

# Cohomology of infinite Coxeter groups

筑波大学大学院数理物質科学研究科

保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)

## §1 序

本研究では、有限生成な無限 Coxeter group の cohomology を調べることを目的としている。Coxeter group は以下のように定義される。

集合  $S$  と写像  $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  で次の条件をみたすものを考える。

- (1) すべての  $s, t \in S$  について  $m(s, t) = m(t, s)$ ,
- (2) すべての  $s \in S$  について  $m(s, s) = 1$ ,
- (3) 相異なるすべての  $s, t \in S$  について  $m(s, t) \geq 2$ .

このような  $S$  と  $m$  によって

$$W = \langle S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ for } s, t \in S \rangle$$

と表現される群  $W$  を *Coxeter group* とよぶ。そして  $(W, S)$  の組みを *Coxeter system* とよぶ。

Coxeter group の歴史は古く、その由来は、鏡映によって生成される有限群 (有限鏡映群) が上記のような表現をもつ有限群として特徴付けられることを H. S. M. Coxeter が証明したことによる。現在では有限無限を問わず、上記のような表現をもつ群は Coxeter group とよばれる。有限な Coxeter group については [B] にみられるように、完全に分類が与えられるなど、ある程度のことがわかっているのだが、無限な場合についてはまだほとんど分かっていない状況にある。本研究では、直接扱うことの難しい無限の Coxeter group に対して、Coxeter system から定義される幾何的な対象を扱うことによって、Coxeter group の cohomology に関する情報を得ることを目的とし

ている。特にここでは、M. W. Davis によって [D3] の中で与えられた有限生成な無限 Coxeter group の cohomology に関する公式を改良し、Coxeter group の cohomology について考察する。

## §2 Coxeter system から定義される空間

群と空間の cohomology に関しては次の同型が知られている。

**Proposition 1** ([Br, Proposition VIII.7.5]).  $\Gamma$  を群,  $X$  を free  $\Gamma$ -complex とする。もし  $X/\Gamma$  が compact ならば, 次の同型が成り立つ:

$$H^*(\Gamma, \mathbf{Z}\Gamma) \cong H_c^*(X),$$

ただし  $H_c^*(X)$  は  $X$  の compact support の cohomology である。

Coxeter group  $W$  は, 常に finite index な torsion-free subgroup  $\Gamma$  を持つことが知られている。以下で, この  $\Gamma$  が free, cocompact に作用する contractible CW complex を定義する。

まず, parabolic subgroup の定義を与える。

**Definition.** Coxeter system  $(W, S)$  と  $T \subset S$  に対して,  $W_T$  を  $T$  によって生成される  $W$  の部分群と定義し, parabolic subgroup と呼ぶ。

このとき pair  $(W_T, T)$  はまた Coxeter system となることが知られている ([B])。もし  $T$  が空集合ならば  $W_T$  は trivial group である。

次に Coxeter system からある simplicial complex を構成する。

**Definition.** Coxeter system  $(W, S)$  に対して, simplicial complex  $L(W, S)$  を次で定義する:

- (1)  $L(W, S)$  の vertex set を  $S$  とする。
- (2)  $S$  の空でない部分集合  $T$  は,  $W_T$  が有限のときに限り  $L(W, S)$  の simplex を張るとする。

このとき,  $S$  の部分集合  $S'$  について,  $L(W_{S'}, S')$  は  $L(W, S)$  の subcomplex となっていることに注意する。

*Remark.* いま  $(W_1, S_1)$  と  $(W_2, S_2)$  を Coxeter system とする。このとき  $(W_1 \times W_2, S_1 \cup S_2)$  と  $(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)$  は Coxeter system となる。

