

# Dynamical Network in Iterated Function Dynamics (関数マップ)

片岡直人\*

*Meme Media Laboratory (VBL), Faculty of Engineering,  
Hokkaido University, N12 W6 Sapporo, 060-0812, JAPAN*

## 概要

自分でルールを決める力学系について考える第一歩として関数マップ (IFD) と呼んでいる力学系を紹介する。その力学系の振舞が、刻々と形を変えるネットワークの運動として捉えられることを示し、その運動について解説する。

## 1 動機

自分で自分のルールを定める力学系を夢想した場合、すぐさま思いつく種類のもは、パラメータがまた何かの力学系で動いているような力学系である。しかしそうなると、またその力学系のパラメータを駆動するような力学系というものを考えたくなり、際限がない。その上そうしてみたところで、ただに大自由度の力学系へたどりつくことになり、気も滅入る。

ここでは、ある部分の運動が他の部分の運動の、パラメータとして働いているとみなせるような系を考えたい<sup>1</sup>。つまりは勝手な運動をしているものから、運動を支配するものとされるものという分離の生成過程を

---

\*連絡先: [kataoka@aurora.es.hokudai.ac.jp](mailto:kataoka@aurora.es.hokudai.ac.jp) / 北海道大学 電子科学研究所 電子情報処理部門 情報数理研究室 〒060-0812 札幌市 北区 北12条 西6丁目

<sup>1</sup>化学反応はただに化学反応であるが、そこに適切な用語を適用することにより、なにやら便利に記述できる化学反応の体系というものが見える。

考察できるようなものを、考えてみたい。関数マップと呼んでいる力学系が、そのような性質を(ある意味で)持つことを示す。

## 2 モデル

1次元写像  $f$  に対して、次の写像を考える。

$$\Psi_\varepsilon(f) = (1 - \varepsilon)id + \varepsilon f$$

ここで、 $0 < \varepsilon < 1$  とする。初期関数  $f_0$  に対し、関数マップ<sup>2</sup>を、次のように定める<sup>3</sup>。

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \Psi(f_n) \circ f_n \\ &= (1 - \varepsilon)f_n + \varepsilon f_n \circ f_n \end{aligned} \quad (1)$$

関数マップにおいては、初期関数  $f_0$  と、 $\varepsilon$  を与えてやれば以降の発展は自動的に定まる(合成が定義できるような関数を考える)。以下に初期関数と時間発展の例を示す。

**初期関数：単調非減少関数**

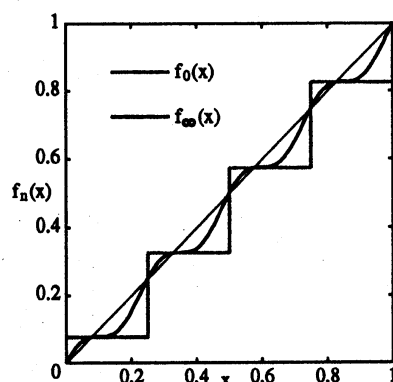


図 1:  $f_0$  が単調非減少関数の場合。  $f_\infty$  は階段関数に収束。

初期関数が単調非減少関数であれば、 $f_\infty$  は階段関数に収束する [3]。

<sup>2</sup>Iterated Function Dynamics, IFD

<sup>3</sup>見掛けの類似から、Coupled Map Lattice か Open Flow Model か、と言われることもあるけれども、1次元写像から1次元写像への写像であり、本質的に異なる。

