数理解析研究所講究録 1246 巻 2002 年 110-122

バナッハ空間におけるRogosinski型近似法について

琉球大・理　西白保敏彦 (Toshihiko Nishishiraho)

1. 序

$C_{2\pi}$は実軸$\mathbb{R}$上で定義された周期2πを持つ連続関数全体のなすバナッハ空間を表す. 各$f\in C_{2\pi}$のノルムは

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : |t| \le \pi\}$$

である. $\mathbb{N}$を正の整数全体の集合とし, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$とおく. また, $\mathbb{Z}$はすべての整数全体の集合を表す. 各$n\in\mathbb{N}_0$に対して, n次のRogosinski作用素は

$$B_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b_n(t)f(x-t)\,dt \qquad (\forall\, f\in C_{2\pi}, x\in\mathbb{R})$$

によって定義される. 但し,

$$b_n(t) = \frac{1}{2}\Big\{D_n\Big(t+\frac{\pi}{2n+1}\Big) + D_n\Big(t-\frac{\pi}{2n+1}\Big)\Big\}$$

であり,

$$D_n(u) = \sum_{j=-n}^{n} e^{iju} \qquad (\forall\, u\in\mathbb{R})$$

はn次のDirichlet核である (cf. [3, 13, 14]). fのFourier級数を

$$f(t) \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijt} \qquad (\forall t\in\mathbb{R})$$

とし, その第n部分和を

$$S_n(f)(t) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)e^{ijt}$$

とすれば,

$$B_n(f)(x) = \frac{1}{2}\Big\{S_n(f)\Big(x+\frac{\pi}{2n+1}\Big) + S_n(f)\Big(x-\frac{\pi}{2n+1}\Big)\Big\}$$

と表される. さて, 次の収束定理が成り立つ ([1, Proposition 1.3.4] 参照):

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(f)-f\|_\infty = 0 \qquad (\forall\, f\in C_{2\pi}). \tag{1}$$

各$n \in \mathbb{N}_0$に対して, $\mathfrak{T}_n$はn次以下の三角多項式全体の集合を表し, $f \in C_{2\pi}$と$\mathfrak{T}_n$の間の距離を

$$E_n(C_{2\pi}; f) = \inf\{\|f-g\|_\infty : g \in \mathfrak{T}_n\}$$

と書き, これを$\mathfrak{T}_n$に関するfのn次最良近似度と言う. $\mathfrak{T}_n$はHaarの条件を満たす$2n+1$次元の線形部分空間であるから, 任意の$f \in C_{2\pi}$は唯一の最良近似g_nを持つ. すなわち,

$$E_n(C_{2\pi}; f) = \|f-g_n\|_\infty$$

となる$g_n \in \mathfrak{T}_n$が一意に存在する (例えば, [11, 定理 6.1.8] 参照). 古典的なWeierstrassの三角多項式近似定理は

$$\lim_{n\to\infty} E_n(C_{2\pi}; f) = 0 \qquad (\forall\, f \in C_{2\pi})$$

と同値である.

各$f \in C_{2\pi}$, $\delta \geq 0$に対して,

$$\omega(C_{2\pi}; f, \delta) = \sup\{\|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_\infty : |t| \leq \delta\},$$

$$\omega^*(C_{2\pi}; f, \delta) = \sup\{\|f(\cdot + t) + f(\cdot - t) - 2f(\cdot)\|_\infty : 0 \leq t \leq \delta\}$$

はそれぞれfの連続率, fの一般連続率と呼ばれる ([1, Definitions 1.5.1 and 1.5.3], cf. [19]). 常に,

$$\omega^*(C_{2\pi}; f, \delta) \leq 2\omega(C_{2\pi}; f, \delta) \qquad (\forall\, f \in C_{2\pi},\ \delta \geq 0)$$

及び

$$\lim_{\delta\to+0} \omega(C_{2\pi}; f, \delta) = 0, \quad 従って, \quad \lim_{\delta\to+0} \omega^*(C_{2\pi}; f, \delta) = 0 \qquad (\forall\, f \in C_{2\pi})$$

が成立する. 更に, (1) は次のような評価式で精密化される:

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq (2\pi+1)E_n(C_{2\pi}; f) + \frac{1}{2}\omega^*\Big(C_{2\pi}; f, \frac{\pi}{2n+1}\Big) \quad (\forall\, f \in C_{2\pi},\ n \in \mathbb{N}_0)$$

([1, Theorem 2.4.8]), 従って,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq (2\pi+1)E_n(C_{2\pi}; f) + \omega\Big(C_{2\pi}; f, \frac{\pi}{2n+1}\Big) \quad (\forall\, f \in C_{2\pi},\ n \in \mathbb{N}_0)$$

([6, Chap. 10, Sec. 4, Theorem]).

