

# 結合ハミルトニアン振動子系における 変調不安定解について

名大・理・物理学教室 後藤振一郎<sup>1</sup> (S. GOTO),  
野崎一洋 (K. NOZAKI),  
山田裕康 (H. YAMADA),  
*Department of Physics, Nagoya University.*

## 概要

高自由度ハミルトン系の基本的相空間構造の理解を目指すため、結合型のシンプレクティックマップをモデルに全次元楕円型不動点近傍の相空間構造を解析を行なった。その際、拡張されたくりこみ群の方法を開発した。解析の結果、変調不安定解に対応するウィスカの性質がトラスの大きさによって変わり得ることを見出した。また、変調不安定性がちょうど起きる臨界振幅よりわずかに大きい振幅のサイト一様解に付随するウィスカがホモクリニック的で、かつ振幅が大きい自由度が入れ替わるというタイプの乱雑さを見出し、ベルヌーイシフトによるアプローチを試みた。

## 目次

1. イントロダクション
2. モデル系とそのくりこみ
3. 変調不安定解の相空間構造
4. ランダムウィスカのベルヌーイシフトによる解析
5. まとめ

## 1 イントロダクション

ハミルトン力学系はそれ自身に興味注がれているだけでなく、化学反応モデル、プラズマ物理などに応用されるため重要である。高自由度の力学系はそのような系で頻繁に現われるが、高自由度系は必然的に高次元の相空間を持つため幾何学的直観による相空間構造の理解が困難である。また、それゆえに研究が進んでいない。従って、高自由度のハミ

---

<sup>1</sup>e-mail: sgoto@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

ルトン系の研究はその進展が望まれている。更にそこで用いられる方法論の開発も未発達である。

今回は、高自由度のハミルトン系の基本的な相空間である、全次元楕円型不動点まわりの相空間構造について報告する。全次元楕円型不動点でも、トーラスの崩壊以外にもウィスカー [Arn64] などの存在により相空間は複雑になり得る [GN99D]。また、高次元系においては、低次元の不安定多様体と安定多様体は交差しなくてもよい [AHS96][MS92] ので、カオスやその発生の有無などはよく分かっていない。今回は弱非線形シンプレクティックマップが数素子結合した系を例に、サイト一様解の不安定性 [WH86] をくりこみ群の方法と呼ばれる摂動法 [CGO96][GMN99][GN01R] を用いて相空間構造を調べる [GNY01]。

## 2 モデル系とそのくりこみ

本章では高次元系を解析するために具体的なモデルを用意する。その系をくりこみ群を用いて系の遅い運動を記述する方程式系を示し、その有用性を調べる。系の長時間挙動を数値的に調べるので、考察する系は離散時間力学系が適している。考察する系を以下で定義する： $(x_j^n, p_j^n) \mapsto (x_j^{n+1}, p_j^{n+1})$ ,

$$x_j^{n+1} = x_j^n + \tau p_j^{n+1}, \quad (1)$$

$$p_j^{n+1} = p_j^n + \tau \left[ -\Omega^2 x_j^n + \varepsilon \left\{ \nu(x_{j+1}^n - 2x_j^n + x_{j-1}^n) - \alpha(x_j^n)^3 \right\} \right], \quad (2)$$

ここで  $N \geq 3$  は系の自由度、 $(x_j^n, p_j^n)$  はサイト  $j \in \mathbb{Z}$ 、時間  $n \in \mathbb{Z}$  における正準共役な力学変数で実数をとるものとする。

$$\sum_j dx_j^{n+1} \wedge dp_j^{n+1} = \sum_j dx_j^n \wedge dp_j^n$$

また周期境界条件  $(x_{N+1}^n = x_1^n, p_{N+1}^n = p_1^n)$  が成立しているものとする。 $\tau, \Omega, \nu, \alpha$  は  $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$  の量のパラメーターでそれぞれ時間差分間隔、各素子の固有振動数、素子間の結合定数、非線形性の大きさを表す。 $\varepsilon$  は摂動パラメーターである ( $0 < \varepsilon \ll 1$ )。モデル (Eqs. (1),(2)) の時間連続極限 ( $\tau \rightarrow 0$ ) をとると、以下の非線形振動子が最近接相互作用した系となる。

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= p_j, \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\Omega^2 x_j + \varepsilon \left\{ \nu(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) - \alpha(x_j)^3 \right\}, \end{aligned}$$