## 初期関数：ロジスティック・マップ

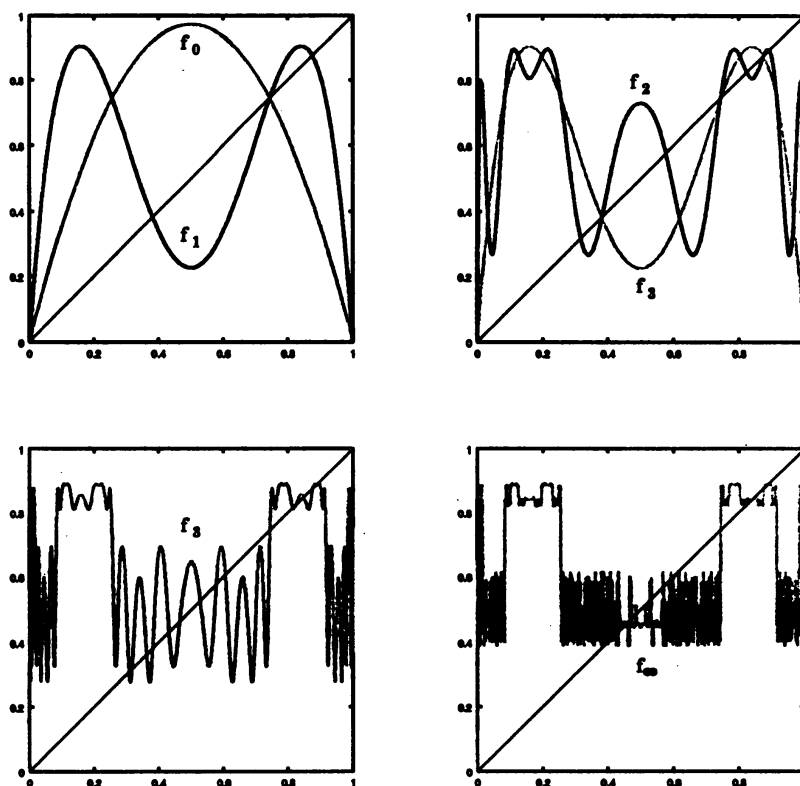


図 2:  $f_0$  がロジスティック・マップの場合の時間発展 ( $f_0(x) = 3.9x(1-x)$ ,  $\epsilon = 0.85$ )。左上から、 $f_0, f_1, f_2, f_3, f_{1000}$ 。シミュレーション上は収束。

初期関数が一山関数である場合には、合成項により関数のグラフは折り畳まれながら時間発展する。ほとんどのパラメータに対し  $f_n$  はシミュレーション上収束するが、その行く先は入り組んだ構造を示す。ある程度非線形性の強い初期関数に対しては、シミュレーションはメッシュサイズ<sup>4</sup>に対する強い依存性を持つ。 $f_n$  がシミュレーション上収束しないようなパラメータにおける挙動については、わかっていないことが多いが、無限に小さな構造をつくり続けるであろうことは、[1]。

<sup>4</sup>合成項の計算のためになんらかの形で区間をメッシュに切ることが必要である (多項式の次数は  $2^n$  で増加するために、手におえない)。

初期関数：二山関数

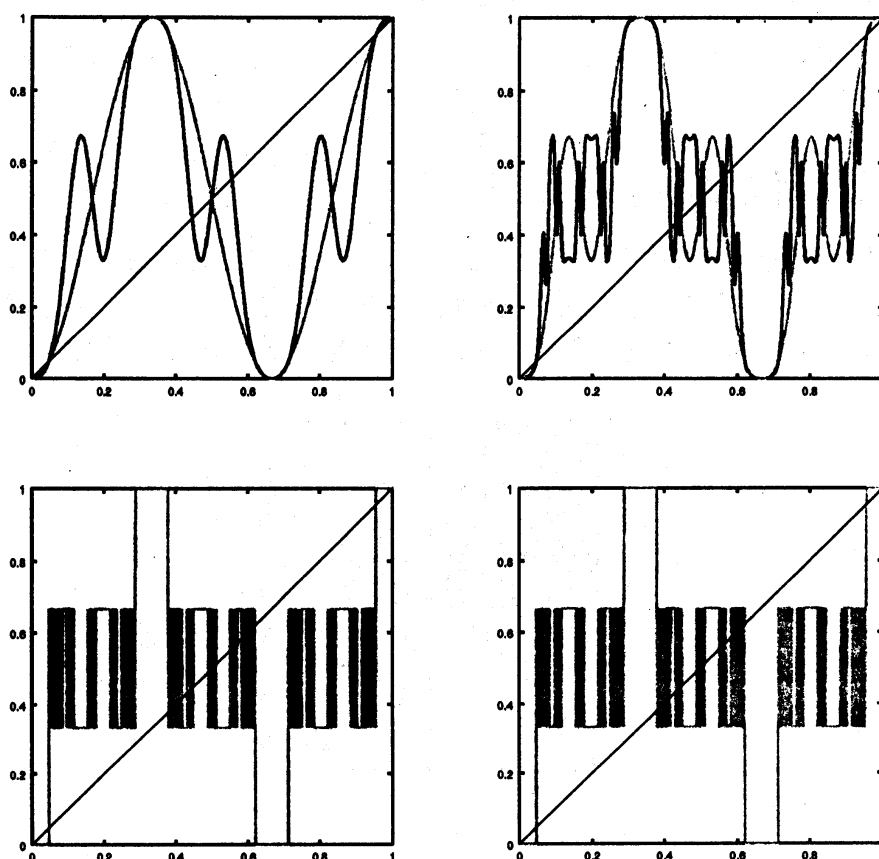


図 3:  $f_0(x) = \sin^2(1.5\pi x)$  の場合の時間発展。上段、 $f_0, f_1, f_2$ 。下段、 $n$  に対して周期 2 の関数に収束 (下段の図、左右で振動)。