同様な事が$1 \leq p < \infty$とし, $\mathbb{R}$上で周期2πを持ち, 且つ$[-\pi, \pi]$上でp乗絶対ルベーグ可積分関数fの全体で

$$\|f\|_p = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\, dt\Big)^{1/p}$$

をノルムとするバナッハ空間 $L^p_{2\pi}$ においても成り立つ.

本講演では, 一般のバナッハ空間において Fourier 展開の視点から Rogosinski 型の作用素を導入し, それによる近似問題を考える. 更に, $C_{2\pi}$ や $L^p_{2\pi} (1 \le p < \infty)$ を含む一般の斉次バナッハ空間の場合への応用を試みる. 従って, 上で述べた結果が一般化される. 詳細な取り扱いについては, [12] を参照.

2. マルチプライヤー作用素

X をバナッハ空間とし, $B[X]$ は X からそれ自身への有界線形作用素全体のなす通常の作用素ノルム $\|\cdot\|_{B[X]}$ を持つバナッハ環を表す. $\mathfrak{P} = \{P_j : j \in \mathbb{Z}\}$ は $B[X]$ に属する射影作用素の列で次の条件を満たすとする:

(P-1) $\quad P_j P_k = \delta_{j,k} P_j \quad (\forall j, k \in \mathbb{Z})$. ここで, $\delta_{j,k}$ は Kronecker のデルタ関数を表す.

(P-2) $\cup_{j \in \mathbb{Z}} P_j(X)$ で生成される線形部分空間は X で稠密である.

(P-3) すべての $j \in \mathbb{Z}$ に対して, $P_j(f) = 0$ ならば $f = 0$ である.

任意の $f \in X$ に対して, その $\mathfrak{P}$ に関する (形式的な)Fourier 級数

$$f \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(f). \tag{2}$$

を考える. $T \in B[X]$ が X 上のマルチプライヤー作用素であるとは, スカラー列 $\{\tau_j : j \in \mathbb{Z}\}$ が存在してすべての $f \in X$ に対して,

$$T(f) \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j(f)$$

が成り立つことである. そして, 次の表記法を用いる:

$$T \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j$$

(cf. [2, 7, 8, 17]). $M[X]$ は X 上のすべてのマルチプライヤー作用素全体の集合を表す. これは $B[X]$ の恒等作用素 I を含む可換な閉部分環である. $\mathfrak{T} = \{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ は $M[X]$ に属する作用素の族で

$$A = \sup\{\|T_t\|_{B[X]} : t \in \mathbb{R}\} < \infty,$$

$$T_t \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ijt} P_j \qquad (\forall\, t \in \mathbb{R}). \tag{3}$$

とする. このとき, $\mathfrak{T}$ は線形作用素の強連続群に成り, その生成作用素 G の定義域を $D(G)$ とすれば

$$G(f) \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-ij)P_j(f) \qquad (\forall\, f \in D(G))$$

が成立する ([7, Proposition 2]).

各 $r \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\Delta_t^0 = I, \quad \Delta_t^r = (T_t - I)^r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} T_{kt} \qquad (r \geq 1)$$

と置く. このとき, Δ_t^r は $M[X]$ に属し,

$$\|\Delta_t^r\|_{B[X]} \leq A_r \ (\forall\, t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}_0),$$

但し,

$$A_r = \min\{(A+1)^r, 2^r A\},$$

そして

$$\Delta_t^r \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} (e^{-ijt} - 1)^r P_j \qquad (\forall\, t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}_0)$$

が成り立つ. 各 $r \in \mathbb{N}_0, f \in X, \delta \geq 0$ に対して,

$$\omega_r(X; f, \delta) = \sup\{\|\Delta_t^r(f)\|_X : |t| \leq \delta\}$$

と定義し, これを $\mathfrak{T}$ に関する f の r 次連続率という. これが持つ基本的な性質の 1 つは

$$\omega_{r+s}(X; f, \delta) \leq A_r \omega_s(X; f, \delta) \qquad (\forall\, r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}_0, \delta \geq 0, f \in X),$$

特に

$$\lim_{\delta \to +0} \omega_r(X; f, \delta) = 0 \qquad (\forall\, f \in X, r \in \mathbb{N}_0)$$

である ([9, Lemma 1 (c)]).