以後  $\tau$  が有限の離散系を取り扱う。系の遅い運動は以下の正則化くりこみマップ<sup>2</sup>  $(A_j^n, A_j^{n*}) \mapsto (A_j^{n+1}, A_j^{n+1*})$  によって記述される [GNY01]。ただし  $A_j^{n*}$  は  $A_j^n$  の複素共役である。

$$(1 - iT\Delta_j^2)A_j^{n+1} = (1 + iT\Delta_j^2) \exp(iQ|A_j^n|^2)A_j^n. \quad (3)$$

$$\sum_j dA_j^{n+1} \wedge dA_j^{n+1*} = \sum_j dA_j^n \wedge dA_j^{n*} \quad (4)$$

<sup>2</sup>くりこみマップとは、ODEに対する摂動法をしてのくりこみ群の方法を差分系に拡張したときに得られるマップ (写像系) の事を言う。正則化くりこみマップとは、シンプレクティックマップに素朴に拡張されたくりこみ方法で得られたマップに対して [KM98][GN01A]、破れている正準性を厳密に ( $\varepsilon^\infty$  まで!) 回復させたマップの事を言う [GN01R]。すなわち、(4) 式が成立するようなくりこみマップの事。

$$\begin{aligned}
T &:= \varepsilon \frac{\tau^2 \nu}{4 \sin \theta} \in \mathbf{R}, & Q &:= \varepsilon \frac{-\tau^2 \alpha}{2 \sin \theta} \in \mathbf{R}, \\
x_j^n &= A_j^n \exp(-i\theta n) + \text{c.c.}, \\
\Delta_j^2 A_j^n &:= A_{j+1}^n - 2A_j^n + A_{j-1}^n. \\
\cos \theta &:= 1 - \Omega^2/2,
\end{aligned}$$

であり、 $\sin \theta$  の値は  $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$  である時のみを考えるものとする。この差分方程式系 Eq.(3) は nonlinear Schrödinger Eq. のある数値計算スキームとなっていて [WH86]、更に以下の保存量を持つ。

$$\sum_j |A_j^{n+1}|^2 = \sum_j |A_j^n|^2 = \dots = \sum_j |A_j^0|^2.$$

この正則化くりこみマップがどれほど正しく系の長時間挙動を記述するかについて数値的に検証する。3 サイト系において変調不安定<sup>3</sup>な初期値において、元もとのマップと正則化くりこみマップを時間発展させた時系列を図 1 及び 2 に示す。時間 (iteration) は  $n = 0 \sim 35000$  で、粒子数は 1 である。

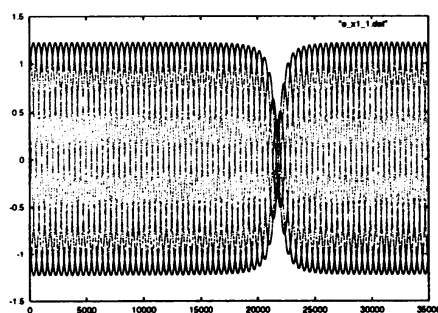


図 1: 元のマップの  $x_1^n$  時系列 (サイト一様解に摂動を加えている).

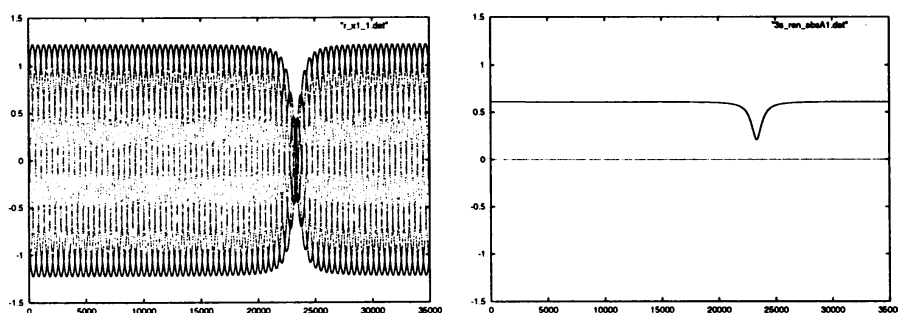


図 2: くりこみ群マップの時系列 ( $x_1^n$  の再現 (左) と  $|A_1^n|$  (右).)