実際, 各  $i = 1, 2$  について

$$W_i = \langle S_i \mid (st)^{m_i(s,t)} = 1 \text{ for } s, t \in S_i \rangle$$

と表せているとき,  $m, m' : S_1 \cup S_2 \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$  を

$$m(s, t) := \begin{cases} m_1(s, t) & \text{if } s, t \in S_1 \\ m_2(s, t) & \text{if } s, t \in S_2 \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$m'(s, t) := \begin{cases} m_1(s, t) & \text{if } s, t \in S_1 \\ m_2(s, t) & \text{if } s, t \in S_2 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると

$$W_1 \times W_2 = \langle S_1 \cup S_2 \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ for } s, t \in S_1 \cup S_2 \rangle$$

$$W_1 * W_2 = \langle S_1 \cup S_2 \mid (st)^{m'(s,t)} = 1 \text{ for } s, t \in S_1 \cup S_2 \rangle$$

と表すことができる。

また, simplicial complex  $L(W, S)$  については

$$L(W_1 \times W_2, S_1 \cup S_2) = L(W_1, S_1) * L(W_2, S_2) \quad (\text{simplicial join})$$

$$L(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2) = L(W_1, S_1) \cup L(W_2, S_2) \quad (\text{disjoint union})$$

が成り立つ。

本稿では, Coxeter system  $(W, S)$  について,  $S$  は常に有限集合であるものとする。

最後に Coxeter system からある contractible space を定義する。

**Definition.**  $(W, S)$  を Coxeter system とする。このとき, 離散位相を入れた  $W$  と  $L(W, S)$  の cone  $CL(W, S)$  の基底空間  $|CL(W, S)|$  の積  $W \times |CL(W, S)|$  上の同値関係  $\sim$  を次で定める:  $(w_1, x_1), (w_2, x_2) \in W \times |CL(W, S)|$  について

$$(w_1, x_1) \sim (w_2, x_2) \iff x_1 = x_2 \text{ and } w_1^{-1}w_2 \in W_{V(x_1)},$$

ただし  $V(x) = \{s \in S \mid x \in \text{St}(s, \text{sd } L(W, S))\}$ . ここで,  $\text{St}(s, \text{sd } L(W, S))$  は  $L(W, S)$  の重心細分  $\text{sd } L(W, S)$  における  $s$  の closed star をあらわす。このとき,

$$\Sigma(W, S) := (W \times |CL(W, S)|) / \sim$$

と定義する。

ここで

$$w \cdot [u, x] = [wu, x]$$

( $w \in W, [u, x] \in \Sigma(W, S)$ ) によって  $W$  は  $\Sigma(W, S)$  に自然に作用する。

また,  $\Sigma(W, S)$  は contractible となり ([D1]), 1-skeleton が  $W$  の  $S$  に関する Cayley graph となるような CW-complex とみなすことができる ([D2]) ことが知られている。

Coxeter group  $W$  の finite index な torsion-free subgroup  $\Gamma$  は,  $\Sigma(W, S)$  に free, cocompact に作用する。よって Proposition 1 より

$$H^*(\Gamma, \mathbf{Z}\Gamma) \cong H_c^*(\Sigma(W, S))$$

が成り立つ。実際は更に

$$H^*(W, \mathbf{Z}W) \cong H^*(\Gamma, \mathbf{Z}\Gamma) \cong H_c^*(\Sigma(W, S))$$

