

On generalized fragmented sets

静岡大学 理 松田 稔 (Minoru Matsuda)

Faculty of Science, Shizuoka University

1 序

この報告は主に、fragmented 集合 (例えば、[2] を参照) の一般化概念として我々により定義された generalized fragmented 集合 (あるいは、generalized Radon-Nikodym 集合とも表記した) について、論文 [4], [5], [6] 及び [7] 等で得られた結果を総合的に纏め、その内容を概説することを目的として構成されたものである。fragmented 集合、あるいは generalized fragmented 集合は、実バナッハ空間の共役空間におけるラドン・ニコディム性 (RNP, あるいは、それと同値な性質) にその源を持つ概念であり、それらの構造を解析することは、共役空間における RNP に関する一般化理論に少なからず寄与する意味からも重要といえる。

先ず、用語や、記法を固定しよう。 X を実バナッハ空間、その共役を X^* とし、 $B(X)$ は X の閉単位球を表すことにする。 (S, Σ, μ) は完備確率測度空間、 (I, Λ, λ) は $I (= [0,1])$ 上のルベーク測度空間とし、以後、 I 上には、 Λ, λ が備わっているものとする。又、 $\Sigma^+ = \{E \in \Sigma : \mu(E) > 0\}$ とする。各 (S, Σ, μ) に対して、 $f : S \rightarrow X^*$ が弱*-可測であるとは、各 $x \in X$ について、 $(x, f(s)) (= (x \circ f)(s))$ と表記が μ -可測であることをいう。有界弱*-可測関数 $f : S \rightarrow X^*$ について、 $T_f(x)$ (resp. $U_f(x)$) $= x \circ f$ ($\forall x \in X$) により、 T_f (resp. U_f) : $X \rightarrow L_1(S, \Sigma, \mu)$ (resp. $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$) の有界線形写像が得られる。 T_f の共役作用素を T_f^* ($: L_\infty(S, \Sigma, \mu) \rightarrow X^*$) で表す。このような f について、 f に対応するベクトル値測度 $\alpha_f : \Sigma \rightarrow X^*$ を、 $\alpha_f(E) = T_f^*(\chi_E)$ ($\forall E \in \Sigma$) で定義する。或るベクトル値測度 $\alpha : \Sigma \rightarrow X^*$ が $\alpha(E) = T_f^*(\chi_E)$ ($\forall E \in \Sigma$) を満たすとき、 α は弱*-密度関数 (weak*-density) f を持つという。

さて次に、この報告における幾つかの基本的概念の定義を与える。先ず、generalized fragmented 集合の概念を与えよう ([4])。以後特に断らな

い限り、 A は X の有界集合を表し、 K は X^* の弱*-コンパクト集合を表すものとする。

定義 1. K が A -fragmented 集合 $\Leftrightarrow K$ の任意の弱*-コンパクト集合 D が、次の性質 (*) を持つ。

(*) $\forall \varepsilon > 0, \exists V : \text{弱*-開集合 s.t. } V \cap D \neq \emptyset \text{ and } \text{diam}_A(V \cap D) (= \sup\{q_A(u^* - v^*) : u^*, v^* \in V \cap D\}, \text{ the } q_A\text{-diameter of } V \cap D) < \varepsilon.$

但し、 $q_A(x^*) = \sup\{|(x, x^*)| : x \in A\} (\forall x^* \in X^*).$

そのとき、 $\text{diam}_A(V \cap D) = \sup\{O(x|V \cap D) : x \in A\}$ であり、 $B(X)$ -fragmented 集合は、明らかに fragmented 集合になる。

さて、このような集合を解析するために我々は新たに、集合 A に依存した A -強可測性 (A -strong measurability), A -RNP を導入しよう ([4])。

定義 2. (1) $(S, \Sigma, \mu) : \text{完備確率測度空間について、} f : S \rightarrow X^* \text{ が } A\text{-強可測であるとは、次の二つの条件を満たすことをいう。}$

(a) f は弱*-可測である。

(b) $\forall \varepsilon > 0 \text{ and } \forall E \in \Sigma^+, \exists F \in \Sigma^+ \text{ with } F \subset E \text{ s.t. } \text{diam}_A(f(F)) < \varepsilon.$

