

関数環上の後退シフト作用素

信州大理 高木 啓行 (Hiroyuki Takagi)

最近, 様々な Banach 空間上でシフト作用素が研究されている. ここでは, 関数環上の後退シフト作用素が存在しないことを報告する.

もっとも基本的な立場で “シフト作用素” というと, 数列空間 ℓ^2 上の作用素

$$S: \begin{pmatrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \\ \downarrow \\ 0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \dots \end{pmatrix} \quad T: \begin{pmatrix} a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \\ \downarrow \\ a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots \end{pmatrix}$$

を指す. 前者 S は 前進シフト作用素 (unilateral shift operator), 後者 T は 後退シフト作用素 (backward shift operator) と呼ばれる. これらは, ℓ^2 上の有界線形作用素の典型例で, 関数解析学の入門書によく引き合いに出される. また, 互いに他の共役作用素になっていることもよく知られている.

ここで, 可分な Hilbert 空間 \mathcal{H} が, 数列空間 ℓ^2 と 内積空間として同型であることを思い出そう. そうすると, 上記の 2 つの作用素は \mathcal{H} 上でも考えられるようになる.

定義 1. \mathcal{H} を 可分な Hilbert 空間とし, S, T を \mathcal{H} 上の有界線形作用素とする.

$$\begin{aligned} Se_n &= e_{n+1} & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ Te_0 &= 0, \quad Te_n = e_{n-1} & (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

となるような \mathcal{H} の完全正規直交系 $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ が存在するとき, S は \mathcal{H} 上の前進シフト作用素, T は \mathcal{H} 上の後退シフト作用素であるという.

\mathcal{H} が 興味深い空間のときが おもしろい. たとえば, 単位開円板 \mathbb{D} 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ では, べき乗関数 $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ が 完全正規直交系になっているから, 作用素 S, T :

$$(1) \quad \begin{aligned} (Sf)(z) &= zf(z) \\ (Tf)(z) &= \frac{f(z) - f(0)}{z} \end{aligned} \quad (z \in \mathbb{D}, f \in H^2(\mathbb{D}))$$

は, それぞれ $H^2(\mathbb{D})$ 上の前進シフト作用素, 後退シフト作用素になる. これらの作用素が, Hardy 空間の研究で重要な役割を果たしているのは, 周知のとおりである ([2] を参照).

これらの作用素を, さらに一般的に, Banach 空間の上で考えたらどうなるだろう? この疑問は, まったく自然に発せられる. この疑問にもとづく研究は, 1972 年の Crownover の論文 [3] から始まったようである. 彼は 次のような定義をしている.

定義 2. Banach 空間 \mathcal{B} 上の有界線形作用素 S は, 次の 3 つの条件 (i) ~ (iii) をみたすとき, \mathcal{B} 上の前進シフト作用素と呼ばれる.

- (i) S は 1 対 1 である.
- (ii) S の値域 $\text{ran } S$ の余次元が 1 である.
- (iii) $\bigcap_{n=1}^\infty \text{ran } S^n = \{0\}$.

この定義は、 \mathcal{B} が可分な Hilbert 空間 \mathcal{H} の場合、定義 1 と一致する。前進シフト作用素については、Holub [6], Gutek, Hart, Jamison and Rajagopalan [5], Farid and Varadarajan [4], Takayama and Wada [9] らが研究結果を出している。その中で、後退シフト作用素も論議にあがり、1988 年、Holub は次のような定義をした。

定義 3. Banach 空間 \mathcal{B} 上の有界線形作用素 T は、次の 3 つの条件 (i) ~ (iii) をみたすとき、 \mathcal{B} 上の後退シフト作用素と呼ばれる。

- (i) T の核 $\ker T$ の次元が 1 である。
- (ii) $\|Tf\| = \inf \{ \|f + g\| : g \in \ker T \}$ ($f \in \mathcal{B}$).
- (iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker T^n$ が \mathcal{B} で稠密である。

この定義の条件 (ii) は、「 T によって自然に定義される $\mathcal{B}/\ker T$ から \mathcal{B} への 1 対 1 の作用素 $f + \ker T \mapsto Tf$ が等長作用素になる」という意味である。この定義も、 \mathcal{B} が可分な Hilbert 空間 \mathcal{H} の場合は、定義 1 と一致する。

