数理解析研究所講究録 1243 巻 2002 年 45-48

保測な流れに対する加法過程のエルゴード的性質

岡山大・自然　　佐藤亮太郎　(Ryotaro Sato)

Graduate School of Natural Science and Technology

Okayama University

ここでは、確率空間上の補測な流れに対する加法過程のエルゴード的性質について調べる。

$\{T_t\}$: 確率空間 (Ω, Σ, μ) 上の保測な流れ（可測性は仮定する), $\mathbf{F} = \{F_t : t > 0\} \subset L_p(\mu)$ とする.

$$\text{加法過程} \overset{\text{def}}{=} F_{t+s} = F_t + F_s \circ T_t \quad (\forall t, s > 0)$$

$$(T_t F_s = F_s \circ T_t \text{ と書く})$$

【一般に, p は $0 \le p \le \infty$ の範囲で考えられるが, 簡単のために, $p = 1$ とする】 $t \mapsto F_t$ が可測関数であれば, $\mathbf{F}$ の形が次のように決定する：

$$\exists f_1 \in L_1 \text{ such that } F_t = T_t f_1 - f_1 + \int_0^t T_s F_1 \, ds, \quad t > 0.$$

$$\therefore \quad \frac{F_t}{t} = \frac{1}{t}(T_t f_1 - f_1) + \frac{1}{t}\int_0^t T_s F_1 \, ds,$$

【注： $f_1 = -\int_0^1 F_s \, ds$ となる】

ここで、 $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t T_s F_1 \, ds$ について: (概収束、ノルム収束は OK)

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t T_s F_1 \, ds = F_1$$ について: (概収束、ノルム収束は OK)

(新しい加法過程) $G_t = T_t f_1 - f_1,\ t > 0$ について:

$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} G_t = 0$. (ノルム収束は OK ←自明) 一般に, 概収束は NO. ここで,

$$G^*(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ess sup}_{\,0\le r<s<1} |T_s f_1(\cdot) - T_r f_1(\cdot)|$$

として, $G^* \in L_1$ ならば, 概収束の意味で,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} G_t = 0. \ (\text{OK})$$

次に, $\{G_t\}$ が linearly bounded, i.e.

$$(*) \quad \sup_{t>0} \left\|\frac{1}{t}(T_t f_1 - f_1)\right\|_1 < \infty \quad [\Leftrightarrow \sup_{t>0} \frac{1}{t}\|F_t\|_1 < \infty\,]$$

を仮定すれば, $\exists f_0(\xi) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t f_1(\xi) - f_1(\xi))$ $(a.a.\ \xi \in \Omega)$.

【ここで, 一般にノルム収束はNO. また、(*) を仮定しないと, $G^* \in L_1$ としても, この概収束はNO となることがある】 この f_0 を使って, $\mathbf{F}$ のもう一つの表現が可能：

$$\begin{cases} F_t = G_t + \int_0^t T_s F_1\,ds = G_t - \int_0^t T_s f_0\,ds + \int_0^t T_s(f_0 + F_1)\,ds \\ \quad = H_t + \int_0^t T_s(f_0 + F_1)\,ds, \quad t > 0. \end{cases}$$

ここで, $\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} H_t(\xi) = 0$ for a.a. $\xi \in \Omega$. これより, 次が成立する：

$\exists$ (singular) 加法過程 $\{\widehat{H}_t : t > 0\} \subset L_1^+(\mu)$ such that

$$|H_t| \leq \widehat{H}_t \quad \text{and} \quad \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \widehat{H}_t(\xi) = 0 \quad (\text{a.a. } \xi \in \Omega).$$

次に,

A: $\{T_t\}$ を L_1 上の作用素半群と見て, その生成作用素,

E: A の値域とする. この時, (*) の仮定なしに, 以下が成立する.

【注：$\overline{E} = E \Leftrightarrow \{T_t\}$ が一様平均エルゴード定理を満たす】

定理. (I) $F_1 \notin \overline{E} \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\|F_t\|_1 > 0$.

(II) $F_1 \in \overline{E} \setminus E \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\|F_t\|_1 = 0$ and $\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b}\int_0^b \|F_t\|_1 = \infty$.

(III) $F_1 \in E \Leftrightarrow \exists \tilde{f} \in L_1 : F_t = T_t\tilde{f} - \tilde{f},\ t > 0 \Leftrightarrow \sup_{t>0} \|F_t\|_1 < \infty$

$\Leftrightarrow \liminf_{b\to\infty} \frac{1}{b}\int_0^b \|F_t\|_1\,dt < \infty$.

命題. $\{F_t : t > 0\}$ が absolutely continuous【i.e. $\exists f \in L_1$ such that F_t $\int_0^t T_s f\,ds,\ t > 0$】 $\Leftrightarrow$ $f_1\,[= -\int_0^1 F_s\,ds] \in (A$ の定義域$)$.

$$\exists f, g \in L_1 \text{ such that } F_t = T_t f - f = \int_0^t T_s g\, ds \ \ (\forall t > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sup_{t>0} \|F_t\|_1 < \infty \ \text{ and } \ \lim_{t \downarrow 0} \|\frac{F_t}{t} - g\|_1 = 0 \ \text{ for some } g \in L_1$$

$$\Leftrightarrow \liminf_{b\to\infty} \frac{1}{b} \int_0^b \|F_t\|_1\, dt < \infty \ \text{ and } \ \int_0^1 F_s\, ds \in (A \text{ の定義域}).$$

【$p \neq 1$ なる場合も, $\{F_t\}$ が 適当な $\tilde{f} \in L_p$ で, $F_t = T_t\tilde{f} - \tilde{f}$, $t > 0$ なる形に書ける条件についての考察がある. これについては, 流れ $\{T_t\}$ と加法過程 $\{F_t\}$ から自然に導かれる skew product flow の不変測度の存在との関連付けが一般に可能である】

Ryotaro Sato

Department of Mathematics

Okayama University

Okayama, 700-8530 Japan

E-mail address: satoryot@math.okayama-u.ac.jp