<sup>3</sup>変調不安定であるとはサイト一様 (=空間一様) な時間的に振動する解が線形不安定である事。

パラメータは  $\varepsilon = 0.01, \tau = 1.0, \Omega = 1.0, \nu = -0.25, \alpha = 1/3$  である。以後素子数に関わらずこのパラメータを用いる事にする。くりこみ変数  $A_j^n, A_j^{n*}$  から  $x_1^n$  を再現するには、くりこみ変数とくりこまれた解の関係  $x_1^n = A_j^n \exp(-i\theta n) + \text{c.c.}$  を用いている。これらの結果により、正則化くりこみマップがおおよそ元のマップの時系列を再現する事が示され、早い振動部分が取り除かれた遅い運動を記述する事<sup>4</sup>がわかる。

### 3 変調不安定解の相空間構造

変調不安定解とは力学系の言葉で言えば、トーラス周りに生じたウィスカーに他ならない。系の遅い運動がくりこみの手法で抽出されたので、この系 (Eq. (3)) を用いてウィスカーの性質を解析する。Eq. (3) はサイト番号に依存しない時間的に振動する解  $A_j^n = A^0 \exp(iQ|A^0|^2 n)$  但し、 $A^0 := A_j^0, (j = 1, \dots, N)$  (以後この解を一様解と呼ぶ) が存在する<sup>5</sup>。一様解に対応するトーラス (以後トーラスと言え、一様解に対応するトーラスの事を指す事にする) の安定性は線形安定性で決まる。 $A_j^n = A^0 \exp(iQ|A^0|^2 n)(1 + \mu_j^n), (|\mu_j^n| \ll 1)$  を (3) 式へ代入し、 $|\mu_j^n|$  の2次以上を無視する事によりトーラスの安定性が決定される。 $\mu_j^{n+1}$  と  $\mu_j^n$  がつくる線形化方程式の固有値より、 $N = 3, 4$  の場合

3 サイトモデル:

$$|A^0|^2 > \frac{3T}{Q}, \quad (5)$$

or

$$|A^0|^2 > \frac{-1}{3QT}, \quad (6)$$

4 サイトモデル:

$$|A^0|^2 > \frac{2T}{Q} \quad (\text{doublet}), \quad |A^0|^2 > \frac{4T}{Q} \quad (\text{singlet}), \quad (7)$$

or

$$|A^0|^2 < \frac{-1}{2QT} \quad (\text{doublet}), \quad |A^0|^2 < \frac{-1}{4QT} \quad (\text{singlet}), \quad (8)$$

今回の報告では (5), (7) 式のタイプの  $\varepsilon$  に依存しない不安定性のみを考察することにする。3 サイトの場合 (i)  $|A^0|^2 < 3T/Q$  の時トーラスの周りは楕円的、(ii)  $|A^0|^2 > 3T/Q$  の時2次元不安定多様体と2次元安定多様体を持つ。4 サイトの場合、トーラスの振幅が (i)  $|A^0|^2 < 2T/Q$  の時楕円的、(ii)  $2T/Q < |A^0|^2 < 4T/Q$  の時2次元不安定と2次元安定多様体を持ち、(iii)  $|A^0|^2 > 4T/Q$  の時3次元不安定と3次元安定多様体を有する。以後、 $|A^0|^2 = 2 > 3T/Q$  の振幅を3サイト系における臨界振幅と呼ぶ事にする。

ウィスカーのつくる相空間構造に着目するため、次の様にして複素な新変数  $a_j^n$  を定義する： $A_j^n = a_j^n \exp(iQ|A^0|^2 n)$ 。この時間  $n$  に依存した変換により、系が厳密にトーラス

<sup>4</sup>微分方程式の場合、くりこみ群の方法は平均化法 [GH97] の結果を再現する。

<sup>5</sup>この解以外にも任意の  $j, j' = 1, \dots, N$  に対して  $A_j^n$  と  $A_{j'}^n$  の位相差が  $N$  に依存したある値で固定した解が存在する。

をなしている時は  $a_j^n = A^0 = \text{const.}$  となっているので新変数  $a_j^n$  はトーラスからのズレを観察しやすい変数である (図3参照)。