(2) $C : X^*$ の弱*-コンパクト凸集合について、 C が A -RNP を持つとは、次の性質を満たすことをいう。

$\forall (S, \Sigma, \mu), \forall \alpha : \Sigma \rightarrow X^* \text{ s.t. } \alpha(E) \in \mu(E) \cdot C (\forall E \in \Sigma), \text{ について、}$
 $\exists A\text{-強可測関数 } f : S \rightarrow C \text{ s.t.}$

$$(x, \alpha(E)) = \int_E (x, f(s)) d\mu(s)$$

$(\forall E \in \Sigma, \forall x \in X).$

即ち、そのような α が、必ず C -値 A -強可測な弱*-密度関数 f を持つことである。

この定義から容易に判るように、 $B(X)$ -強可測性は強可測性と一致するので、 $B(X)$ -RNP は通常の X^* に対する RNP を意味する。又、 A -強可測性は、その他の概念 (例えば、universal Lusin measurability, GSP 集合) の一般化概念を、我々の設定の下で定義する上でも有効なものとなる。そのために、次の用語を準備する。 X^* の弱*-コンパクト集合 K について、 (K, w^*) (resp. $(K, \|\cdot\|)$) は、弱*-位相 (resp. ノルム-位相) を備えた位相空間 K を表し、 $\mathcal{B}(K, w^*)$ は (K, w^*) 上のボレル σ -algebra を

表す。各 Σ - $\mathcal{B}(K, w^*)$ 可測関数 $f : S \rightarrow K$ について、 $f(\mu)$ は μ の f による像測度を表す。そのとき universal A -strong measurability を、自然に次で定義する。

定義 3. $f : (K, w^*) \rightarrow X^*$ について、 f が *universally A -strongly measurable* であるとは、 (K, w^*) 上の $\forall \nu : \text{Radon probability measure}$ に関して、 f が A -strongly measurable であることをいう。

さらに、universal A -strong measurability との関連で定義される概念であり、Reynov [9] の Radon-Nikodym 集合の一般化概念を産み出すために必要なものとして、次を定義する。

定義 4. (1) F を X^* の部分集合とする。そのとき、 F が *A -totally bounded* (A -全有界) であるとは、次の性質を満たすことをいう。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \{x_1^*, \dots, x_n^*\} \subset F \text{ s.t. } F \subset \bigcup_{j=1}^n B_A(x_j^*, \varepsilon).$$

但し、 $B_A(x_j^*, \varepsilon) = \{x^* \in X^* : q_A(x^* - x_j^*) \leq \varepsilon\}$ ($\forall j$) である。

(2) ν を (K, w^*) 上の Radon probability measure とする。そのとき、 ν が *A -tight* であるとは、次の性質を満たすことをいう。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A\text{-全有界な弱}^*\text{-ボレル集合 } F \subset K \text{ s.t. } \nu(K \setminus F) < \varepsilon.$$

(K, w^*) 上の A -tight Radon probability measure (resp. Radon probability measure) 全体の集合を、以後 $\mathcal{P}_A(K, w^*)$ (resp. $\mathcal{P}(K, w^*)$) で表す。

K -値 A -強可測関数と Stegall [11] による GSP 集合との関係を記述するために有効な概念として、GSP 集合の一般化概念である次を定義する。

定義 5. (1) $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ の部分集合 M が *equimeasurable* であるとは、次の性質を満たすことをいう。

$\forall \varepsilon > 0, \exists E \in \Sigma$ s.t. $\mu(E) > 1 - \varepsilon$ and $\{f \circ \chi_E : f \in M\}$ is relatively compact in $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$.

(2) A が K -GSP 集合であるとは、次の性質を満たすことをいう。

$\forall (S, \Sigma, \mu), \forall f : S \rightarrow K$, 弱*-可測関数について、 $U_f(A)$ is equimeasurable in $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$.

この概念は、GSP 集合の一般化である。実際、 $U : X \rightarrow L_\infty(S, \Sigma, \mu)$, 有界線形写像について、リフティング理論を用いれば $U(A) = U_f(A)$ を

満たす有界弱*-可測関数の存在が判るからである。従って、 $B(X^*)$ -GSP 集合は、GSP 集合に他ならない。

次に凸解析的性質との関係を調べるために必要な概念を定義する。

定義 6. $g : X \rightarrow \mathcal{R}$, を連続凸関数とする。そのとき、

(1) g が点 $x (\in X)$ で *Gateaux differentiable* であるとは、 $\forall y \in X$ について

$$\lim_{t \rightarrow 0} \{g(x + ty) - g(x)\}/t (= Dg(x, y) \text{ と表記})$$

が存在することをいう。

(2) g が点 $x (\in X)$ で *A-differentiable* であるとは、次の性質を満たす $x^* \in X^*$ が存在することをいう。