が成り立つことが知られている ([D3])。

### §3 Davis の定理

M. W. Davis によって与えられた Coxeter group  $W$  の cohomology  $H^*(W, \mathbf{Z}W)$  の公式を紹介する。

まず, いくつか定義を与える。

**Definition.** Coxeter system  $(W, S)$  について

$$S^f(W, S) := \{T \subset S \mid W_T \text{ is finite}\}$$

と定める。ここで, 空集合は常に  $S^f(W, S)$  に属することに注意する。

**Definition.**  $(W, S)$  を Coxeter system とする。

各  $w \in W$  について

$$S(w) := \{s \in S \mid \ell(ws) < \ell(w)\}$$

と定める。ただし  $\ell(w)$  は  $w$  の  $S$  に関する length である。

更に, 各  $T \subset S$  に対して

$$W^T := \{w \in W \mid S(w) = T\}$$

と定める。

Davis は  $H_c^*(\Sigma(W, S))$  を調べることにより, 次の定理を証明した。

**Theorem 2 (Davis [D3]).** Coxeter system  $(W, S)$  に対して次の同型が成り立つ:

$$H^*(W, ZW) \cong \bigoplus_{T \in S^f(W, S)} (\mathbf{Z}(W^T) \otimes \tilde{H}^{*-1}(L(W_{S \setminus T}, S \setminus T))),$$

ただし  $\mathbf{Z}(W^T)$  は free abelian group on  $W^T$  を表し,  $\tilde{H}^*$  は reduced cohomology を表す。

この公式からわかるように,  $H^i(W, ZW)$  が (アーベル群として) 無限生成となる必要十分条件は, ある  $T \in S^f(W, S)$  で,  $W^T$  が無限集合となり,  $\tilde{H}^{i-1}(L(W_{S \setminus T}, S \setminus T)) \neq 0$  となるものが存在することである。

このように,  $W^T$  の元の個数は,  $H^i(W, ZW)$  が有限生成となるか無限生成となるかに関わる係数であるのだが, 定義からもわかるように, 実際に直接求めることは困難である。次の section では,  $\tilde{H}^*(L(W_{S \setminus T}, S \setminus T))$  が自明でない場合に  $W^T$  の元の個数がどのようになるのかを調べ, 上で述べた Davis の定理をより単純にすることを考える。

## §4 $W^T$ について

まず補題を用意する。

**Lemma 3** (cf. [D3, Lemma 1.10]).  $(W, S)$  を Coxeter system,  $T \in S^f(W, S)$  とする。このとき、次は同値:

- (1)  $W^T$  は一点集合
- (2)  $W = W_{S \setminus T} \times W_T$
- (3) 各  $s \in S \setminus T, t \in T$  に対して  $st = ts$ .

群の cohomology に関して、次の F. T. Farrell の結果がある。

**Theorem 4** (Farrell [F]).  $\Gamma$  を type FP の finitely presented な群とし、

$$n = \min\{i \mid H^i(\Gamma, \mathbf{Z}\Gamma) \neq 0\}$$

とする。このとき  $H^n(\Gamma, \mathbf{Z}\Gamma)$  が有限生成なアーベル群ならば、 $\Gamma$  は  $n$ -dimensional Poincaré duality group となる。すなわち

$$H^i(\Gamma, \mathbf{Z}\Gamma) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$$

をみたす。

$W^T$  の元の個数  $|W^T|$  に関して次の補題を示すことに成功した。

**Lemma 5.**  $(W, S)$  を Coxeter system,  $T \in S^f(W, S)$  とする。もし  $2 \leq |W^T| < \infty$  ならば、 $L(W_{S \setminus T}, S \setminus T)$  は contractible となる。

*Idea.*  $2 \leq |W^T| < \infty$  と仮定すると、Lemma 3 より、 $s_0 \in S \setminus T, t_0 \in T$  で  $m(s_0, t_0) \neq 2$  となるものが存在する。このとき、Theorem 4 を用いて

$$L(W_{S \setminus T}, S \setminus T) = s_0 * L(W_{S \setminus (\{s_0\} \cup T)}, S \setminus (\{s_0\} \cup T))$$