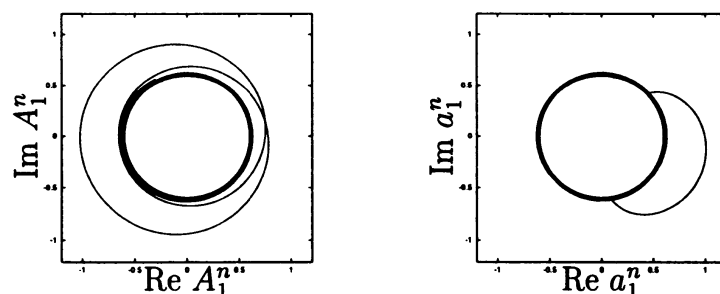


図3: 右図と左図の太線は一様解を表し、細線はその一様解に摂動を加えて構成した変調不安定解を表す。右図と左図は完全に同一の軌道であり、表示の仕方が異なるだけである。左図の太線、細線及び右図の太線が  $A_1^n$  での表示、右図の細線のみが  $a_1^n$  での表示である。数値計算は3サイト、一様解の大きさは変調不安定な振幅で臨界振幅  $|A^0|^2 = 3T/Q$  よりわずかに大きい値  $|A^0|^2 = 2\pi/(2900Q)$  である。なお、粒子数は1つである。

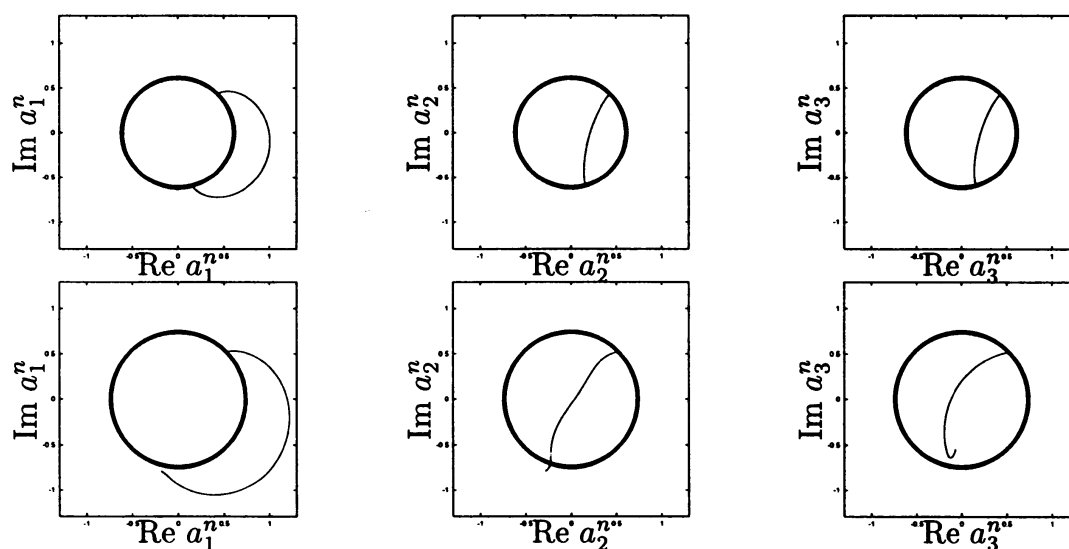


図4: 太線は一様解、細線は  $a_j^n$  を表す。一様解の振幅の大きさは上段の図は7と同じ値 ( $|A^0|^2 = 2\pi/(2900Q)$ ) にとっている。下段の図は  $|A^0|^2 = 2\pi/(2000Q)$  にとっている、上段の振幅よりも大きい。上段の図においては  $a_2^n$  と  $a_3^n$  が同じ軌道をほぼ同一の軌道をとっている事が数値的に確認されるが、下段ではそうになっていない。

なお、正則化くりこみマップは  $a_j^n$  で閉じた方程式で構成する事が可能である。また、臨界振幅以上の振幅ではトーラスの各点各点からウィスカーが生じている事を注意してお

く<sup>6</sup>。3サイトの場合、トーラスの大きさの変化によるウィスカーの変化を観察すると図4のようになる。なお、粒子数は1である。観察の結果、臨界振幅よりわずかに大きい振幅においては、ウィスカーはホモクリニック的すなわち安定多様体と不安定多様体が重なっているように見える。

このホモクリニック状の不安定多様体は長時間の数値計算で図5、6のような振舞をする。このホモクリニック状ウィスカーの入れ換えの順序は、初期値に依存して鋭敏であり、トーラスの崩壊などによる相空間構造の不規則化とは異なる種類のものである。また、同様の事が4サイト系でも数値的に確かめられる [GNY01]。