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \sup_{y \in A} |(g(x + ty) - g(x))/t - (y, x^*)| \right\} = 0.$$

明らかに、 $B(X)$ -differentiability は フレシェ-微分可能性である。

(3) g が点 $x (\in X)$ で *A-uniformly Gateaux differentiable* であるとは、 $Dg(x, y)$ が $y (\in A)$ について一様に存在することをいう。

明らかに、 $B(X)$ -uniform Gateaux differentiability は、フレシェ-微分可能性である。

定義 7. H を X^* の有界部分集合とすると、次で定義される連続凸関数 $c_H : X \rightarrow \mathcal{R}$ を、 H の *support function* (支持関数) という。

$$c_H(x) = \sup\{(x, x^*) : x^* \in H\} (\forall x \in X).$$

又、我々の設定の下で、上述された凸解析的性質や、測度論的性質を得るための重要な幾何的概念として、次を定義する。

定義 8. (1) H を X^* の有界部分集合とする。そのとき、 H の *slice* とは、次の形の集合をいう。

$$S(x, c, H) = \{x^* \in H : (x, x^*) > \sup_{z^* \in H} (x, z^*) - c\}.$$

但し、 $x \in X$ and $c > 0$.

(2) X^* の有界集合 H が *A-weak*-dentable* とは、次の性質を満たすことをいう。

$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ slice } S(x, c, H) \text{ s.t. } \text{diam}_A(S(x, c, H)) < \varepsilon.$

明らかに、 $B(X)$ -weak*-dentability は通常の weak*-dentability に他ならない。

これまでの定義 (即ち、定義 1 ~ 定義 8) から判るように、これらの概念は $A = B(X)$ の場合に従来定義されていたものの、将に自然な一般化である。重要なことは、このような一般化された概念の下でも、それら概念の効果的利用により、相互的解析が可能 (あるいは、直接的解析が可能) であり、次の主定理が得られることである。我々が従来との比較において滑らかさを感じず、その論理展開は、以下で明らかにされることになる。そのことが将に、この報告の眼目でもある。

定理. 次の各陳述は同値である。

- (a) K is A -fragmented.
- (b) The identity map $i : (K, w^*) \rightarrow (K, \|\cdot\|)$ is universally A -strongly measurable.
- (c) $\mathcal{P}_A(K, w^*) = \mathcal{P}(K, w^*)$.
- (d) A is K -GSP.
- (e) $\overline{\text{co}}^*(K)$ is A -fragmented.
- (f) K is separably related to A .
- (g) $\overline{\text{co}}^*(K)$ has the A -RNP.
- (h) Every weak*-compact convex subset of $\overline{\text{co}}^*(K)$ is A -weak*-dentable.
- (i) \forall continuous convex function $g : X \rightarrow \mathcal{R}$ s.t. $\partial g(x) \subset \overline{\text{co}}^*(K)$ ($\forall x \in X$) に対して、 \exists dense G_δ -subset G of X s.t. g is $\text{aco}(A)$ (absolutely convex hull of A)-differentiable at each $x \in G$.
- (j) \forall sequence $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset A, \forall H : \text{nonempty subset of } K$ に対して、 $\exists x \in X$ s.t. c_H is Ψ -uniformly Gateaux differentiable at x , where $\Psi = \{z_n : n \geq 1\}$.

ここで、定理において示される各陳述の同値性に関して、幾つかのコメントを与えよう。

(1) 陳述 (b) は Saab [10] の結果 (RNP を持つ弱*-コンパクト凸集合の universal Lusin measurability による特徴付け) に示唆されたもので、(a), (b) の同値性は、その一般化を与えている。

(2) 陳述 (c) は Reynov [9] の RN 集合の定義から示唆されたもので、

(a), (c) の同値性は、 A -fragmented 集合が、RN 集合の一般化概念であることを示している。

(3) 陳述 (d) は Stegall [11] の結果 (RNP を持つ X^* の GSP 集合による特徴付け) に示唆されたもので、(a), (d) の同値性は、その一般化を与えている。

(4) 陳述 (e) は Matsuda [4] で提出されたものであるが、それと (a) との同値性の我々の証明において、次の基本的事実：弱*-コンパクト集合 K がノルム-可分であるとき、 $\overline{\text{co}}^*(K)$ も又、ノルム可分である、が本質的役割を演じており、改めて、この事実の重要さが再認識される。