初期関数がある程度の構造を持つと、 $f_n$  は収束せずに、 $n$  に対して周期でうつりかわる運動が見られる。

式 (1) が次の性質を持つことをみるのは容易である。

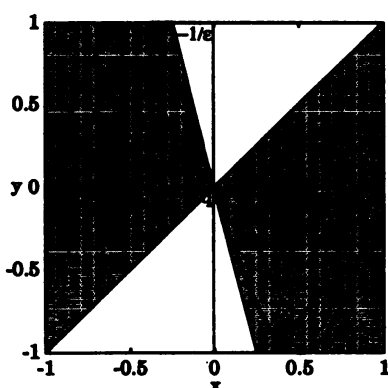
- $f_n(a) = f_n(b)$  が満たされた場合、 $m > n$  に対して  $f_m(a) = f_m(b)$  が保たれる。  
「同じ値を取ったものは、同じ運動をする」
- $f_n$  の固定点  $q$  は、 $m > n$  に対して、 $f_m$  の固定点であり続ける。  
「固定点は  $n$  に依存せず固定点である」

- 固定点  $q$  に対し、 $f_n(x') = q$  を満たす  $x'$  が存在した場合、 $m > n$  に対して、 $f_m(x') = q$  が保たれる。

「固定点と同じ値を持つ  $f_n(x')$  は、 $n$  に依存せず同じ値を保つ」

### 3 安定性とネットワーク

前節末の性質に加えて、固定点のまわりでの安定性が議論できる [3]。  $q$  を固定点としたとき、次図中、掛け網の部分に書くことの出来る連続関数は、 $f_\infty(x) = q$  へ収束する。すなわち、連続関数が固定点まわりにおい



て、傾き  $-1/\epsilon$  と  $1$  の直線に挟まれる領域にあれば、定数関数へと収束する。

一般に、連続な初期関数を選んでシミュレーションを行うと、合成項による折り畳みの効果により、 $f_n$  の追跡は困難となる。以降、この関数方程式で起こっていることを調べるために、区分的に定数関数となっているような初期関数を採用する。固定点まわりのこの安定性からもわかるように、区分的定数関数を採用することは、起こりうることを調べるという目的からは、悪くない<sup>5</sup>。

次図に、区分的にランダムに定数をおいた  $f_0$  と、その時間発展の例を示す。

<sup>5</sup>当然、区分的定数関数の発展先と同じところに行く連続関数が存在するかというのは別の問題である。

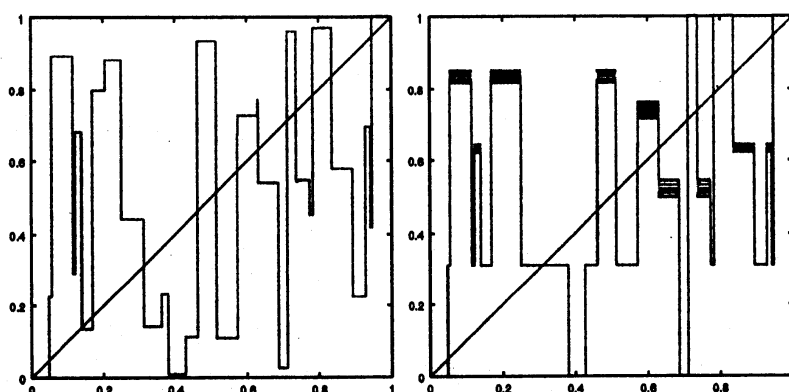


図 4: 左: ランダムに配置した、初期関数。右:  $n$  に対して周期的運動をするようになってからの  $f_n$  を重ね描きしたもの。

## 4 Generated Map

(1) 式で起こっていることを理解するために次の書き換えを行う。

$$\begin{cases} f_{n+1} = g_n \circ f_n \\ g_n(x) := (1 - \varepsilon)x + \varepsilon f_n(x). \end{cases}$$

ここで  $g_n$  を generated map と呼ぶことにする。  $g_n$  は、  $f_n$  によって定められ、次の  $f_{n+1}$  への発展を定めるような関数である。この見方をすると、  $f_0$  が  $g_0$  を定め、それにより  $f_1$  が決まり  $\dots$  といった形で運動を捉えることができる。