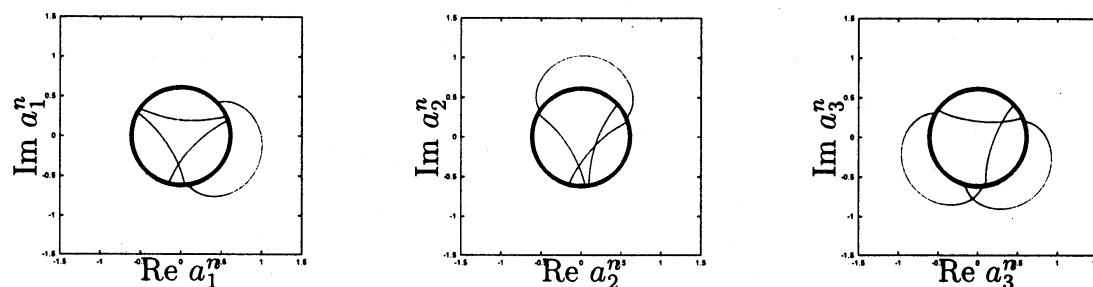


図5: 一様解の大きさは  $|A^0|^2 = 2\pi/(2900Q)$  で臨界振幅よりわずかに大きい。ホモクリニック状のウィスカー達の大振幅自由度の入れ換えが生じている。

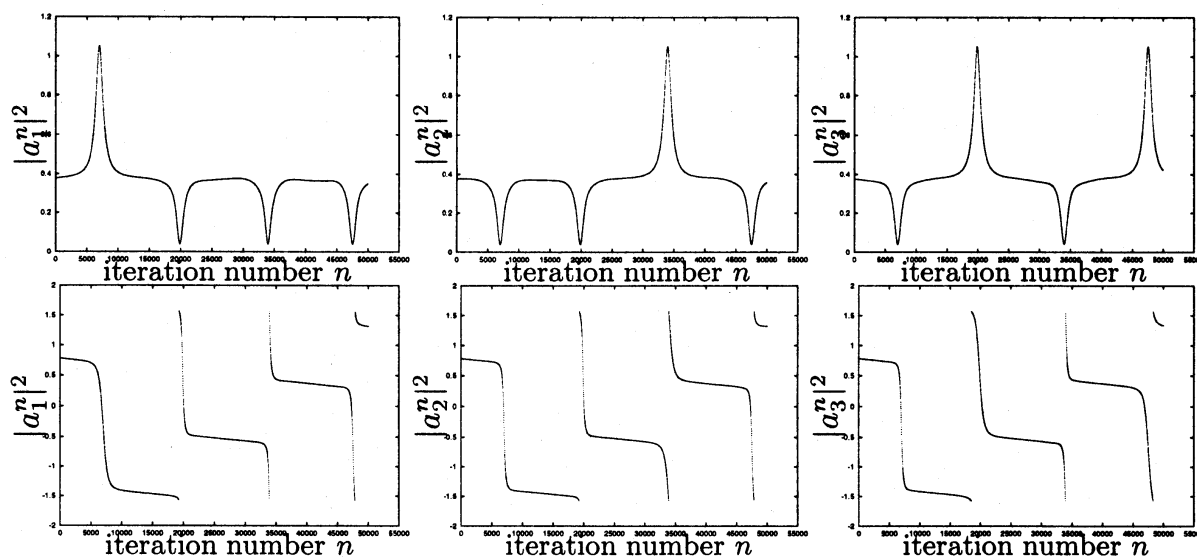


図6: 図5に対応する  $|a_j^n|^2$  (上段) と位相  $\text{Tan}^{-1}(\text{Im } a_j^n / \text{Re } a_j^n)$  (下段) の時系列図。上下段の図ともプラトー領域はトーラス近傍に留まっている事に対応する。時間  $n$  は0~50000。

<sup>6</sup> トーラスから生じているウィスカー全体を描こうとすると、相空間が真っ黒になってしまうので、数値計算はトーラスの1点 ( $\text{Re } A^0 = \text{Im } A^0$ ) 近傍からの不安定多様体を観察している。