(5) 陳述 (f) は Fitzpatrick [1] で提出されたものであるが、ここでは陳述 (f), (h), (i) の同値性が主テーマであり、このことが、 $A = B(X)$, $K = B(X^*)$ の場合の結果に帰着させるという、我々とは異なる論法 (我々以前では、全てがその論法による) により示されている。従って、我々の定理は、それらを含み、かつ一般化した結果となっている。

(6) 陳述 (g) の概念 A -RNP は Matsuda [4] で初めて導入されたものである。この導入により、他の陳述との同値性の直接的証明が容易になったと考えている。特に、陳述 (a), (b), (c), (d), (e), (g), (h) の同値性の証明に威力を発揮しているといえる。又、非 A -fragmented 集合 K の場合に構成される K -値関数を通して、具体的に非 A -RNP に出会うことができるという意味で、将に具体的概念であるといえる。

(7) 陳述 (j) は、Matsuda [4] で提出されたもので、このような性質の凸解析的特徴付け (即ち、連続凸関数の或る種の微分可能性による特徴付け) の原点 (即ち、基本型) といえるものであると考える (従来、このような形で述べられたものが無い上に、微分可能性に関する他の結果は、この結果から示され得る)。なお、同値条件として、この形が可能になったのは、非 A -fragmented 集合の場合に得られた関数に負うたからである。

さて、上述のような意味を持つ定理の証明 (即ち、 A -fragmented 集合の解析) のために採られた我々の論法の最大の特徴は、

(1) 非 A -fragmented 集合 K に対応して K -値弱*-可測関数 h が構成されること、

(2) この具体的関数 h の性質を調べる、
という二点であり、これにより、このような集合の直接的解析が可能となるのである。実際、弱*-可測関数 $h: I \rightarrow K$ は、例えば、次の性質を持った関数であることが示される。

(i) $h(\lambda) \in \mathcal{P}(K, w^*)$ and i is not A -strongly measurable with respect to $h(\lambda)$.

(ii) $h(\lambda) \in \mathcal{P}(K, w^*) \setminus \mathcal{P}_A(K, w^*)$.

(iii) $U_h(A)$ is not equimeasurable in $L_\infty(I, \Lambda, \lambda)$.

(iv) ベクトル値測度 $\alpha_h : \Lambda \rightarrow X^*$ は、 A -strongly measurable weak*-density を持たない。

(v) 適当な $\Psi = \{z_n : n \geq 1\}$ について、 c_H は nowhere Ψ -uniformly Gateaux differentiable in X である。但し、 $H = h(I)$ 。

このように、 K -値関数 h は本定理において重要な役割を持つので、§2 でその構成の概略を注意する。

2 準備

一般にコンパクトハウスドルフ空間 Z において、 Z の互いに素な集合の対の列 $(C_n, D_n)_{n \geq 1}$ が independent であるとは、 $\forall k \geq 1$ と $\forall \{\varepsilon_j\}_{1 \leq j \leq k}$ ($\varepsilon_j = 1$ or -1 , $1 \leq j \leq k$) について $\bigcap_{1 \leq j \leq k} \varepsilon_j C_j \neq \emptyset$ (但し、 $\varepsilon_j C_j = C_j$ if $\varepsilon_j = 1$, $\varepsilon_j C_j = D_j$ if $\varepsilon_j = -1$) であることをいう。

さて、 $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ は (K, w^*) の弱*-閉集合の対の作る independent sequence であるとせよ。そのとき、 $\Gamma = \bigcap_{n \geq 1} (A_n \cup B_n)$ は K の空でない弱*-コンパクト集合である。そして、 $\psi : \Gamma$ (endowed with the w^* -topology $\sigma(X^*, X)$) $\rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{N})$ (: Cantor space with its usual compact metric topology) を $\psi(x^*) = \{j : A_j \ni x^*\} \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ で定義すれば、 ψ は連続全射である。写像 ψ が連続全射であることから、 Γ 上の Radon probability measure γ で $\psi(\gamma) = \nu$ (: $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ を $\{0, 1\}^{\mathcal{N}}$ と同一視したときの正規化されたハール測度) および $\{f \circ \psi : f \in L_1(\mathcal{P}(\mathcal{N}), \Sigma_\nu, \nu)\} = L_1(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ (ここで、 $\Sigma_\nu, \Sigma_\gamma$ は、各々 ν, γ に関して可測な集合全体を表す) を満たすものが得られる。さらに、 $\tau : \mathcal{P}(\mathcal{N}) \rightarrow I$ を、 $\tau(J) = \sum_{j \in J} 1/2^j$ ($\forall J \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$) と定義すれば τ は $\tau(\nu) = \lambda$ および $\{u \circ \tau : u \in L_1(I, \Lambda, \lambda)\} = L_1(\mathcal{P}(\mathcal{N}), \Sigma_\nu, \nu)$ を満たす連続全射である。そのとき、リフティング理論を用いれば、次の性質 (a), (b) を持つ弱*-可測関数 $g : I \rightarrow K$ を得る。