$r \in \mathbb{N}, \alpha > 0$ とする. X の要素 f がオーダー α と定数 $K > 0$ を持つ r 次 Lipschitz 条件を満たす, またはクラス $Lip_r(X; \alpha, K)$ に属するとは,

$$\omega_r(X; f, \delta) \leq K\delta^\alpha \qquad (\forall\, \delta \geq 0)$$

が成り立つことである. また,

$$Lip_r(X; \alpha) = \bigcup_{K>0} Lip_r(X; \alpha, K)$$

はオーダーαのr次 Lipschitz クラスと呼ばれる.

各$f \in X, \delta \geq 0$に対して,

$$\omega(X; f, \delta) = \omega_1(X; f, \delta) = \sup\{\|T_t(f) - f\|_X : |t| \leq \delta\}$$

$$\omega^*(X; f, \delta) = \sup\{\|T_t(f) + T_{-t}(f) - 2f\|_X : 0 \leq t \leq \delta\}$$

と定義する (cf. [7, Definitions 3 and 4]). このとき,

$$\frac{1}{A}\omega_2(X; f, \delta) \leq \omega^*(X; f, \delta) \leq A\omega_2(X; f, \delta) \qquad (\forall\, f \in X, \delta \geq 0) \tag{4}$$

が成立する. 従って, 特に, $A \leq 1$ (よって, $A = 1$) ならば

$$\omega_2(X; f, \delta) = \omega^*(X; f, \delta) \qquad (\forall\, f \in X, \delta \geq 0)$$

である.

$\alpha > 0$とする. $Lip^*(X; \alpha)$はある定数$K > 0$に対して

$$\omega^*(X; f, \delta) \leq K\delta^\alpha \qquad (\forall\, \delta \geq 0)$$

を満たす$f \in X$の全体から成るクラスを表す. (4) によって,

$$Lip_2(X; \alpha) = Lip^*(X; \alpha) \qquad (\forall\, \alpha > 0).$$

任意の$n \in \mathbb{N}_0$に対して, M_nは$\{P_j(X) : |j| \leq n\}$で生成される線形部分空間を表す. これはXの閉線形部分空間である. 各$f \in X$に対して,

$$E_n(X; f) = \inf\{\|f - g\|_X : g \in M_n\}$$

と定義し, これをM_nに関するfのn次最良近似度という. ノルム空間における最良近似理論の解説については, [11] を参照. 明らかに,

$$E_0(X; f) \geq E_1(X; f) \geq \cdots \geq E_n(X; f) \geq \cdots \geq 0 \qquad (\forall\, f \in X)$$

で, 条件 (P-2) によって

$$\lim_{n \to \infty} E_n(X; f) = 0 \qquad (\forall\, f \in X)$$

3. Rogosinski 型作用素

$\chi \in L^1_{2\pi}, W \in M[X]$ で

$$W \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j P_j$$

とする. このとき, 任意の $f \in X$ に対して

$$(\chi * W)(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t) T_t(W(f))\, dt$$

は常に Bochner 積分として存在する. これによって定義される作用素 $\chi * W$ を χ と W からつくられる合成積作用素という (cf. [7, 9]). $\chi * W$ は $B[X]$ に属し,

$$\|\chi * W\|_{B[X]} \le A\|\chi\|_1 \|W\|_{B[X]} \tag{5}$$

である. 更に, $\chi * W$ は $M[X]$ に属し,

$$\chi * W \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(j) \lambda_j P_j \tag{6}$$

が成り立つ ([10, Lemma 1], cf. [9, Lemma 2]).

補題 1 すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\chi(\cdot - t) * W = T_t(\chi * W) \tag{7}$$

が成立する.