#### 4 ランダムウィスカーのベルヌーイシフトによる解析

前章で見出したホモクリニック状ウィスカーの入れ換えの順序による乱雑さはベルヌーイシフト [LL91] を用いて解析が可能である。ある時間区間で振幅の大きい自由度を数字で表すと、ウィスカーの列は数字列で表される。規則性のある数字列をベルヌーイシフトでマップしていくと区間  $[0, 1)$  内を周期的に運動する。3 サイトの場合について、数字列を図7に、シフトの結果を図8に示した。実際には数値計算で得られる数字列は有限であるため、精度は良くないがランダムである事を示唆するであろう。4 サイトも同様である [GNY01]。

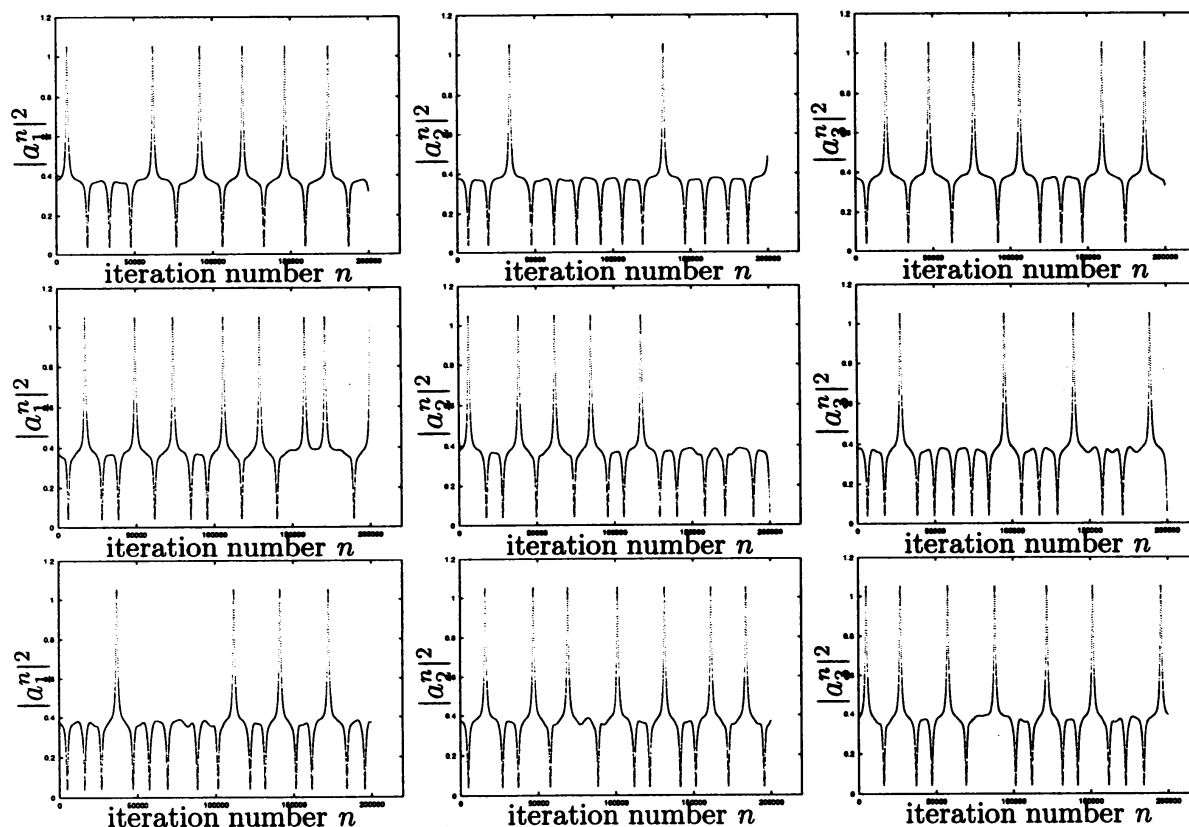


図 7:  $|a_j^n|^2$  の時系列プロット。上段、中段、下段は全て同一様解の大きさ  $|A^0|^2 = 2\pi/(2900Q)$  で摂動の振幅も同じであるが、摂動の位相が各段毎で全て異なる。上段の数字列は “10201010121010’、中段は “2102121201210110’、下段は “020120202102102120’ である。但し、“3” を “0” とみなした。左は  $|a_1^n|^2$ 、中は  $|a_2^n|^2$ 、右は  $|a_3^n|^2$  を表す。時間  $n$  は  $0 \sim 200000$ 。

