数理解析研究所講究録 1250 巻 2002 年 72-81

複素力学系の双加群が生成する C*環
― 多項式の場合 ―

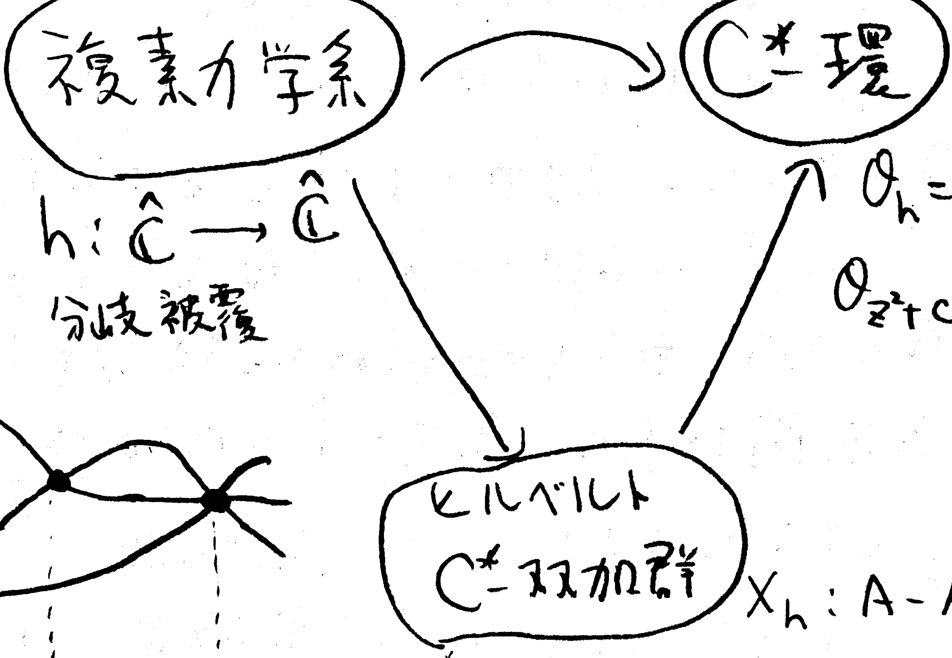
Okayama Univ. Kajiwara, Tsuyoshi
岡山大環境理工 梶原毅
九州大数理 綿谷安男
Kyushu Univ. Watatani, Yasuo

1 はじめに

複素力学系の世界と作用素環の世界を結ぶ何らかの架橋(かけはし)をつくりたいと願ってきたが、ここではそれへの1つのささやかな試みを提案する。もちろん本当にこれでうまくゆくかは、しばらくはこの方向でやってみないとわからない。

多項式や有理関数 h を複素平面 $\mathbb{C}$ やリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の複素力学系とみるとそれは非常に深くて興味ある対象である。その反復合成の点列 $(h^{\circ n})_n$ の挙動を反映するような C*環 $\mathcal{O}_h$ をうまく構成できないかを考えてみる。

全体を図式化してみよう。



$h:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$

分岐被覆

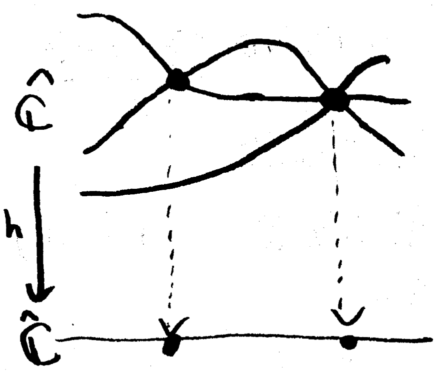
$\mathcal{O}_h=\mathcal{O}_{X_h}$

$\mathcal{O}_{z^2+c}$?

X_h : A-A 双加群

J_h は h の Julia set

$A=C(J_h)$



点列 $(h^n(z))_n$ の挙動は大きくわけると、安定している点 z と不安定でカオス的な点 z の2つになり、前者の点の集まりが Fatou set F_h、後者の点の集まりが Julia set J_h とよばれている。ここでは構成した C*環 $\mathcal{O}_h$ が単純になるように意図するので、最初から Julia set J_h に力学系を制限する。有理関数 $h:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ は分岐被覆になるので、$A=C(J_h)$ 上のヒルベルト双加群 X_h を経由して特異点の困難に向かう。

