

KOROVKIN TYPE APPROXIMATION THEOREMS ON THE DISK ALGEBRA

新潟大学大学院 自然科学研究科 春日一浩 (Kazuhiro Kasuga)

Graduate School of Science and Technology, Niigata University

1. 円板環上の BKW-作用素

Γ を複素平面の単位円周とする。 $A(\Gamma)$ を Γ 上の複素数値連続関数で開円板 $D = \{|z| < 1\}$ へ正則に拡張される関数の全体とする。 $A(\Gamma)$ を円板環という。

高橋 ([4]) は、Korovkin 近似定理を一般化するため Bohman-Korovkin-Wulbert 作用素 (簡単に BKW-作用素 という) の概念を導入した。

定義 X を separable complex Banach space とし S を X の部分集合とする。 X 上の有界線形作用素 T が test functions S についての BKW-作用素と呼ばれるのは次が成り立つ時に言う。 $\{T_n\}_n$ を次の (i) (ii) を満たす X 上の有界線形作用素の列とする。

(i) すべての n に対して $\|T_n\| \leq \|T\|$ 。

(ii) すべての $h \in S$ に対して $\|T_n h - T h\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。

この時すべての $f \in X$ に対して $\|T_n f - T f\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。

我々は円板環上の BKW-作用素 について考察する。 $S_n = \{1, z, z^2, \dots, z^n\}$ とおく。この時次が成り立つ。

定理 1 ([2]) T を $A(\Gamma)$ 上の有界作用素で $\|T\| = 1$ かつ $T1 = 1$ とする。この時 T が test functions S_n についての BKW-作用素であるための必要十分条件は T が次のように表せることである。すなわち

$$(Tf)(\zeta) = \sum_{j=1}^n a_j(\zeta) (C_{\varphi_j} f)(\zeta) \quad (\zeta \in \Gamma, f \in A(\Gamma)),$$

ここで Γ 上 $|\varphi_j| = 1$, すべての j に対して $a_j(\zeta) \geq 0$, $\sum_{j=1}^n a_j(\zeta) = 1$ ($\zeta \in \Gamma$)。

さて $\{z_j\}_{j=1}^n \subset D$ に対して

$$b(z) = \lambda \prod_{j=1}^n \frac{-\bar{z}_j}{|z_j|} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}, \quad z \in \bar{D}$$

とする。ここで λ は $|\lambda| = 1$ を満たす定数である。こういうタイプの関数 $b(z)$ を finite Blaschke products という。 Γ 上で $|b| = 1$ である。また絶対値 1 の定数関数も finite Blaschke product という。

2. $\{1, z\}$ についての 円板環上の BKW-作用素

$S_1 = \{1, z\}$ についての $A(\Gamma)$ 上の BKW-作用素について考える。次の定理が成り立つ。

定理 2 ([3]) T が $\|T\| = 1$ を満たす $A(\Gamma)$ 上の有界線形作用素とする。この時 T が $\{1, z\}$ についての BKW-作用素であるための必要十分条件は $T = \psi C_\varphi$ と表せることである。ここで ψ, φ は finite Blaschke products である。

3. $\{1, z, z^2\}$ についての円板環上の BKW-作用素

T を test functions $S_2 = \{1, z, z^2\}$ についての $A(\Gamma)$ 上の BKW-作用素で $\|T\| = 1$ かつ $T1 = 1$ を満たすものとする。定理 1 より T は次のように表せる。

$$(Tf)(\zeta) = a(\zeta)(C_\varphi f)(\zeta) + b(\zeta)(C_\psi f)(\zeta) \quad (\zeta \in \Gamma, f \in A(\Gamma)),$$

ここで

$$|\varphi(\zeta)| = |\psi(\zeta)| = 1, \quad a(\zeta) + b(\zeta) = 1, \quad a(\zeta), b(\zeta) \geq 0 \quad (\zeta \in \Gamma).$$

注意 a, b, φ, ψ は Γ 上で連続とは限らない。([3] 参照)。

特に次の形を持つ BKW-作用素を考える。

$$(\#) \quad T = (C_\varphi + C_\psi)/2, \quad \Gamma \text{ 上で } |\varphi| = 1 \text{ かつ } |\psi| = 1.$$

この場合、 $T1 = 1$ かつ $\|T\| = 1$ 。

次の補題は BKW-作用素の定義から導かれる。

補題 1 $1 \in S \subset A(\Gamma)$ とする。 T を $\|T\| = 1$ を満たす S についての $A(\Gamma)$ 上の BKW-作用素とする。 T_1 を $\|T_1\| \leq 1$ を満たす $A(\Gamma)$ 上の有界線形作用素とする。 $h \in S$ に関して $Th = T_1h$ ならば $T = T_1$ である。