証明 (6) によって,

$$\chi(\cdot - t) * W \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ijt} \hat{\chi}(j) \lambda_j P_j \qquad (\forall\, t \in \mathbb{R}). \tag{8}$$

$\forall\, j \in \mathbb{Z}, f \in X$ とする. このとき, (8), (6) 及び (3) によって,

$$P_j((\chi(\cdot - t) * W)(f)) = e^{-ijt} \hat{\chi}(j) \lambda_j P_j(f)$$

$$= e^{-ijt} P_j((\chi * W)(f)) = P_j(T_t((\chi * W)(f))).$$

従って, 条件 (P-3) によって, (7) が成り立つ.

さて, 各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して, n 次 Rogosinski 型作用素 R_n を

$$R_n(f) = (b_n * I)(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b_n(t) T_t(f)\, dt \qquad (\forall\, f \in X)$$

によって定義する. 各 $n \in \mathbb{N}_0$に対して, S_nを Fourier 級数 (2) による第 n 部分和作用素とする:

$$S_n = \sum_{j=-n}^{n} P_j \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}_0).$$

補題 2 すべての $n \in \mathbb{N}_0$に対して,

$$R_n = \frac{1}{2}\Big(T_{\pi/(2n+1)} + T_{-\pi/(2n+1)}\Big)S_n = \sum_{k=-n}^{n} \cos\Big(\frac{k\pi}{2n+1}\Big)P_j \tag{9}$$

が成立する.

証明 (6) に鑑み,

$$S_n = D_n * I \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}_0).$$

従って, 補題 1 によって

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{2}\Big\{D_n\Big(\cdot + \frac{\pi}{2n+1}\Big) * I + D_n\Big(\cdot - \frac{\pi}{2n+1}\Big) * I\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{T_{-\pi/(2n+1)}(D_n * I) + T_{\pi/(2n+1)}(D_n * I)\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big(T_{-\pi/(2n+1)} + T_{\pi/(2n+1)}\Big)S_n. \end{aligned}$$

また,

$$b_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \cos\Big(\frac{k\pi}{2n+1}\Big)e^{ikt} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}_0,\ t \in \mathbb{R})$$

と表されるから, (6) によって (9) の第 2 の等式も成立する.

補題 3 各 $k \in \mathbf{Z}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} n^2\Big(\cos\Big(\frac{k\pi}{2n+1}\Big) - 1\Big) = -\frac{1}{8}(k\pi)^2 \tag{10}$$

が成立する.

証明

$$\cos t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}t^{2j} \qquad (\forall\, t \in \mathbb{R})$$

であるから,

$$n^2\Big(\cos\Big(\frac{k\pi}{2n+1}\Big) - 1\Big) = -\frac{1}{2}(k\pi)^2\Big(\frac{n}{2n+1}\Big)^2 + I_n(k),$$

ここで

$$I_n(k) = n^2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\Big(\frac{k\pi}{2n+1}\Big)^{2j}.$$

$$\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2 \to \frac{1}{4}, \quad |I_n(k)| \leq \frac{n^2}{(2n+1)^4}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(k\pi)^{2j}}{(2j)!} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

故に, (10) が成り立つ.

補題 4 すべての $n \in \mathbb{N}_0$に対して,

$$\|b_n\|_1 < \pi\left(1 + \frac{1}{4}\log 3 + \frac{2\sqrt{3}}{27}\right) < 2\pi$$

が成立する.

証明 これは [6, Chap. 10, Sec. 4, Lemma] の証明から従う.

定理 1 すべての $f \in X, n \in \mathbb{N}_0$に対して,

$$\|R_n(f) - f\|_X \leq A(1+B)E_n(X;f) + \frac{1}{2}\omega^*\left(X; f, \frac{\pi}{2n+1}\right) \tag{11}$$

が成立する. 但し,

$$B = \pi\left(1 + \frac{1}{4}\log 3 + \frac{2\sqrt{3}}{27}\right).$$

従って, 特に

$$\|R_n(f) - f\|_X \leq A(1+B)E_n(X;f) + \omega\left(X; f, \frac{\pi}{2n+1}\right).$$