2 複素力学系

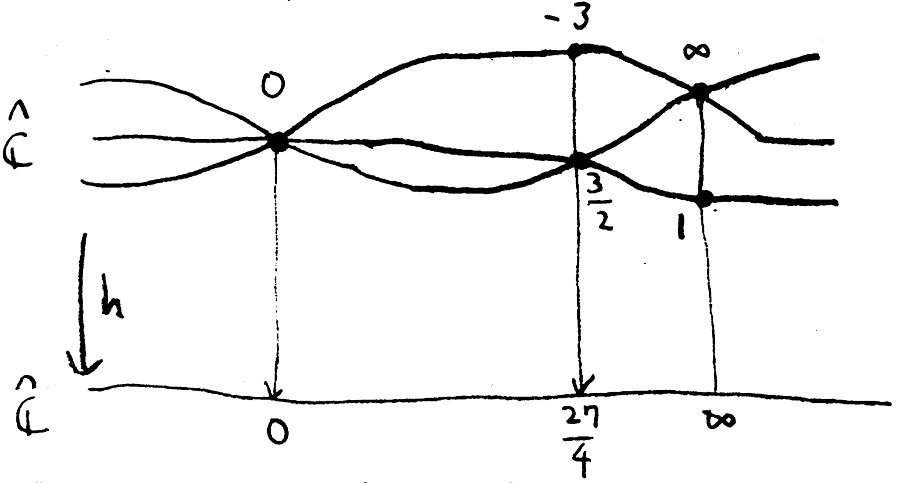
2次以上の多項式もしくは有理関数hをリーマン球面$\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$上の変換 $h:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ とみなし、その反復合成からなる複素力学系$(h^n)_n$を考えよう。すると $h:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ は有限コの点で分岐をもつ分岐被覆になる。記号をきめるため少し復習をする

Def hを有理関数とし、点$z_0\in\hat{\mathbb{C}}$でのhの<u>分岐指数</u>をe_{z_0}とかこう。つまり

critical point

$$e_{z_0}=\begin{cases} 1 & (z_0 \text{ が } h \text{ の分岐点ではない}) \quad \text{i.e. } h'(z_0)\neq 0 \\ k & \left(\begin{array}{l} z_0 \text{ が } h \text{ の分岐点であり} \\ z_0 \text{ のある近傍 } U_{z_0}\setminus\{z_0\} \text{ で } h \text{ は } k:1 \end{array}\right) \end{cases}$$

例 $h(z)=\dfrac{z^3}{z-1}$ の時の分岐分布図を「次元を落として」かいてみると、



$e_0=3$

$e_{-3}=1$

$e_{\frac{3}{2}}=2$

$e_\infty=2$

$e_1=1$

例 hが多項式なら $h'(z_0)=0$ で $h(z)-h(z_0)=(z-z_0)^k g(z)$ と$(z-z_0)$をちょうどkコ因子にもつとき $e_{z_0}=k$。 $g(z_0)\neq 0$

今回は簡単のため以下 h を2次以上の多項式の場合のみを考えよう。すると ∞ はジュリア集合には入らないし，ジュリア集合の定義も正規族なしで

p3.

$\boxed{\text{Def}}$ $I_h := \{ z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n \to \infty} |h^n(z)| = \infty \}$

を h の発散点集合

$K_h := \mathbb{C} \setminus I_h$ を h の充填ジュリア集合

$J_h := \partial K_h$ を h のジュリア集合

注 ① I_h は開かつ連結

② K_h はコンパクト

③ J_h はコンパクト

④ $E = I_h$ も K_h も J も完全不変集合

つまり $h(E) = h^{-1}(E) = E$

そこで h をジュリア集合上に制限した力学系

$$h|_{J_h} : J_h \longrightarrow J_h$$

を考えることができる。

例 $h(z) = z^n$ とすると

$I_h = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1 \}$, $K_h = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$

$J_h = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ なので

$h|_{J_h}(z) = z^n$ は $T(\theta) = n\theta \pmod 1$ on $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$\boxed{例}$ $h(z)=z^2-2$ とすると

$I_h=\mathbb{C}\setminus[-2,2]$, $K_h=[-2,2]$

$J_h=[-2,2]$ なので

hをジュリア集合 J_h に制限した $h|_{J_h}$ はテント写像と位相共役になる。

$\boxed{3}$ ヒルベルト双加群の構成

hを2次以上の有理関数とすると分岐する点は有限コでそこでの分岐指数も degree h におさえられる: $\forall w\in\hat{\mathbb{C}}$ $\sum_{z\in h^{-1}(w)} e_z = \mathrm{degree}\,h$