$$(a) \rho(f \circ g)(t) = (f, g(t)) \quad (\forall f \in C(K, w^*), \forall t \in I),$$

$$(b) \int_E (x, g(t)) d\lambda(t) = \int_{\psi^{-1}(\tau^{-1}(E))} (x, x^*) d\gamma(x^*) \quad (\forall E \in \Lambda, \forall x \in X).$$

但し、 ρ は $L_\infty(I, \Lambda, \lambda)$ 上のリフティングを表す。

先ず、性質 (a) から、 g は Λ - $\mathcal{B}(K, w^*)$ 可測関数であり、像測度 $g(\lambda)$ が Radon probability measure on (K, w^*) であることが判る。性質 (a), (b) は、次の初等的な命題 (Lemma 2 in [3]) との結合により、§1 に述べられた h の性質 (i) ~ (v) 等を与えるので、重要である。

命題 1. E_1, E_2, \dots, E_q を Λ^+ の有限個の元とするとき、適当な自然数 p と有限個の非負整数 i_1, i_2, \dots, i_q が存在して、次の (1), (2) が成り立つ。

$$(1) 0 \leq 2i_1, \dots, 2i_q < 2^p - 1,$$

$$(2) E_k \cap I(p, 2i_k), E_k \cap I(p, 2i_k + 1) \in \Lambda^+ \quad (k = 1, \dots, q).$$

但し、 $I(n, j) = (j/2^n, (j+1)/2^n)$ ($n \geq 0, 0 \leq j \leq 2^n - 1$) である。

さて、上述の関数の構成法を利用して、非 A -fragmented 集合 K に対応した弱*-関数に関する結果を与えよう。これが A -fragmented 集合 K を解析するための基本的命題といえる。

命題 2. K は A -fragmented でないと仮定する。そのとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\exists \delta > 0, \exists \text{system} \{x(n, j) : n = 0, 1, \dots; j = 0, \dots, 2^n - 1\} \subset A, \exists \text{system} \{V(n, j) : n = 0, 1, \dots; j = 0, \dots, 2^n - 1\}$ of nonempty weak*-closed subsets of K s.t.

$$(a) V(n+1, 2j) \cup V(n+1, 2j+1) \subset V(n, j),$$

$$(b) \forall x^* \in V(n+1, 2j), \forall y^* \in V(n+1, 2j+1) \text{ について、} (x(n, j), x^* - y^*) \geq \delta \quad (\forall n \geq 0, 0 \leq j \leq 2^n - 1).$$

(2) 陳述 (1) の故に、次の性質を持った関数 $h : I \rightarrow K$ が存在する。

(i) $h(\lambda) \in \mathcal{P}(K, w^*)$ and i is not A -strongly measurable with respect to $h(\lambda)$.

$$(ii) h(\lambda) \in \mathcal{P}(K, w^*) \setminus \mathcal{P}_A(K, w^*).$$

$$(iii) U_h(A) \text{ is not equimeasurable in } L_\infty(I, \Lambda, \lambda).$$

(iv) ベクトル値測度 $\alpha_h : \Lambda \rightarrow X^*$ は、 A -strongly measurable weak*-density を持たない。

(v) c_H は nowhere Ψ -uniformly Gateaux differentiable in X である。

但し、 $H = h(I)$ であり、 $y_n = x(m, j)$ (if $n = 2^m + j, m \geq 0, 0 \leq j \leq 2^m - 1$) と定め、 $\Psi = \{y_n : n \geq 1\}$ とする。

(証) 陳述 (1) は、参考文献 [8] の Proposition 5.6 の証明で、単位球を有界集合 A に置き換えて同一の議論を展開すれば得られる。注意すべきは陳述 (2) の証明である。そのために、(1) で得られた弱*-閉集合の系 $\{V(n, j) : n = 0, 1, \dots; j = 0, \dots, 2^n - 1\}$ を用いて、

$$A_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} V(n, 2j+1), \quad B_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} V(n, 2j)$$