証明 $\forall\, g \in M_n$とする. このとき, $S_n(g) = g$であるから, 補題 2 によって,

$$\begin{aligned}
R_n(g) - f &= \frac{1}{2}\left(T_{\pi/(2n+1)} + T_{-\pi/(2n+1)}\right)(g) - f \\
&= \frac{1}{2}\left(T_{\pi/(2n+1)} + T_{-\pi/(2n+1)}\right)(g - f) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\{T_{\pi/(2n+1)}(f) + T_{-\pi/(2n+1)}(f) - 2f\right\}.
\end{aligned}$$

故に,

$$\begin{aligned}
\|R_n(g) - f\|_X &\leq \frac{1}{2}(\|T_{\pi/(2n+1)}\|_{B[X]} + \|T_{-\pi/(2n+1)}\|_{B[X]})\|g - f\|_X \\
&\quad + \frac{1}{2}\|T_{\pi/(2n+1)}(f) + T_{-\pi/(2n+1)}(f) - 2f\|_X \\
&\leq A\|g - f\|_X + \frac{1}{2}\omega^*\left(X; f, \frac{\pi}{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

従って, (5) に鑑み,

$$\|R_n(f) - f\|_X \leq \|R_n(f - g)\|_X + \|R_n(g) - f\|_X$$

$$\leq \|R_n\|_{B[X]}\|f-g\|_X + A\|g-f\|_X + \frac{1}{2}\omega^*\Big(X; f, \frac{\pi}{2n+1}\Big)$$
$$\leq A(\|b_n\|_1+1)\|f-g\|_X + \frac{1}{2}\omega^*\Big(X; f, \frac{\pi}{2n+1}\Big).$$

故に, 補題 4 によって, (11) が成り立つ.

系 1 $\mathfrak{R} = \{R_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ は X 上の近似法である:

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n(f) - f\|_X = 0 \qquad (\forall\, f \in X).$$

補題 5 すべての $f \in X, n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$E_n(X; f) \leq K\omega^*\Big(X; f, \frac{1}{n}\Big)$$

が成立する. ここで, Kは fと n に依存しない正の定数である.

証明 [9, Theorem 2] において, $r = 2$ の場合を考え, (4) を用いる.

$F[\mathfrak{R}]$ を $\mathfrak{R} = \{R_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ の共通不動点集合とする:

$$F[\mathfrak{R}] = \bigcap_{n=0}^{\infty}\{f \in X : R_n(f) = f\}$$

以下においては, 各 $f \in X$に対して M_nに関する fの最良近似が存在すると仮定する.

補題6 $0 < \alpha < 2$ とする. このとき,

$$Lip^*(X; \alpha) = \{f \in X : E_n(X; f) = O(n^{-\alpha}) \quad (n \to \infty)\}.$$

証明 これは, (4) と [10, Corollary 9 (b)] から従う.

定理 2 $f \in X$とする. このとき, 次のことが成立する:

(a) $0 < \alpha < 2$ とする. このとき

$$f \in Lip^*(X; \alpha) \iff \|R_n(f) - f\|_X = O\big(n^{-\alpha}\big) \quad (n \to \infty).$$

(b)

$$f \in Lip^*(X; 2) \implies \|R_n(f) - f\|_X = O(n^{-2}) \quad (n \to \infty).$$

(c)

$$f \in M_0 \iff f \in F[\mathfrak{R}] \iff \|R_n(f) - f\|_X = o(n^{-2}) \quad (n \to \infty).$$

証明 (a): $f \in Lip^*(X, \alpha)$ とすれば, 定理 1 及び補題 5 によって

$$\|R_n(f) - f\|_X = O\Big(E_n(X; f) + \omega^*\Big(X; \frac{\pi}{2n+1}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty)$$
$$= O\Big(\omega^*\Big(\frac{\pi}{2n+1}\Big)\Big) = O(n^{-\alpha}) \qquad (n \to \infty).$$

逆に, $\|R_n(f)-f\|_X = O(n^{-\alpha})$ $(n\to\infty)$ ならば, 補題 2 によって

$$E_n(X;f) \le \|R_n(f)-f\|_X = O(n^{-\alpha}) \qquad (n\to\infty).$$

従って, 補題 6 によって f は $Lip^*(X;\alpha)$ に属する.