くわしくは、次の「Riemann-Hurwitzの関係」

$$\sum_z (e_z-1) = 2\,\mathrm{degree}\,h-2$$

が成立している。そこで h が有理関数なら分岐が有限で押さえられるのでうまく $A=C(J_h)$ 値内積が定義できる。これ以外の超越関数の場合は困難であり、将来の課題である。

ジュリア集合 J_h 上の連続関数のつくる可換 C^*環を $A=C(J_h)$ とする。hのグラフを考えよう。

$g:=\mathrm{graph}(h|_{J_h})$

$=\{(x,y)\in J_h\times J_h \mid y=h(x)\}$

$X_0 := C(\mathcal{G})$ を次で A−A 双加群とみる
$a, b \in A = C(J_h)$, $f \in X_0$ に対し

$$(a \cdot f \cdot b)(x, y) = a(x) f(x, y) b(y)$$

X_0 上に次で A 値右内積 $(\mid)_A$ を入れる:
$f, g \in X_0 = C(\mathcal{G})$ に対し, $y \in J_h$

$$(f \mid g)_A (y) := \sum_{x \in h^{-1}(y)} e_x \overline{f(x, y)}\, g(x, y)$$

Lemma
$$\begin{array}{ccc} J_h & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ y & \longmapsto & (f \mid g)_A (y) \end{array}$$
は連続になる

つまり $(f \mid g)_A$ は $A = C(J_h)$ となり well-defined

$\boxed{\text{Def}}$ X_0 を $\|f\| = \|(f \mid f)_A\|^{1/2}$ で完備したもの
X_h はヒルベルト双加群になる。これを h に付随するヒルベルト双加群とよぶ。

(注) X_h は full で 左からの作用 $\phi : A \to \mathcal{L}(X_h)$ は 1:1 になる。

(注) h の分岐点が Julia 集合に含まれないものばかりなら X_h は有限生成だが, そうでないと可算生成である。

例 $h(z) = z^2 \Rightarrow X_h$は有限生成

例 $h(z) = z^2 - 2 \Rightarrow X_h$は有限生成にはならない。

4 C^*-環 $\mathcal{O}_h$ の構成

Def hを2次以上の多項式とする。X_hをhに付随するヒルベルト双加群とする。$\mathcal{O}_h$をX_hから生成されるCuntz–Pimsner環[P]とする。$\mathcal{O}_h \coloneqq \mathcal{O}_{X_h}$.

つまり$\mathcal{O}_h$は$\{S_f \mid f \in X\}$とAから生成されて次の関係をみたすuniversalなC^*-環である

- $S_f \cdot a = S_{fa}$ $\qquad f, g \in X$
- $a \cdot S_f = S_{af}$ $\qquad a \in A$
- $S_f^* S_g = (f|g)_A$
- もし $a \in \phi^{-1}(K(X_A))$ なら $\varphi(\phi(a)) = a$

ここで $\varphi : K(X_A) \longrightarrow \mathcal{O}_X$ *homoは

$\varphi(\theta_{f,g}) = S_f S_g^*$ となるもの

注① $\theta_{f,g}(r) = f(g|r)_A$: "rank one" 作用素

このような$\{\theta_{f,g} \mid f, g \in X\}$のspanの閉包が$K(X_A)$

② 実際の構成はX上のfull Fock space

$F(X) = A \oplus X \oplus X \otimes_A X \oplus X \otimes_A X \otimes_A X \oplus \cdots$ のcreation作用素全体T_Xのある商としてつくる。

(注) Deaconu - Muhly [DM] も分岐被覆に C^* 環を対応させていて大変興味深い。しかし、私たちの構成とは少し異なるし、できた C^* 環も一般的には同型ではない。

$\boxed{\text{Theorem}}$ h を 2 次以上の多項式とする

$\Rightarrow$ $\mathcal{O}_X$ はいつでも単純環である。

さらに h の分岐点がすべて発散点であれば $n = \text{degree}(h)$ として $\mathcal{O}_h \cong \mathcal{O}_n$ と n コの生成元をもつ Cuntz 環に同型になる。