関数 $h \in A(\Gamma)$, $h \neq 0$ に対して $(h/\bar{h})(\zeta) = h(\zeta)/\overline{h(\zeta)}$ がほとんどすべての点 $\zeta \in \Gamma$ に対して定義できる。 h/\bar{h} が Γ 上連続的に拡張される時 h/\bar{h} は拡張された関数とみなす。次の定理が成り立つ。

定理 3 ([2]) T を $A(\Gamma)$ 上の有界線形作用素で $\|T\| = 1$ かつ $T1 = 1$ を満たすものとする。 $Tz = h$, $Tz^2 = g$ とおく。このとき次が成り立つ。

i) $h \neq 0$ ならば T が (#) を満たす $\{1, z, z^2\}$ についての BKW-作用素 であるための必要十分条件は h/\bar{h} が finite Blaschke product かつ $h/\bar{h} = 2h^2 - g$ である。この場合、 $\varphi = h + \sqrt{g - h^2}$ で $\psi = h - \sqrt{g - h^2}$ である。ここで $\sqrt{g - h^2}$ は $g - h^2$ の root functions の一つである。

ii) $h = 0$ ならば T が (#) を満たす $\{1, z, z^2\}$ についての BKW-作用素 であるための必要十分条件は g が finite Blaschke product である。この場合、 $\varphi = \sqrt{g}$ で $\psi = -\sqrt{g}$ である。

証明 まず $h, g \in A$, $\|h\|_\infty \leq 1$ かつ $\|g\|_\infty \leq 1$ であることに注意する。 T が (#) の形を持つと仮定する。この時 $\varphi + \psi = 2h$ かつ $\varphi^2 + \psi^2 = 2g$ が成り立つ。 $(\varphi + \psi)^2 = \varphi^2 + \psi^2 + 2\varphi\psi$ だから

$$2h^2 - g = \varphi\psi \tag{1}$$

である。 $h, g \in A$ だから $\varphi\psi \in A$ である。 Γ 上で $|\varphi\psi| = 1$ だから $\varphi\psi$ は finite Blaschke product である。 $h \neq 0$ である時、(1) より $h/\bar{h} = (\varphi + \psi)/(\bar{\varphi} + \bar{\psi}) = \varphi\psi = 2h^2 - g$ 。 $h = 0$ の時、 $g = -\varphi\psi$ かつ g は finite Blaschke product である。

次に逆を示す。 $h \neq 0$ と仮定する。

$$b = h/\bar{h} = 2h^2 - g \quad (2)$$

とおく。この時、仮定より b は finite Blaschke product である。

$$b = h^2/|h|^2 \quad (3)$$

だから、(2) より

$$g - h^2 = h^2 - b = (-b)(1 - |h|^2) \quad (4)$$

が成り立つ。一つの root function $\sqrt{g - h^2}$ をとり

$$\varphi = h + \sqrt{g - h^2}, \quad \text{かつ} \quad \psi = h - \sqrt{g - h^2} \quad (5)$$

とおく。この時

$$(\varphi + \psi)/2 = h \in A(\Gamma) \quad \text{かつ} \quad \varphi\psi = 2h^2 - g \in A(\Gamma) \quad (6)$$

が成り立つ。(4) より

$$|h|^2 + \left| \sqrt{g - h^2} \right|^2 = 1 \quad (7)$$

$\zeta \in \Gamma$ とする。もし $h(\zeta) = 0$ ならば、(7) より $|(\sqrt{g - h^2})(\zeta)| = 1$ 、したがって $|\varphi(\zeta)| = |\psi(\zeta)| = 1$ 。もし $h(\zeta) \neq 0$ ならば (3),(4) より

$$(\sqrt{g - h^2})(\zeta) = ih(\zeta)\sqrt{1 - |h(\zeta)|^2}/|h(\zeta)|$$

$$(\sqrt{g-h^2})(\zeta) = -ih(\zeta)\sqrt{1-|h(\zeta)|^2}/|h(\zeta)|$$

が成り立つ。したがって、(5)より

$$\begin{aligned} |\varphi(\zeta)| &= \left| h(\zeta) + (\sqrt{g-h^2})(\zeta) \right| = \left| h(\zeta) \pm \frac{ih(\zeta)}{|h(\zeta)|} \sqrt{1-|h(\zeta)|^2} \right| \\ &= \left| |h(\zeta)| \pm i\sqrt{1-|h(\zeta)|^2} \right| = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。同様にしてすべての $\zeta \in \Gamma$ に対して $|\psi(\zeta)| = 1$ が成り立つ。ゆえに