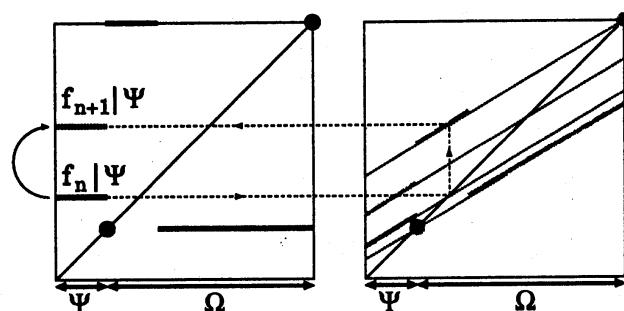


図 5:  $f_n$  のグラフ (左) と対応する  $g_n$  のグラフ (右)。  $f_{n+1}|_{\Psi}$  の値は、  $g_n|_{\Omega}(f_n|_{\Psi})$  によって定まる。

$f_n$  が区分的定数関数であれば、  $g_n$  は、傾き  $0 < 1 - \varepsilon < 1$  を持ち、  $f_n(x)$  でパラメータづけられた関数とみなすことができる。すなわち、  $f_{n+1}(x)$

は、 $f_n(x)$  でパラメータづけられたルールにしたがって時間発展すると考えることが可能である。 $f_n(x)$  を  $x$  の参照先、と呼べば、区分的定数関数の挙動は、参照先が各サイトで同時に切り替わっていくような動的ネットワークの挙動として見ることができる。

以下では、関数が定数を持つ区間  $I_i$  に対し、 $f_n(I_i) \subset I_j$  である場合に、 $j \rightarrow i$  という矢印を描いてネットワークを描くことにする<sup>6</sup>。

## 5 ネットワークの挙動

ここで、下図で与えられるような初期関数を構成してみる。太い線で

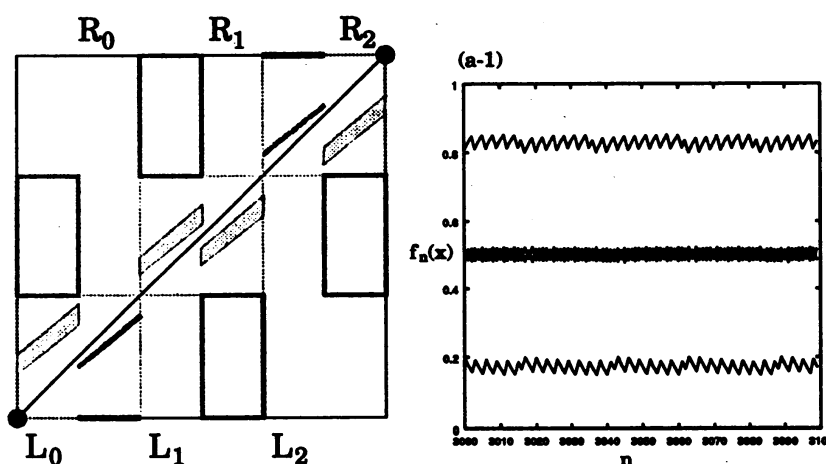


図 6:  $f_n(0) = 0$ ,  $f_n(R_0) = 0$ ,  $f_n(1) = 1$ ,  $f_n|_{L_2} = 1$ ,  $f_n(L_0) \subset L_1 \cup R_1$ ,  $f_n(L_1) \subset L_2 \cup R_2$ ,  $f_n(R_1) \subset L_0 \cup R_0$ ,  $f_n(R_2) \subset L_1 \cup R_1$  となるように、各区間で定数となるような関数を配置する。十分小さな  $\varepsilon$  に対して、各区間の長さは自由 (同じ長さである必要はない)。

描かれた矩形に囲まれた領域に、定数関数が存在するとする。対応する generated map は、図で斜めになっている四角形の中に (傾き  $1 - \varepsilon$  で) 存在する。あるランダムに選んだ初期値から出発して、 $n$  に対して、各  $f_n(L_0)$ ,  $f_n(L_1)$ ,  $f_n(R_1)$ ,  $f_n(R_2)$  の値を重ね書きしたものが、右図である。