(注) J. Schweizer [S] の定理を適用する。
[KPW] でわかる時もあるが。

(例) $h_c(z) = z^2 + c$ と 2 次式の時を考える

Mandelbrot 集合を M で表わそう。

$$M := \{c \in \mathbb{C} \mid (h_c^n(z))_n \text{ が有界列}\}$$

① $c \notin M$ $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{h_c} \cong \mathcal{O}_2$ (Cuntz 環)

$$K_0(\mathcal{O}_{h_c}) = 0, \quad K_1(\mathcal{O}_{h_c}) = 0$$

② c が M の主カージオイド $\{c \in \mathbb{C} \mid c = \alpha - \alpha^2, |\alpha| < \frac{1}{2}\}$ の内部

$\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{h_c}$ は $K_0(\mathcal{O}_{h_c}) = \mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{O}_{h_c}) = \mathbb{Z}$

③ $c = -2$ $\Rightarrow$ $h|_{J_h}$ はテント写像と共役で

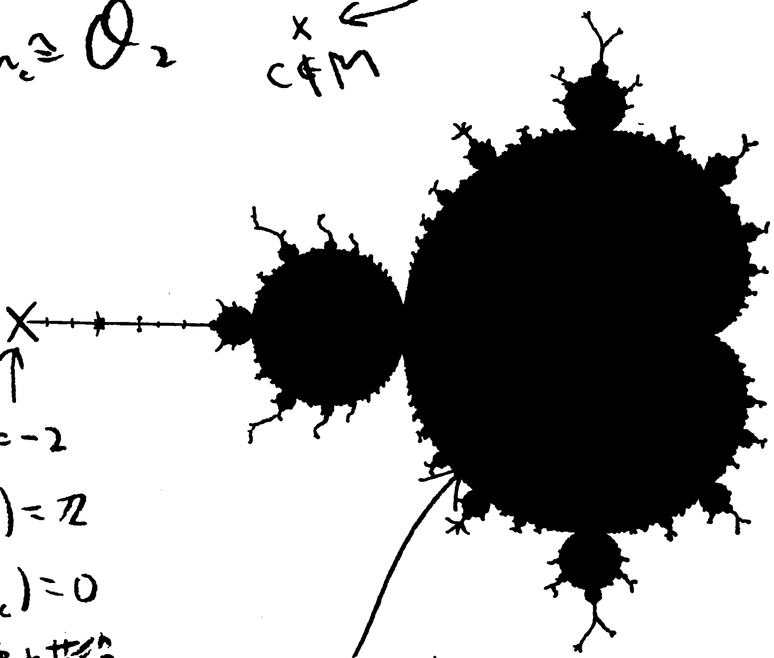
$$K_0(\mathcal{O}_{h_c}) = \mathbb{Z} \quad , K_1(\mathcal{O}_{h_c}) = 0$$

⟨$h_c(z)=z^2+c$ の時の図示⟩

Mandelbrot 集合Mの外では Cuntz 環
$\mathcal{O}_{h_c}\cong\mathcal{O}_2$

$\begin{cases} K_0(\mathcal{O}_{h_c})=0 \\ K_1(\mathcal{O}_{h_c})=0 \end{cases}$

$c\notin M$



$c=-2$

$\begin{cases} K_0(\mathcal{O}_{h_c})=\mathbb{Z} \\ K_1(\mathcal{O}_{h_c})=0 \end{cases}$

テント写像と共役

cがこの主カージオイドの中

$K_0(\mathcal{O}_{h_c})\cong\mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{O}_{h_c})\cong\mathbb{Z}$

$\mathcal{O}_{h_c}^{\mathbb{T}}$ は Bunce-Deddence 環

例 $h(z)=z^n$ の時

$K_0(\mathcal{O}_h)\cong\mathbb{Z}$

$K_1(\mathcal{O}_h)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$

gauch action による fixed point algebra

$\mathcal{O}_h^{\mathbb{T}}$ は n^∞ 型の Bunce-Deddence 環

≪ References ≫

[DM] V. Deaconu and P. S. Muhly, C^*-algebras associated with branched coverings, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2000), 1077–1086

[KPW] T. Kajiwara, C. Pinzari and Y. Watatani, Ideal structure and simplicity of the C^*-algebras generated by Hilbert bimodules, J. Funct. Anal. 159 (1998), 295–322

[P] M. V. Pimsner, A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz–Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$, Field Institute Communications 12 (1997), 189–212

[S] J. Schweizer, Dilations of C^*-correspondences and the simplicity of Cuntz–Krieger algebras, J. Funct. Anal. 180 (2001), 404–425.