数理解析研究所講究録 1251 巻 2002 年 46-56

VARIETIES FOR MODULES OVER A BLOCK OF A FINITE GROUP I

崇城大学 河合浩明 (Hiroaki Kawai)
Sojo University

Abstract. Chapter I is a survey on the three notions introduced by M. Linckelmann [10],[11] : the transfer maps in Hochschild cohomology of symmetric algebras, the cohomology rings of blocks, and the varieties in block theory. The transfer maps can be called "multiplicative transfer" in a suitable situation. The definition of the block cohomology rings is based on Puig's pointed group theory [14]. The block variety is defined as the subvariety of the maximal ideal spectrum of the block cohomology ring, and it is the block version of well-known Carlson's module variety [3].

1. 準備

A を algebra over a commtative ring R, U を bounded complex of A-modules とする。また, module は left module とする. $\mathscr{P}(U)$ を U の projective resolution とする (i.e., right bounded complex of projective A-modules であり, $\mathscr{P}(U)$ と U は quasi-isomorphism). この報告 I, II において cohomology element は下の同型のもとで対応する chain map の homotopy class と考える ([1, I, Section 2.7], [7, Chapter 6]).

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_A^n(U,V) = H^n(\mathrm{Hom}_A(\mathscr{P}(U),V)) &\cong H^n(\mathrm{Hom}_A(\mathscr{P}(U),\mathscr{P}(V)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{K(A)}(\mathscr{P}(U),\mathscr{P}(V)[n]) \quad (K(A) \text{ は homotopy category})\end{aligned}$$

U, V が module のとき, 上の対応により cocycle $f : \Omega^n(U) \to V$ は lift of f : $\mathscr{P}(\Omega^n(U)) \to \mathscr{P}(V)$ に対応する. A が R 上 projective なら A の Hochschild cohomology は Ext-group をもちいて $HH^n(A) = \mathrm{Ext}^n_{A\otimes A^o}(A,A) \cong \mathrm{Hom}_{K(A\otimes A^o)}(\mathscr{P}_A, \mathscr{P}_A[n])$ と表される, ここで $\mathscr{P}_A$ は $A\otimes A^o$-module ($A-A$-bimodule) A の projective resolusion. さらに, 2 つの元の cup product は対応する chain maps の合成の homotopy class で表される.

G を finite group とする. trivial RG-module R の projective resolution $\mathscr{P}(R) = \{\ \mathscr{P}(R)_n\ \}$ に対して, $\mathrm{Ind}_{\Delta G}^{G\times G}\mathscr{P}(R) = \{\ \mathrm{Ind}_{\Delta G}^{G\times G}\mathscr{P}(R)_n\ \}$ は $R(G\times G)$-module $\mathrm{Ind}_{\Delta G}^{G\times G} R \cong RG$ の projective resolusion となる, ここで $\Delta G = \{\ (x,x) | x \in G\ \}$ で同型は $(x,y)\otimes 1_R \mapsto xy^{-1}$ で与えられる. diagonal embeding

$$\delta_G : H^*(G,R) \to HH^*(RG) \qquad \text{(injective algebra homomorphism)}$$

は $[\xi : \mathscr{P}(R) \to \mathscr{P}(R)[n]] \longmapsto [\mathrm{Id} \otimes_{\Delta G} \xi : \mathrm{Ind}_{\Delta}^{G\times G} \mathscr{P}(R) \to \mathrm{Ind}_{\Delta}^{G\times G} \mathscr{P}(R)[n]]$ で与えられる，ここで [　　] は homotopy class, Id は恒等写像を意味する．

2. Transfer in Hochschild cohomology

以後，A, B は symmetric R-algebra (i.e., R 上 projective であり，$A \cong A^*$ as $A-A$-bimodule). $X = \{ X_n \}$ を bounded complex of $A-B$-bimodules X_n で X_n は left A-module, right B-module として projective とする (以後 bounded perfect complex of $A-B$-bimodules と呼ぶ)．この時 adjunction $\mathrm{Hom}_{C(A)}(X \otimes_B \_, \_) \cong \mathrm{Hom}_{C(B)}(\_, X^* \otimes_A \_)$ が存在し，その unit ε_X と counit η_X の explicit form が Broué によって与えられている (e.g., [10, Appendix])．

定義 2.1.([10, 2.9]) X に associate される transfer $t_X : HH^n(B) \to HH^n(A)$ を

$$[\tau : \mathscr{P}_B \to \mathscr{P}_B[n]] \longmapsto [\mathscr{P}_A \xrightarrow{\varepsilon_{X^*}} X \otimes_B \mathscr{P}_B \otimes_B X^* \xrightarrow{Id_X \otimes \tau \otimes Id_{X^*}} X \otimes_B \mathscr{P}_B[n] \otimes_B X^* \xrightarrow{\eta_X[n]} \mathscr{P}_A[n]]$$

によって定義する．ここで ε_{X^*} は $\varepsilon_{X^*} : A \to X \otimes_B X^* = X \otimes_B B \otimes_B X^*$ (上の adjunction で X を X^* で置き換えたときの unit) の projective resolutions の間の chain map への lift, $\eta_X[n]$ も同様 (n は sift を意味する)．