(b): (a) において, 必要性はすべての $\alpha>0$ に対して成り立つことに注目すればよい.

(c): $f\in M_0$ とすれば, $f=P_0(f)$ であるから, 補題 2 と条件 (P-1) によって

$$R_n(f) = \sum_{k=-n}^{n}\cos\Big(\frac{k\pi}{2n+1}\Big)P_k(P_0(f)) = P_0(f) = f \qquad (\forall\, n\in\mathbb{N}_0).$$

再び, 補題 2 と条件 (P-1) によって, すべての $j\in\mathbf{Z}, f\in X$ に対して,

$$P_j(R_n(f)) = \begin{cases}\cos\Big(\frac{j\pi}{2n+1}\Big)P_j(f) & (|j|\le n)\\ 0 & (|j|>n)\end{cases}$$

が成立する. 今, $\forall\, j\in\mathbf{Z}, f\in F[\mathfrak{R}]$ とする. このとき,

$$P_j(f) = P_j(P_0(f)) \qquad (j=0).$$

$0<|j|\le n$ ならば,

$$\Big(\cos\Big(\frac{j\pi}{2n+1}\Big)-1\Big)P_j(f) = P_j(R_n(f)) - P_j(f) = 0$$

であるから $P_j(f)=0$. 従って,

$$P_j(f) = 0 = \delta_{j,0}P_0(f) = P_j(P_0(f)) \qquad (0<|j|\le n).$$

また,

$$P_j(P_0(f)) = 0 = P_j(R_n(f)) = P_j(f) \qquad (|j|>n).$$

故に, 条件 (P-3) によって $f=P_0(f)\in M_0$. さて, $\|R_n(f)-f\|_X = o(n^{-2})$ $(n\to\infty)$ と仮定する. このとき, 補題 2, 補題 3 及び [8, Proposition 1 (i)] (cf. [2, Theorem 6.1 (b)]) によってすべての $n\in\mathbb{N}_0$ に対して $R_n(f)=f$ が成り立つ.

注意 1 $\{f_j : j\in\mathbf{Z}\}$ と $\{f_j^* : j\in\mathbf{Z}\}$ はそれぞれ X と X^* (X の共役空間) の中の要素列で, システム $\mathfrak{F}=\{f_j, f_j^*\}_{j\in\mathbf{Z}}$ は次の条件を満たすとする (cf. [5, 16]):

(F-1) $f_j^*(f_k)=\delta_{j,k}$ $(\forall\, j,k\in\mathbf{Z})$.

(F-2) $\{g_j : j\in\mathbf{Z}\}$ で生成される線形部分空間は X で稠密である.

(F-3) すべての $j\in\mathbf{Z}$ に対して, $f_j^*(f)=0$ ならば $f=0$ である.

このとき,

$$P_j(f) = f_j^*(f)f_j \qquad (\forall\, j\in\mathbf{Z}, f\in X)$$

と定義すれば, $\mathfrak{P}=\{P_j : j\in\mathbb{Z}\}$ は条件 (P-1), (P-2) 及び (P-3) を満たす. そして, (2), (3) はそれぞれ

$$f \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j^*(f)f_j \qquad (\forall\, f\in X),$$

$$T_t(f) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ijt} f_j^*(f)f_j \qquad (\forall\, f\in X, t\in\mathbb{R})$$

と同じである. 従って, この設定の下で 2 節及び 3 節の結果が適用される.

3. 斉次バナッハ空間

本節においては, Xは斉次バナッハ空間とする. 即ち, Xは次の条件を満たす関数空間である (cf. [4, 7, 15, 18]):

(H-1) Xは $L^1_{2\pi}$ の線形部分空間でそれ自身ノルム $\|\cdot\|_X$を持つバナッハ空間である.

(H-2) ある定数 $K>0$ が存在して, $\|f\|_1\le K\|f\|_X$ $(\forall\, f\in X)$ である.

(H-3) 各 $t\in\mathbb{R}$ に対して, 右移動作用素 T_tを $T_t(f)(\cdot)=f(\cdot-t)$ $(\forall\, f\in X)$ によって定義するとき, T_tは $B[X]$ に属する等距離的作用素である.

(H-4) 任意の $f\in X$に対して, 写像 $t\mapsto T_t(f)$ は $\mathbb{R}$ 上で強連続である.