このような制限の下で可能なネットワークの種類 (16 種) を、図 6 に示す。図 5 の運動に対応したネットワークの運動を、図 7 に示す。

<sup>6</sup> この矢印の向きは、関数の値を動かした場合に、影響が伝わる向きになっている

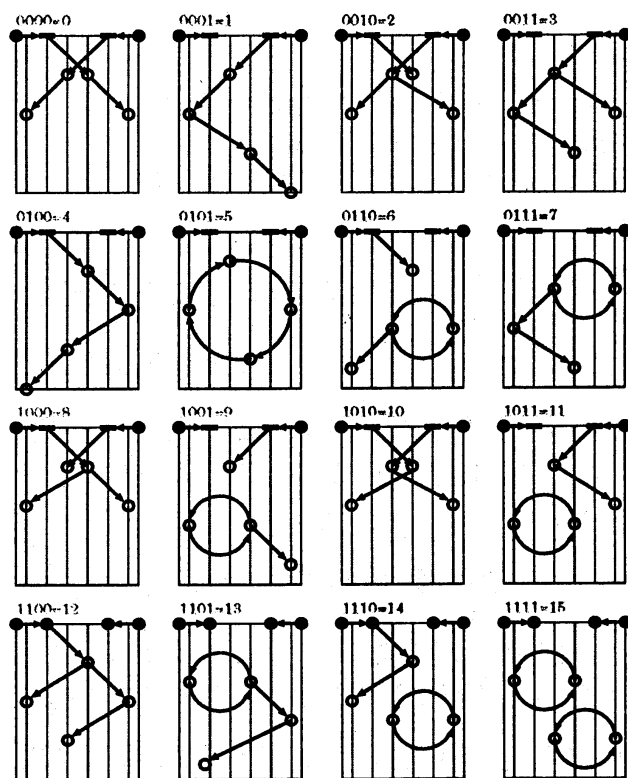


図 7: この制限された初期条件の下で、ネットワークがとりうる配置。

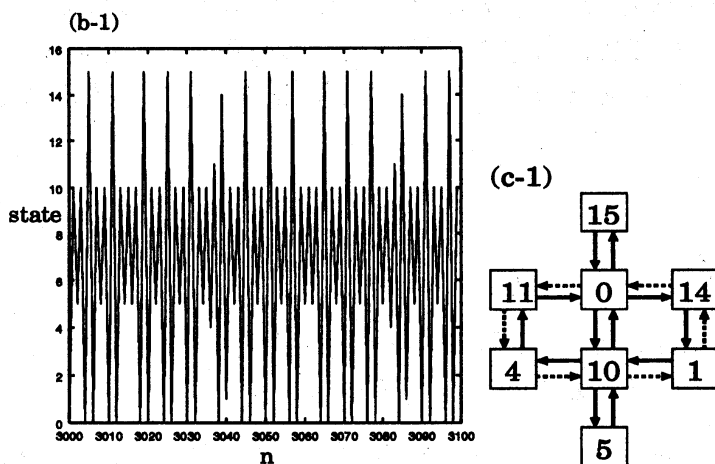


図 8: 図 5 の運動を、ネットワークの運動として見た場合。周期 80 で運動。ネットワークは、 $(0, 15, 0, 10, 5, 10)^7 \cdot (4, 11, 0, 14, 1, 10)^6 \cdot (5, 10)$  の順に形を変え、各区間の運動が、互いに影響を与えあって発展する。



## 6 まとめ

以上では、非常に限定された初期関数に対して例を示して来たが、ある程度以上入り組んだ構造を持つ初期関数は、次のような性質を持つことが、理論的に、または、シミュレーションを行ってきた実感として言うことができる。

- 合成項の効果により、関数は入り組んだ形に発展していく。
- $\varepsilon$  の効果により、関数は、 $n$  に依存する定数関数に収束していく。

generated map という見方を採用することにより、関数マップの挙動を、相互にパラメータづけされたルールのネットワークとしてみる事ができる。そこでは、

- 階層化されたルールの構造が存在しうる [2]。
- $n$  に対し、それぞれが順番にルールを決めあうような、からみあった構造が存在しうる (図7における、ループの存在を参照)。

ことがわかり、シミュレーションからは、そのような挙動が広いクラスとして存在することが予想される。

関数マップは、複雑化と安定性のせめぎあいから、要素 (関数が定数をとる区間) とその運動を決めるネットワークが生成してくるような力学系と見ることができ、自分でルールを決める系、ルールのダイナミクス、といったものを考える際の、ひとつの足掛かりを与えるようなモデルである。

## 参考文献

- [1] N. Kataoka, K. Kaneko "Functional Dynamics I: Articulation Process", Physica D 138 (2000) 225-250.
- [2] N. Kataoka, K. Kaneko, "Functional Dynamics II: Syntactic structure", Physica D 149 (2001) 174-196.
- [3] Y. Takahashi, N. Kataoka, K. Kaneko and T. Namiki, "Function Dynamics", Japan J.Appl.Math., 18 (2001) 405-423.