とする。そのとき、 $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ は (K, w^*) の弱*-閉集合の対の作る independent sequence である。従って、この列に対応して、上述のように構成される弱*-可測関数を h とすれば、 $h(\lambda) : \text{Radon probability measure on } (K, w^*)$ であり、

$$(*) \int_E (x, h(t)) d\lambda(t) = \int_{\psi^{-1}(\tau^{-1}(E))} (x, x^*) d\gamma(x^*) \quad (\forall E \in \Lambda, \forall x \in X)$$

が成り立つ。又、

$$(**) \psi^{-1}(\tau^{-1}(I(n, 2j))) \subset V(n, 2j), \quad \psi^{-1}(\tau^{-1}(I(n, 2j+1))) \subset V(n, 2j+1) \quad (j = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1)$$

である。

さて、この h について、(i) ~ (v) を注意しよう。ここでは [7] で示された (i), (ii) の証明のみ記す。

(i) について。そのために、任意に $F \in \mathcal{B}(K, w^*)$ with $h(\lambda)(F) > 0$ をとれ。そのとき、 $\lambda(h^{-1}(F)) > 0$ であるから、命題 1 より自然数 p と非負整数 j を適当にとれば、 $0 \leq 2j < 2^p - 1$, $h^{-1}(F) \cap I(p, 2j), h^{-1}(F) \cap I(p, 2j+1) \in \Lambda^+$ が成り立つ。 $C = h^{-1}(F) \cap I(p, 2j)$, $D = h^{-1}(F) \cap I(p, 2j+1)$ とおく。そのとき性質 (*), (**) を用いて

$$\begin{aligned} \text{diam}_A(i(F)) &= \sup\{O(x|F) : x \in A\} \\ &\geq O(x(p-1, j)|F) \\ &= \sup\{(x(p-1, j), h(t)) : t \in h^{-1}(F)\} \\ &\quad - \inf\{(x(p-1, j), h(t)) : t \in h^{-1}(F)\} \\ &\geq \int_C (x(p-1, j), h(t)) d\lambda(t) / \lambda(C) \\ &\quad - \int_D (x(p-1, j), h(t)) d\lambda(t) / \lambda(D) \\ &= \int_{\psi^{-1}(\tau^{-1}(C))} (x(p-1, j), x^*) d\gamma(x^*) / \lambda(C) \\ &\quad - \int_{\psi^{-1}(\tau^{-1}(D))} (x(p-1, j), x^*) d\gamma(x^*) / \lambda(D) \\ &\geq a(p-1, j) - b(p-1, j) \geq \delta, \end{aligned}$$

を得る。但し、 $a(n, j) = \inf\{(x(n, j), x^*) : x^* \in V(n+1, 2j)\}$,

$b(n, j) = \sup\{(x(n, j), x^*) : x^* \in V(n+1, 2j+1)\}$ である。

従って、 i は $h(\lambda)$ に関して A -強可測関数ではないことが判る。

(ii) について。 $h(\lambda) \in \mathcal{P}_A(K, w^*)$ として矛盾を導く。 $h(\lambda)(F) > 0$ を満たす $F (\in \mathcal{B}(K, w^*))$ をとれ。そのとき、 $\exists G: A$ -全有界弱*-ボレル集合 s.t. $h(\lambda)(G) > 1 - h(\lambda)(F)$ が生じる。このとき、明らかに $h(\lambda)(G \cap F) > 0$ である。 $\forall \varepsilon > 0$ を与えよ。そのとき G の A -全有界性より $\exists \{x_1^*, \dots, x_n^*\} \subset G$ s.t. $G \subset \bigcup_{j=1}^n B_A(x_j^*, \varepsilon/2)$ が生じる。 $G_j = G \cap B_A(x_j^*, \varepsilon/2)$ とすれば、 G_j ($j = 1, \dots, n$) は弱*-ボレル集合で

$$G = \bigcup_{j=1}^n G_j, \text{diam}_A(G_j) \leq \varepsilon$$

を満たしている。従って、

$$\sum_{j=1}^n h(\lambda)(G_j \cap F) \geq h(\lambda)\left(\bigcup_{j=1}^n (G_j \cap F)\right) > 0$$

であるから、 $\exists j$ s.t. $h(\lambda)(G_j \cap F) > 0$ を得る。さらに、

$$\text{diam}_A(i(G_j \cap F)) \leq \text{diam}_A(i(G_j)) \leq \varepsilon$$

を得るので、 i が $h(\lambda)$ に関して A -強可測となり、(i) に矛盾する。

なお、(iii), (iv), (v) については [4] に証明の詳細が記述してあるので、省略する。勿論、証明の論法は、上述 (i), (ii) に類似である。