を示すことによりこの補題を証明した。

**Definition.**  $W = W_T \times W_{S \setminus T}$  と分解しないとき、Coxeter system  $(W, S)$  は irreducible であるという。

いま Coxeter 系  $(W, S)$  に対して一意的に定まる  $S$  の部分集合  $\tilde{S}$  の定義を

**Definition.** Coxeter system  $(W, S)$  に対して, まず既約分解

$$W = W_{S_1} \times \dots \times W_{S_r}$$

を考え (すなわち各  $(W_{S_i}, S_i)$  は irreducible),

$$\tilde{S} := \bigcup \{S_i \mid W_{S_i} \text{ is infinite}\}$$

と定義する。

ここで, 定義から

$$W = W_{\tilde{S}} \times W_{S \setminus \tilde{S}}$$

が成り立ち,  $S \setminus \tilde{S} \in \mathcal{S}^f(W, S)$  となることに注意する。

Lemma 5 から更に議論を重ねることにより,  $|W^T|$  に関して次の補題を得ることができる。

**Lemma 6.**  $(W, S)$  を Coxeter system,  $T \in \mathcal{S}^f(W, S)$  とする。もし  $L(W_{S \setminus T}, S \setminus T)$  が contractible でないならば,

$$|W^T| = \begin{cases} 1, & \text{if } T = S \setminus \tilde{S} \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

## §5 Coxeter group の cohomology について

Lemma 6 を用いることにより, Theorem 2 は次のように書き換えることができる。

**Theorem 7.**  $(W, S)$  を Coxeter system とするとき, 次の同型が成り立つ:

$$H^*(W, \mathbb{Z}W) \cong \tilde{H}^{*-1}(L(W_{\tilde{S}}, \tilde{S})) \oplus \left( \bigoplus_{S \setminus \tilde{S} \neq T \in \mathcal{S}^f(W, S)} \bigoplus_{\mathbb{Z}} \tilde{H}^{*-1}(L(W_{S \setminus T}, S \setminus T)) \right).$$

この Theorem 7 により, 次の系を得ることができる。

**Corollary 8.** Coxeter system  $(W, S)$  に対して, 次は同値:

- (1)  $H^i(W, \mathbf{Z}W)$  は有限生成
- (2)  $H^i(W, \mathbf{Z}W) \cong \tilde{H}^{i-1}(L(W_{\tilde{S}}, \tilde{S}))$
- (3) 各  $T \in \mathcal{S}^f(W, S) \setminus \{S \setminus \tilde{S}\}$  について  $\tilde{H}^{i-1}(L(W_{S \setminus T}, S \setminus T)) = 0$ .

**Corollary 9.** Coxeter systems  $(W_1, S_1), (W_2, S_2)$  に対して, もし  $W_1$  と  $W_2$  が自明でないならば,  $n \geq 2$  について

$$H^n(W_1 * W_2, \mathbf{Z}(W_1 * W_2)) \cong \bigoplus_{\mathbf{Z}} \left( H^n(W_1, \mathbf{Z}W_1) \oplus H^n(W_2, \mathbf{Z}W_2) \right)$$

が成り立ち, また  $n = 1$  については

$$H^1(W_1 * W_2, \mathbf{Z}(W_1 * W_2)) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{if } W_1 * W_2 \cong \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \dots, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

*Proof.* まず  $n \geq 2$  の場合を考える。いま  $(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)$  は irreducible なので,  $S := S_1 \cup S_2$  とすると

$$\tilde{S} = S_1 \cup S_2$$

である。また,

$$L(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2) = L(W_1, S_1) \cup L(W_2, S_2)$$

より,

$$\tilde{H}^{n-1}(L(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)) \cong \tilde{H}^{n-1}(L(W_1, S_1)) \oplus \tilde{H}^{n-1}(L(W_2, S_2))$$

が成り立つ。同様に,

$$\mathcal{S}^f(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2) = \mathcal{S}^f(W_1, S_1) \cup \mathcal{S}^f(W_2, S_2)$$