斉次バナッハ空間の典型的な例は $C_{2\pi}$や $L^p_{2\pi}$ $(1\le p<\infty)$ である. その他の例については, [7] (cf. [4, 15, 18]) を参照.

さて,

$$f_j(t)=e^{ijt}, \quad f_j^*(f)=\hat{f}(j) \qquad (\forall\, j\in\mathbb{Z},\ t\in\mathbb{R},\ f\in X)$$

と定義する. このとき, $\mathfrak{F}=\{f_j,f_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}$は条件 (F-1), (F-2) 及び (F-3) を満たす. そこで,

$$P_j(f)(\cdot)=\hat{f}(j)e^{ij\cdot} \qquad (\forall\, j\in\mathbb{Z}, f\in X)$$

と定める (注意 1 参照). 各 T_tは展開 (3) を持ち $A=1$ である. また,

$$\omega_2(X;f,\delta)=\omega^*(X;f,\delta) \qquad (\forall\, f\in X, \delta\ge 0),$$

$$M_n=\mathfrak{T}_n \qquad (\forall\, n\in\mathbb{N}_0)$$

である.

結局, 前節までに得られたすべての結果が上述の設定に下で適用される. 特に, 系 1, 定理 1, 定理 2 はそれぞれ [1, Proposition 1.3.4] (cf. [6, Chap. 10, Sec. 4, Corollary]), [1, Theorem 2.4.8] (cf. [6, Chap. 10, Sec. 4, Theorem]), [1, Theorem 2.4.9] を一般の斉次バナッハ空間の場合へ拡張する.

参考文献

[1] P. L. Butzer and R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation, Vol. I*, Academic Press, New York, 1971.

[2] P. L. Butzer, R. J. Nessel and W. Trebels, *On summation processes of Fourier expansions in Banach spaces. I. Comparison theorems*, Tôhoku Math. J., **24** (1972), 127-140; *II. Saturation theorems.* ibid., 551-569: *III. Jackson- and Zamansky-type inequalities for Abel-bounded expansions*, ibid., **27** (1975), 213-223.

[3] G. H. Hardy and W. W. Rogosinski, *Fourier Series, 3rd ed.*, Cambridge Univ. Press, 1965.

[4] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley, New York, 1968.

[5] V. D. Milman, *Geometric theory of Banach spaces I: The theory of bases and minimal systems*, Russian Math. Surveys, **25** (1970), 111-170.

[6] I. P. Natanson. *Constructive Function Theory, Vol. I: Uniform Approximation*, Frederick Ungar, New York, 1964.

[7] T. Nishishiraho, *Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **33** (1981), 109-126.

[8] T. Nishishiraho, *Saturation of multiplier operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **34** (1982), 23-42.

[9] T. Nishishiraho, *The degree of the best approximation in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **46** (1994), 13-26.

[10] T. Nishishiraho, *Inverse theorems for the best approximation in Banach spaces*, Math. Japon., **43** (1996), 525-544.

[11] 西白保敏彦, 最良近似理論と関数解析, 横浜図書, 2000.

[12] T. Nishishiraho, *Approximation by convex sums of convolution type operators in Banach spaces*, J. Nonlinear and Convex Analysis, **2** (2001), 91-103.

[13] W. W. Rogosinski, *Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen*, Math. Ann. **95** (1925), 110-134.

[14] W. W. Rogosinski, *Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen*, Math. Z., **25** (1926), 132-149.

[15] H. S. Shapiro, *Topics in Approximation Theory*, Lecture Notes in Math. Vol. **187**, Springer-Verlag, Berlin·Heidelberg·New York, 1971.

[16] I. Singer, *Bases in Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin·Heidelberg·New York, 1970.

[17] W. Trebels, *Multiplier for (C, α)-Bounded Fourier Expansions in Banach Spaces and Approximation Theory*, Lecture Notes in Math. Vol. **329**, Springer-Verlag, Berlin·Heidelberg·New York, 1973.

[18] H. C. Wang, *Homogeneous Banach Algebras*, Marcel Dekker Inc., New York·Basel, 1977.

[19] A. Zygmund, *Smooth functions*, Duke Math. J., **12** (1945), 47-76.