Holub は、論文 [6] で、

具体的な関数空間において、その上の後退シフト作用素は存在するか？

という主旨の問題を提起した。そして、コンパクト Hausdorff 空間 X 上の実数値連続関数全体の Banach 空間 $C_{\mathbb{R}}(X)$ について、次の定理を証明した。

定理 (Holub). X が無限個の点からなりかつ X の連結成分が有限個のとき、 $C_{\mathbb{R}}(X)$ 上の後退シフト作用素は存在しない。

つづいて、Rajagopalan and Sundaresan [7] は、上の定理の条件をひとつ落とし、

定理 (Rajagopalan and Sundaresan). X が無限個の点からなるとき、 $C_{\mathbb{R}}(X)$ 上の後退シフト作用素は存在しない。

を証明した。この結果は、 X 上の複素数値連続関数全体の Banach 空間 $C(X)$ においても、成り立つことが予測されるが、論文 [7] の証明は、この場合には通用しない。そこで、この場合も含めて、

関数環上の後退シフト作用素が存在するか？

という問題を考えてみた。そして次の結果を得た。

主要定理 無限次元の関数環上の後退シフト作用素は存在しない。

有限次元の空間上では、前進シフト作用素や後退シフト作用素の例を簡単につくることができる。そういう意味で、この定理の“無限次元”の仮定は本質的である。

この定理によると、ディスク環 $A(\mathbb{D})$ 上の後退シフト作用素は存在しないことになる。したがって、式 (1) で定義した Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ 上の後退シフト作用素 T を、 $A(\mathbb{D})$ 上で考

えた作用素 \hat{T} :

$$(\hat{T}f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} \quad (z \in \mathbb{D}, f \in A(\mathbb{D})).$$

は, $A(\mathbb{D})$ 上の後退シフト作用素ではない. 実際, \hat{T} は, 定義 3 の条件 (ii) をみたさない. しかしながら, この作用素を 後退シフト作用素を呼ばずに 何をそう呼ぶのであろうか? 定義 3 には 少々問題点があるように思われる.

また, 定義 2 と定義 3 は,

T が \mathcal{B} 上の後退シフト作用素のとき,

T の共役作用素 T^* が \mathcal{B}^* 上の前進シフト作用素になる

という意味で 整合性がある. しかし, 前進シフト作用素の共役作用素は かならずしも 後退シフト作用素には ならない. こういう観点からも, 定義 2, 3 を もう少し 考え直す必要もあるように思われる.

最後に, この方面の成果として, 最近 論文 [8] が出たことを 付記しておく.

追記: この講演の内容は, 信州大学大学院の有泉浩明くんが修士論文 [1] を作成する際に, 彼と講演者が共同研究したことにもとづいています. また, 和田 淳藏先生の講演 [10] と助言による部分も 含まれています. 先生の変わらぬ暖かいご指導に 感謝の気持ちがたえません.

参考文献

- [1] 有泉 浩明 (H. Ari-Izumi), 関数環上の後退シフト作用素について, 修士論文 (信州大), 1998.
- [2] J.A. Cima and W.T. Ross, "The Backward Shift on the Hardy Space," A.M.S., 2000.
- [3] R.M. Crownover, *Commutants of shifts on Banach spaces*, Michigan Math. J., **19** (1972), 233–247.
- [4] F.O. Farid and K. Varadarajan, *Isometric shift operators on $C(X)$* , Canad. J. Math., **46** (1994), 532–543.
- [5] A. Gutek, D. Hart, J. Jamison and M. Rajagopalan, *Shift operators on Banach spaces*, J. Funct. Anal., **101** (1991), 97–119.
- [6] J.R. Holub, *On shift operators*, Canad. Math. Bull., **31** (1988), 85–94.
- [7] M. Rajagopalan and K. Sundaresan, *Backward shifts on Banach spaces $C(X)$* , J. Math. Anal. Appl., **202** (1996), 485–491.
- [8] T.M. Rassias and K. Sundaresan, *Generalized backward shifts on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **260** (2001), 36–45.
- [9] T. Takayama and J. Wada, *Isometric shift operators on the disc algebra*, Tokyo J. Math., **21** (1998), 115–120.
- [10] 和田 淳藏 (J. Wada), Banach 空間上のシフト作用素について, 関数環論とその応用 研究集会 報告集 (早大教育), 2000.