$$\Gamma \text{ 上で } |\varphi| = |\psi| = 1. \quad (8)$$

$f \in A(\Gamma)$ に対して

$$T_0 f = \frac{1}{2}(C_\varphi + C_\psi)f \quad (9)$$

とおく。この時(5)より

$$T_0 1 = 1, \quad T_0 z = h \quad \text{かつ} \quad T_0 z^2 = g \quad (10)$$

が成り立つ。 $\varphi^n + \psi^n = (\varphi^{n-1} + \psi^{n-1})(\varphi + \psi) - \varphi\psi(\varphi^{n-2} + \psi^{n-2})$ だから(6)と帰納法により

$$\text{すべての非負な整数 } n \text{ に対して } T_0 z^n \in A(\Gamma) \quad (11)$$

が成り立つ。 $f \in A$ とする。この時、解析的な多項式の列 $\{p_k\}_k$ で $\|f - p_k\|_\infty \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) が存在する。この時(8)と(9)により $\|T_0 f - T_0 p_k\|_\infty \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)。 (11)より $T_0 p_k \in A(\Gamma)$ 。

したがって $f \in A(\Gamma)$ に対して $T_0 f \in A(\Gamma)$ が成り立つ。結果として T_0 は $A(\Gamma)$ 上の有界線形作用素で $\|T_0\| = 1$ かつ $T_0 1 = 1$ を満たす。定理 1 より T_0 は $\{1, z, z^2\}$ についての $A(\Gamma)$ 上の BKW-作用素である。(10) より $T_0 z^j = T z^j$ ($j = 0, 1, 2$) が成り立つ。ゆえに補題 1 より $T = T_0$ である。

$h = 0$ かつ g は finite Blaschke product であると仮定する。 $T_1 f = \frac{1}{2}(C_{\sqrt{g}} + C_{-\sqrt{g}})f$ ($f \in A$) とおく。この時 $n \geq 1$ に対して $T_1 1 = 1$, $T_1 z^{2n-1} = 0$ かつ $T_1 z^{2n} = g^n$ が成り立つ。上と同様にして $T_1 = T$ かつ T が $\{1, z, z^2\}$ についての BKW-作用素であることを証明できる。(証明終わり)。

4. 問題

T を test functions $S_3 = \{1, z, z^2, z^3\}$ についての $A(\Gamma)$ 上の BKW-作用素で $\|T\| = 1$ かつ $T1 = 1$ を満たすものとする。定理 1 より T は次のように表せる。

$$(Tf)(\zeta) = a(\zeta)(C_\varphi f)(\zeta) + b(\zeta)(C_\psi f)(\zeta) + c(\zeta)(C_\phi f)(\zeta) \quad (\zeta \in \Gamma, f \in A(\Gamma)),$$

ここで

$$|\varphi(\zeta)| = |\psi(\zeta)| = |\phi(\zeta)| = 1, \quad a(\zeta) + b(\zeta) + c(\zeta) = 1, \quad a(\zeta), b(\zeta), c(\zeta) \geq 0 \quad (\zeta \in \Gamma).$$

特に次の形を持つ BKW-作用素を考える。

$$(*) \quad T = (C_\varphi + C_\psi + C_\phi)/3, \quad \Gamma \text{ 上で } |\varphi| = 1 \text{ かつ } |\psi| = 1 \text{ かつ } |\phi| = 1.$$

この場合、 $T1 = 1$ かつ $\|T\| = 1$ 。

問題 T を $A(\Gamma)$ 上の有界線形作用素で $\|T\| = 1$ かつ $T1 = 1$ を満たすものとする。この時 T が (\star) を満たす $\{1, z, z^2, z^3\}$ についての BKW-作用素であるための必要十分条件は何か。

REFERENCES

- [1] Hoffman K., *Banach Spaces of Analytic Functions*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- [2] Hirasawa G., Izuchi K. and Kasuga K., *Korovkin type approximation theorems on the disk algebra*. Hokkaido. Math. J. **29** (2000), 103-117.
- [3] Izuchi K., Takagi H. and Watanabe S., *Sequential BKW-operators and function algebras*. J. Approx. Theory **85** (1996), 185-200.
- [4] Takahasi S.-E., *Bohman-Korovkin-Wulbert operators on normed spaces*. J. Approx. Theory **72** (1993), 174-184.