3 定理の証明

§1 で述べられた定理の証明は、例えば、次の順序に従って与えられる。

(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a). (e) \Leftrightarrow (a) \Leftrightarrow (f). (e) \Rightarrow (g) \Rightarrow (a). (e) \Rightarrow (h) \Rightarrow (i) \Rightarrow (j) \Rightarrow (a). 但し、ここでは主に [7] で示された部分について証明を記す。その他の部分については省略する。[4] 等を参照のこと。

(a) \Rightarrow (b). 任意に $\nu \in \mathcal{P}(K, w^*)$ をとれ。そのとき、 i が ν に関して A -強可測をいう。そのために、 $\forall \varepsilon > 0$ と $\forall F \in \mathcal{B}(K, w^*)$ with $\nu(F) > 0$ をとれ。そのとき、Radon measure の性質から ν により self-support されている弱*-コンパクト集合 $D (\subset F)$ が存在する。 K は A -fragmented であるから、 $\exists V: \text{弱*-開集合 with } V \cap D \neq \emptyset$ s.t. $\text{diam}_A(V \cap D) \leq \varepsilon$ であ

る。従って、 $B = V \cap D$ とすれば、 $\nu(B) > 0$, $B \subset F$ 且つ $\text{diam}_A(i(B)) = \text{diam}_A(V \cap D) \leq \varepsilon$ を得る。即ち、(b) が示された。

(b) \Rightarrow (c). 任意に $\alpha \in \mathcal{P}(K, w^*)$ をとれ。仮定から i は α に関して A -強可測であるから、exhaustion argument により、各自然数 n 毎に \exists disjoint sequence $\{F_k^n\}_{k \geq 1} \subset \mathcal{B}(K, w^*)$ s.t. $\alpha(F_k^n) > 0$ ($\forall k \geq 1$), $\alpha(K \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^n) = 0$ and $\text{diam}_A(F_k^n) \leq 1/2^n$ ($\forall k$) である。任意に $\varepsilon > 0$ を与えよ。そのとき、各 n 毎に自然数 $p(n)$ が存在して、

$$\alpha(K \setminus \bigcup_{k=1}^{p(n)} F_k^n) < \varepsilon/2^n$$

が成り立つ。それ故、 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=1}^{p(n)} F_k^n)$ とすれば、容易に判るように、 F は A -全有界集合で $F \in \mathcal{B}(K, w^*)$ であり、 $\alpha(K \setminus F) \leq \varepsilon$ が成り立つ。即ち、 $\alpha \in \mathcal{P}_A(K, w^*)$ が得られ、(c) が示された。

(c) \Rightarrow (d). 任意の (S, Σ, μ) と弱*-可測関数 $g : S \rightarrow K$ をとれ。そのとき、リフティング理論から、 $\exists \Sigma - \mathcal{B}(K, w^*)$ 可測関数 $f : S \rightarrow K$ s.t. $f(\mu) \in \mathcal{P}(K, w^*)$ and $x \circ g = x \circ f$ μ -a.e. for every $x \in X$ が生じる。このとき、 $i \circ f$ が μ に関して A -強可測であることを示そう。そのために、任意正数 η と $E \in \Sigma^+$ をとり、 $\varepsilon = \mu(E)/2$ とせよ。仮定から $f(\mu) \in \mathcal{P}_A(K, w^*)$ であるから、 $\exists A$ -全有界集合 $F \in \mathcal{B}(K, w^*)$ s.t.

$$f(\mu)(K \setminus F) (= \mu(f^{-1}(K \setminus F)) = \mu(S \setminus f^{-1}(F))) < \varepsilon$$

を得る。 F は A -全有界であるから、 $\exists \{x_1^*, \dots, x_n^*\} \subset F$ s.t. $F \subset \bigcup_{j=1}^n B_A(x_j^*, \eta/2)$ である。それ故、

$$E \cap f^{-1}(F) \subset \bigcup_{j=1}^n (E \cap f^{-1}(B_A(x_j^*, \eta/2)))$$

である。又、 $\varepsilon = \mu(E)/2$ より、 $\mu(E \cap f^{-1}(F)) > 0$ である。従って、 $\exists j$ s.t. $\mu(E \cap f^{-1}(B_A(x_j^*, \eta/2))) > 0$ を得る。よって、 $G = E \cap f^{-1}(B_A(x_j^*, \eta/2))$ とすれば、

$$\begin{aligned} O(i \circ f|G) &\leq O(i \circ f|f^{-1}(B_A(x_j^*, \eta/2))) \\ &= O(i|B_A(x_j^*, \eta/2) \cap K) \\ &\leq \text{diam}_A(B_A(x_j^*, \eta/2)) \leq \eta. \end{aligned}$$