より, 各  $T \in \mathcal{S}^f(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)$  について

$$\begin{aligned} & \tilde{H}^{n-1}(L(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)) \\ & \cong \begin{cases} \tilde{H}^{n-1}(L((W_1)_{S_1 \setminus T}, S_1 \setminus T)) \oplus \tilde{H}^{n-1}(L(W_2, S_2)), & \text{if } T \in \mathcal{S}^f(W_1, S_1) \\ \tilde{H}^{n-1}(L(W_1, S_1)) \oplus \tilde{H}^{n-1}(L((W_2)_{S_2 \setminus T}, S_2 \setminus T)), & \text{if } T \in \mathcal{S}^f(W_2, S_2) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。以上のことから、Theorem 7 を適用することにより以下の同型を得る:

$$\begin{aligned}
& H^n(W_1 * W_2, \mathbf{Z}(W_1 * W_2)) \\
& \cong \tilde{H}^{n-1}(L(W_1, S_1)) \oplus \tilde{H}^{n-1}(L(W_2, S_2)) \\
& \oplus \left( \bigoplus_{\emptyset \neq T_1 \in \mathcal{S}^f(W_1, S_1)} \bigoplus_{\mathbf{Z}} \left( \tilde{H}^{n-1}(L((W_1)_{S_1 \setminus T_1}, S_1 \setminus T_1)) \oplus \tilde{H}^{n-1}(L(W_2, S_2)) \right) \right) \\
& \oplus \left( \bigoplus_{\emptyset \neq T_2 \in \mathcal{S}^f(W_2, S_2)} \bigoplus_{\mathbf{Z}} \left( \tilde{H}^{n-1}(L(W_1, S_1)) \oplus \tilde{H}^{n-1}(L((W_2)_{S_2 \setminus T_2}, S_2 \setminus T_2)) \right) \right) \\
& \cong \bigoplus_{\mathbf{Z}} \left( \bigoplus_{T_1 \in \mathcal{S}^f(W_1, S_1)} \tilde{H}^{n-1}(L((W_1)_{S_1 \setminus T_1}, S_1 \setminus T_1)) \right. \\
& \quad \left. \oplus \bigoplus_{T_2 \in \mathcal{S}^f(W_2, S_2)} \tilde{H}^{n-1}(L((W_2)_{S_2 \setminus T_2}, S_2 \setminus T_2)) \right) \\
& \cong \bigoplus_{\mathbf{Z}} \left( H^n(W_1, \mathbf{Z}W_1) \otimes H^n(W_2, \mathbf{Z}W_2) \right).
\end{aligned}$$

最後に  $n = 1$  の場合を考える。いま  $\tilde{H}^*$  は reduced cohomology なので,

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^0(L(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)) \oplus \mathbf{Z} & \cong H^0(L(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)) \\
& \cong H^0(L(W_1, S_1)) \oplus H^0(L(W_2, S_2)) \\
& \cong \tilde{H}^0(L(W_1, S_1)) \oplus \tilde{H}^0(L(W_2, S_2)) \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}
\end{aligned}$$

となる。このことを踏まえて  $n \geq 2$  の場合と同様の議論を行うことにより

$$H^1(W_1 * W_2, \mathbf{Z}(W_1 * W_2)) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{if } W_1 * W_2 \cong \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \dots, & \text{otherwise} \end{cases}$$

を得る。■

## References

- [B] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chapters IV-VI, Masson, Paris, 1981.
- [Br] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

- [D1] M. W. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. **117** (1983), 293–324.
- [D2] M. W. Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, Handbook of Geometric Topology, Elsevier, to appear.
- [D3] M. W. Davis, *The cohomology of a Coxeter group with group ring coefficients*, Duke Math. J. **91** (no.2) (1998), 297–314.
- [Dr] A. N. Dranishnikov, *On the virtual cohomological dimensions of Coxeter groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (no.7) (1997), 1885–1891.
- [F] F. T. Farrell, *Poincaré duality and groups of type (FP)*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 187–195.
- [H] T. Hosaka, *On the cohomology of Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra **162** (2001), 291–301.
- [Hu] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.
- [M] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. thesis, The Ohio State University, 1988.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA, TSUKUBA-SHI, IBARAKI, 305-8571, JAPAN

*E-mail address:* thosaka@math.tsukuba.ac.jp