である。上記の問題はそれに対する橋渡しの役目をすると考えている。

定理 3.11 の $H^\infty(D)$ の場合の結果は $H^\infty(B_n), H^\infty(D^n)$ の時に成立するかは分からない。D のときは定理 3.10 にある QA 関数を経由して得られるが、多変数のときにはその役目を果たす関数空間が分からないからである。

§4. 関連する話題。

「1」　X を Banach 空間で、S を X の部分空間とする。X 上の次を満たす線形作用素 P は S への projection と呼ばれる：

$$P(X) \subset S, \quad P(f) = f \ \forall f \in S.$$

projection をもつような S の決定されているのかについては私には不明である。

命題 4.1 ([40]). $I \in s\text{-}BKW(S)$ ならば S はノルム 1 の projection をもたない。

もう少し条件を弱める。次を満たす線形作用素 Q は S への weak projection と呼ばれる:

$$Q(f) = f, \ \forall f \in S, \ Q \neq I.$$

projection は weak projection である。

命題 4.2. $I \in s\text{-}BKW(S)$ ならば S はノルム 1 の weak projection をもたない。

このように weak projection をもつかもたないかは、恒等作用素 I が $s\text{-}BKW(S)$ に含まれるかどうかが関係している。S がノルム 1 の weak projection をもつなら $I \notin s\text{-}BKW(S)$ である。ノルム 1 の weak projection をもつ S について [4] で調べられている。

$X = C(\Omega)$ とする。S を $C(\Omega)$ の C^*-部分環で $1 \in S$ とする。$x \in \Omega$ に対して

$$E(x) = \{y \in \Omega; f(y) = f(x) \ \forall f \in S\}$$

と定義する。$\{E(x); x \in \Omega\}$ は S による Shilov decomposition である。

命題 4.3 ([4]). 次を満たす空でない Ω の開集合 U と連続写像 $\varphi : U \to \Omega$ の存在を仮定する。

(i) $\varphi(x) \in E(x), \ x \in U,$

(ii) $\varphi(x) \neq x \quad$ for $x \in U.$

そのとき、S はノルム 1 の weak projection をもつ。

この命題の逆が成立すると予想しているが、未解決である。部分的な結果としては、

$$E(x) \text{ が可算集合、} \quad \forall x \in \Omega$$

が成り立つときは、逆が成立する [4]。

「2」　Banach 空間 X が与えられているとする。X に同値なノルムはいろいろ導入することができる。ノルムによって BKW-空間は変わるであろうか。その点について述べる。$C^{(1)}(I)$ を I 上の一階連続微分可能な実数値関数の空間とする。$C^{(1)}(I)$ に次のノルムを導入したものを $C^{(1)}_M(I)$, $C^{(1)}_\Sigma(I)$, $C^{(1)}_c(I)$ で表すことにする。

$$\|f\|_M = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\},$$

$$\|f\|_\Sigma = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

$$\|f\|_c = \||f(t)| + |f'(t)|\|_\infty.$$

するとそれらは $C^{(1)}(I)$ と同型な Banach 空間となる。

定理 4.4 ([6]). i) $X = C^{(1)}_M(I)$ のとき、$I \in BKW(S_3)$ かつ $I \notin BKW(S_2)$.

(ii) $X = C^{(1)}_\Sigma(I)$ のとき、$I \notin BKW(S_2)$、しかし $I \in BKW(S_3)$ ？

iii) $X = C^{(1)}_c(I)$ のとき、$I \in BKW(S_2)$、しかし $I \notin BKW(S_1)$ ？

このようにノルムの入れ方で BKW 空間は変わってくる。

「1」で述べたことに関係して、$X = C^{(1)}_M(I)$ とするとき、$I \in BKW(S_3)$ であるから $C^{(1)}_M(I)$ から S_3 への weak projection は存在しない。よって $S_3 \subset E \subset M^{(1)}_M(I)$ なる閉部分空間 E へもない。では S_2, S_1 についてはどうであろうか。まだ分かっていない。他の空間に対しても同じである。

「3」　Wulbert は [40] で $X = L^1[0,1], S = \{1, \cos x, \sin x\}$ に対して $I \in BKW(S)$ を示している。$H^1(\partial D)$ を Hardy 空間とする。Korovkin の定理の解析関数版は多くは知られていないが、次は非常に興味ある問題である。

問題 4.5. $X = H^1(\partial D)$ とする。$I \in BKW(\{1, z, z^2\})$ ？

$L^{1*} = L^\infty$ であるが、$H^{1*} = L^\infty/zH^\infty$ である。Wulbert は L^∞ の unit ball の端点の性質を巧く取り出して証明をしているが、L^∞/zH^∞ の unit ball の端点は前者に較べると複雑であり、上の問題の解決のためには何か新しいアイデアが必要のように思われる。

参 考 文 献

1. F. Altomare and M. Campiti, Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications (1994), de Gruyter, Berlin and New York.
2. F. Altomare and I. Rosa, Approximation by positive operators in the space $C^{(p)}([a, b])$, Anal. Numér. Théor. Approx. **18**(1989), 1–11.