即ち、 $i \circ f$ は μ に関して、 A -強可測である。従って $U_f(A)$ は equimeasurable in $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ となり ([4] の Proposition 3 参照)、 $U_g(A) = U_f(A)$ を用いて、(d) が示された。

(d) \Rightarrow (a). 命題 2 による。以上で (a) \sim (d) の同値性が示された。

(e) \Leftrightarrow (a) \Leftrightarrow (f). [4] の Propositions 4, 5 と Remark 2 を参照。

(e) \Rightarrow (g). $\overline{\text{co}}^*(K) = C$ とする。任意の (S, Σ, μ) と $\alpha : \Sigma \rightarrow X^*$ s.t. $\alpha(E) \in \mu(E) \cdot C$ ($\forall E \in \Sigma$) を与えよ。前段迄の結果により、条件 (e) は $\mathcal{P}(C, w^*) = \mathcal{P}_A(C, w^*)$ を意味するから、(c) \Rightarrow (d) の証明の中で与えたように、 $\exists f : S \rightarrow C$ s.t. $\alpha(E) = T_f^*(\chi_E)$ ($\forall E \in \Sigma$) and $i \circ f$ is A -strongly measurable with respect to μ が得られる。従って $g = i \circ f$ で定義すれば、 g は μ に関して A -強可測な C -値関数であり、しかも $\alpha(E) = T_g^*(\chi_E)$ ($\forall E \in \Sigma$) であるから、 g は、求めるものである。即ち、(g) が示された。

(g) \Rightarrow (a). 命題 2 による。

(e) \Rightarrow (h). 「 $\overline{\text{co}}^*(K)$ が fragmented ならば、その weak*-compact convex subset は weak*-dentable である」という事実の証明において、ノルムをセミノルム q_A に置き換えればよい。

(h) \Rightarrow (i). 通常の論法による。例えば、[1] を参照。

(i) \Rightarrow (j). $\partial_{c_H}(x) \subset \overline{\text{co}}^*(K)$ に注意すれば、明らかである。

(j) \Rightarrow (a). 命題 2 による。

以上で、証明は完結する。

注意. ここでは、位相的性質 (e) から 測度論的性質 (g) (A -RNP) を示したが、[4] では 幾何的性質 (h) を用いて (g) を示している。その証明プロセスが実に自然であることを観れば、性質 (g) を持つための基本的十分条件として、性質 (e), (h) が鑑賞されるであろう。

定理の系として直ちに得られる様々な従来の結果や、関連ある結果については省略する。[5], [6], [7] 等を参照のこと。

参考文献

- [1] S. P. Fitzpatrick, Separably related sets and the Radon-Nikodym property, Illinois J. Math. **29** (1985), 229-247.
- [2] J. E. Jayne, I. Namioka, and C. A. Rogers, Norm fragmented weak* compact sets, Collect. Math. **41** (1990), 133-163.

- [3] M. Matsuda, A characterization of Pettis sets in terms of the Bourgain property, *Math. Japon.* **41** (1995), 433-439.
- [4] M. Matsuda, A generalization of the Radon-Nikodym property in dual Banach spaces, fragmentedness, and differentiability of convex functions, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **35** (1999), 921-933.
- [5] M. Matsuda, Remarks on GSP sets in Banach spaces, *Far East J. Math. Sci.* **2** (2000), 687-694.
- [6] M. Matsuda, An approach to generalized Radon-Nikodym sets and generalized Pettis sets, *Hiroshima Math. J.* **31** (2001), 71-97.
- [7] M. Matsuda, Remarks on generalized fragmented sets in dual Banach spaces, *Far East J. Math. Sci. Special Vol. Part 1* (2001), 81-90.
- [8] R. R. Phelps, Convex functions, monotone operators and differentiability, *Lecture Notes in Math.* **1364** (1989), Springer.
- [9] O. I. Reynov, On a class of Hausdorff compacts and GSG Banach spaces, *Studia Math.* **71** (1981), 113-126.
- [10] E. Saab, A characterization of w^* -compact convex sets with the Radon-Nikodym property, *Bull. Sci. Math. (2)*, **104** (1980), 79-88.
- [11] C. Stegall, The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **264** (1981), 507-519.