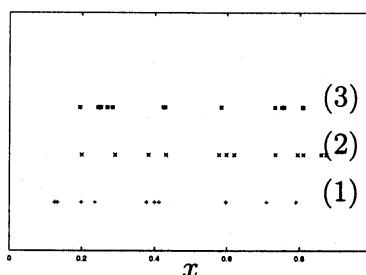


図 8: ベルヌーイシフトの結果。横軸は 0 から 1 の値をとる。この図中の (1) は図 7 上段の数字列、(2) は中段、(3) は下段の結果。

## 5 まとめ

本報告では、ハミルトン力学系のつくる高次元相空間構造、特に全次元楕円的な不動点近傍で生じる変調不安定性による相空間構造を調べた。その際、くりこみ群の方法をシンプレクティックマップに対して拡張した正則化くりこみという手法を開発し、使用した。正則化くりこみマップの数値計算の結果、変調不安定性が生じている臨界振幅よりわずかに大きいトーラスに付随するウィスカーの振舞はホモクリニック的であり、振幅の大きい自由度が入れ替わりが生じる事を見出した。また、それをベルヌーイシフトと対応させて解析した。これはトーラスの崩壊による相空間構造のカオス化とは異なる種類の複雑さである。長時間の数値計算に適している離散時間系でモデルを組んだが、この事は時間連続系でも生じる事である。このような種類の複雑さは 3、4 サイト系のみならず、格子上で定義された力学系の理解にとって重要になるであろう。

### 参考文献

- [Arn64] V. I. ARNOLD,  
“INSTABILITY OF DYNAMICAL SYSTEMS WITH SEVERAL DEGREES OF FREEDOM” Sov. Math. Dokl. 5 (1964) 581 – 585.
- [AHS96] M. J. ABLOWITZ, B. M. HERBST and C. M. SCHOBBER,  
“Computational chaos in the nonlinear Schrödinger equation without homoclinic crossing”,  
Physica A 228 (1996) 212 – 235.
- [CGO96] L. Y. CHEN, N. GOLDENFELD and Y. OONO,  
“Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory”, Phys. Rev. E54, No. 1 (1996) 376 – 394.
- [GH97] (for example) J. GUCKENHEIMER and P. HOLMS,  
“Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields (fifth



printing)”, Springer-Verlag, NewYork. (1997).

- [GMN99] S. GOTO, Y. MASUTOMI and K. NOZAKI,  
“Lie-Group Approach to Perturbative Renormalization Group Method”, Prog. Theor. Phys. vol. 102, No. 3 (1999) 471 – 497.
- [GN99D] S. GOTO, and K. NOZAKI,  
“Dynamics near Resonance Junctions in Hamiltonian Systems”, Prog. Theor. Phys. vol. 102, No. 5 (1999) 953 – 963.
- [GN01A] S. GOTO and K. NOZAKI,  
“Asymptotic Expansions of Unstable and Stable Manifolds in Time-Discrete Systems”, Prog. Theor. Phys. vol.105, No. 1 (2001) 99 – 107.
- [GN01R] S. GOTO and K. NOZAKI,  
“Regularized Renormalization Group Reduction of Symplectic Maps”, J. Phys. Soc. Jpn. vol. 70 (2001) 49 – 54.
- [GNY01] S. GOTO , K. NOZAKI and H. YAMADA,  
*in preparation*, (2001).
- [KM98] T. KUNIHICO and J. MATSUKIDAIRA,  
“Dynamical reduction of discrete systems based on the renormalization-group method”, Phys. Rev. E57 ,No. 4 (1998) 4817 – 4820.
- [LL91] (for example), A. J. LICHTENBERG and M. A. LIEBERMAN,  
“Regular and Chaotic Dynamics (second edition)”, Springer, Berlin (1991).
- [MS92] D.W. MCLAUGHLIN and C.M. SCHOBBER,  
“Chaotic and homoclinic behavior for numerical discretizations of the nonlinear Schrödinger equation”, Physica D. 57 (1992) 447 – 465.
- [Tze01] S. I. TZENOV,  
“Renormalization Group Approach to the Beam-Beam Interaction in circular Colliders”  
, (preprint) arXiv:physics/0106101 ,(2001).
- [WH86] J. A. C.WEIDEMAN and B. M. HERBST,  
“Split-Step Method For Solution Of The Nonlinear Schrödinger Equation”, SIAM. J. NUMER. ANAL. vol. 23. No. 3 (1986) 485 – 507.