3. H. Berens and G. G. Lorentz, Geometric theory of Korovkin sets, J. Approx. Theory **15** (1975), 161–189.
4. S. Canoy, Jr., G. Hirasawa and K. Izuchi, Weak projections on unital commutative C^*-algebras. Nihonkai Math. J. **10** (1999), no. 2, 157–164.
5. J. Garnett, Bounded Analytic Function, Academic Press, 1981.
6. G. Hirasawa, K. Izuchi and S. Watanabe, Korovkin type approximation theorems on the space of continuously differentiable functions. Approx. Theory Appl. (N.S.) **16** (2000), no. 2, 19–27.
7. G. Hirasawa, K. Izuchi and K. Kasuga, Korovkin type approximation theorems on the disk algebra. Hokkaido Math. J. **29** (2000), no. 1, 103–117.
8. K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice Hall, 1962.
9. T. Hosokawa, K. Izuch, and D. Zheng, Isolated points and essential components of composition operators on H^∞, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.
10. T. Ishii and K. Izuchi BKW-operators for Chebyshev systems. Tokyo J. Math. **22** (1999), no. 2, 375–389.
11. K. Izuchi, A sequential type Korovkin theorem on L^∞ for QC-test functions. Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 4, 1153–1159.
12. K. Izuchi, Sequences of operators on L^∞ which converge strongly to the identity operator, unpublished, 1997.
13. K. Izuchi and S. Takahasi, BKW-operators on the interval $[0,1]$. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **46** (1997), no. 3, 477–489.
14. K. Izuchi and S. Takahasi, BKW-operators on the interval and the sequence spaces. J. Approx. Theory **87** (1996), no. 2, 159–169.
15. K. Izuchi, H. Takagi and S. Watanabe, Sequential Korovkin type theorems and weighted composition operators. Acta Sci. Math. (Szeged) **62** (1996), no. 1-2, 161–174.
16. K. Izuchi, H. Takagi and S. Watanabe, Sequential BKW-operators and function algebras. J. Approx. Theory **85** (1996), no. 2, 185–200.
17. K. Izuchi, Y. Matsugu and H. Takagi, BKW-operators on the polydisc and ball algebras. Far East J. Math. Sci. **3** (1995), no. 1, 9–22.
18. K. Izuchi, Countably generated Douglas algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **299** (1987), 177–192.
19. P. P. Korovkin, On convergence of linear opereators in the space of continuous functions, Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N.S.) **90**(1953), 961-964. [In Russian]

20. P. P. Korovkin, Linear Operators and Approximation Theory (1960), Hindustan Publishing, Delhi.

21. H. P. Lotz, Uniform convergence of operators on L^∞ and similar spaces, Math. Z. **190** (1985), 207–220.

22. B. MacCluer, S. Ohno, and R. Zhao, Topological structure of the space of composition operators on H^∞, Integral Eq. Op. Th. **40** (2001), 481–494.

23. C. Miccehelli, Chebychev subspaces and convergence of positive linear operators, Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973), 448–452.

24. T. Nishishiraho, Korovkin sets and mean ergodic theorems. J. Convex Anal. **5** (1998), no. 1, 147–151.

25. T. Nishishiraho, Korovkin type approximation closures for vector-valued functions. Ryukyu Math. J. **9** (1996), 53–69.

26. T. Nishishiraho, Approximation of the Korovkin type for vector-valued functions. Ryukyu Math. J. **7** (1994), 65–81.

27. S. Romanelli, Universal Korovkin closures with respect to linear operators on commutative Banach algebras. Math. Japon. **37** (1992), no. 3, 427–443.

28. W. Roth, A Korovkin type theorem for weighted spaces of continuous functions. Bull. Austral. Math. Soc. **55** (1997), no. 2, 239–248.

29. D. Sarason, Functions of vanishing mean oscillation, Trans. Amer. Math. Soc. **207** (1975), 391–405.

30. R. Sato, A counterexample to a discrete Korovkin theorem. J. Approx. Theory **64** (1991), no. 2, 235–237.

31. R. Sato and S. Takahasi, A discrete Korovkin theorem and BKW-operators. J. Approx. Theory **84** (1996), no. 3, 351–366.

32. E. Schefford, Über die punktweise Kornvergenz von Operatoren in $C(X)$, Rev.Acad. Ci, Zaragoza, **28** (1973), 5-12.

33. S. Takahasi, Bohman-Korovkin-Wulbert operators from a function space into a commutative C^*-algebra for special test functions. Tohoku Math. J. (2) **48** (1996), no. 1, 139–148.

34. S. Takahasi, (T, E)-Korovkin closures in normed spaces and BKW-operators. J. Approx. Theory **82** (1995), no. 3, 340–351.

35. S. Takahasi, BKW-operators on function spaces. Proceedings of the Second International Conference in Functional Analysis and Approximation Theory (Acquafredda di Maratea, 1992). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. **33** (1993), 479–488.

36. S. Takahasi, Bohman-Korovkin-Wulbert operators on normed spaces. J. Approx. Theory **72** (1993), no. 2, 174–184.

37. S. Takahasi, Korovkin type theorem on $C[0,1]$. Approximation, optimization and computing, 189–192, North-Holland, Amsterdam, 1990.
38. S. Takahasi, Bohman-Korovkin-Wulbert operators on $C[0,1]$ for $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Nihonkai Math. J. **1** (1990), no. 2, 155–159.
39. M. Uchiyama, Korovkin-type theorems for Schwarz maps and operator monotone functions in C^*-algebras. Math. Z. **230** (1999), no. 4, 785–797.
40. D. E. Wulbert, Convergence of operators and Korovkin's theorem, J. Approx. Theory **1**(1968), 381-390.
41. 泉池敬司、L^∞ の恒等作用素近似、数理解析研究所講究録, **979** (1997), 50–56.
42. 高橋眞映、Korovkin type approximation theorems I、数理解析研究所講究録, **946** (1996), 1–9.
43. 泉池敬司、Korovkin type approximation theorems II、数理解析研究所講究録, **946** (1996), 10–17.
44. 高橋眞映、Korovkin 型近似定理と線形作用素、集中講義ノート、新潟大学, 1994.