この定義だけでは唐突なので説明を試みる．H を G の subgroup, $t_{H,G}$ を通常の transfer とする．次の図式を可換にするような底辺の写像を定義したくなる．右の図式は $n=0$ の場合で $\lambda\cdot$ は λ 倍を意味する．

$$[\tau] \longmapsto [\Sigma x \tau x^{-1}] \qquad\qquad \lambda\cdot \longmapsto (\Sigma\lambda)\cdot$$

$$(2.2)\quad \begin{tikzcd} H^n(H,R) \arrow[r, "t_{H,G}"] \arrow[d, "\delta_H"'] & H^n(G,R) \arrow[d, "\delta_G"] \\ HH^n(RH) \arrow[r] & HH^n(RG) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{RH}(R,R) \arrow[r, "t_{H,G}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{RG}(R,R) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{R(H\times H)}(RH,RH) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R(G\times G)}(RG,RG) \end{tikzcd}$$

$$\lambda\cdot \qquad\qquad (\Sigma\lambda)\cdot$$

ところで $RG-RH$-bimodule $X=(RG)_H$ に対して，$\varepsilon_{X^*} : RG \to RG \otimes_{RH} RG$ は $a \mapsto a\Sigma_{x\in[G/H]} x \otimes x^{-1}$ により，$\eta_X : RG \otimes_{RH} RG \to RG$ は $a \otimes b \mapsto ab$ によって与えられることが Broué による explicit form から分かる ([10, 2.6])．そこで (2.2) の右の図式の底辺の写像を

$$(\lambda\cdot : RH \to RH) \mapsto (RG \xrightarrow{\varepsilon_{X^*}} RG \otimes_{RH} RH \otimes_{RH} RG \xrightarrow{Id_X \otimes (\lambda\cdot) \otimes Id_{X^*}} RG \otimes_{RH} RH \otimes_{RH} RG \xrightarrow{\eta_X} RG)$$

と定義すれば図式は可換となる．各々の写像を projective resolution の間の chain map まで lift すると $n=0$ の場合の定義 2.1 の対応となる．

命題 2.3.([10, 4.6]) $t_{(RG)_H} : HH^n(RH) \to HH^n(RG)$ により，任意の $n \geq 0$ において図式 (2.2) は可換となる．

一般に transfer t_X は linear map でしかないが，もし $\varepsilon_{X^*} \circ \eta_X \simeq Id_{X \otimes_B \mathscr{P}_B \otimes_B X^*}$ が成り立てば，algebra homomorphism となる．Linckelmann は次のような設定をした．

定義 2.4.([10, 3.1]) X を bounded perfect complex of $A-B$-bimodule とする．$[\zeta] \in HH^*(A), [\tau] \in HH^*(B)$ に対し，次の２つの図式の可換性は同値である ([10, 3.3])．

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}_A \otimes_A X \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\zeta_n \otimes Id"'] & X \otimes_B \mathscr{P}_B \arrow[d, "Id \otimes \tau_n"] \\ \mathscr{P}_A[n] \otimes_A X \arrow[r, "\simeq"'] & X \otimes_B \mathscr{P}_B[n] \end{tikzcd} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathscr{P}_A \arrow[r, "\varepsilon_{X^*}"] \arrow[d, "\zeta_n"'] & X \otimes_B \mathscr{P}_B \otimes_B X^* \arrow[d, "Id_X \otimes \tau_n \otimes Id_{X^*}"] \\ \mathscr{P}_A[n] \arrow[r, "\varepsilon_{X^*}[n]"'] & X \otimes_B \mathscr{P}_B[n] \otimes_B X^* \end{tikzcd}$$

ここで，左の図式の上下の homotopy eq. は $A \otimes_A X \cong X \otimes_B B$ の lift ($\mathscr{P}_A \otimes_A X, X \otimes_B \mathscr{P}_B$ は X の projective resolution). 任意の $n \geq 0$ に対し上の図式が可換となるとき，$[\zeta]$ を X-stable と呼ぶ ($[\zeta]$: X-stable $\Leftrightarrow$ $[\tau]$: X^*-stable [10, 3.4]). $HH^*_X(A)$ を $HH^*(A)$ における X-stable な元全体とする．adjuction maps の合成 $\eta_X \circ \varepsilon_{X^*} : A \to X \otimes_B X^*$ は $1_A \in A$ の像で決まるが，これを $\pi_X \in Z(A)$ と書く．また，X によっては π_X を explicit form で書ける ([10, 5.4, 5.6, 5.7]).

定理 2.5.([10, 3.4, 3.6]) 定義 2.4 における $[\zeta], [\tau]$ に対して $[\zeta] \in HH^*_X(A)$ のとき，$t_X([\tau]) = \pi_X[\zeta]$ とかける．もし π_X が $Z(A)$ において可逆なら $T_X = \pi_X^{-1} t_X$ とおくことにより，$T_X : HH^*_{X^*}(B) \to HH^*_X(A)$ は R-algebra homomorphism となる．さらに π_{X^*} も $Z(B)$ において可逆なら同型となる．

証明．定義 2.4 の右図の可換性より，$t_X([\tau_n]) = [\eta_X[n] \circ (Id_X \otimes \tau_n \otimes Id_{X^*}) \circ \varepsilon_{X^*}] = [\eta_X[n] \circ \varepsilon_{X^*}[n] \circ \zeta_n] = \pi_X[\zeta_n]$. また，積は chain maps の合成で与えられることより T_X は algebra hom. となることが分かる．さらに $T_{X^*}([\zeta]) = \pi_{X^*}[\tau]$ も成り立つので π_{X^*} も可逆なら T_X, T_{X^*} により同型が与えられる．

3. Block cohomology and block variety

G を finite group, k を algebraically closed field of characteristic $p > 0$ とする．b を kG の block idempotent, D を b の defect group (i.e., $\mathrm{Br}^G_P(b) \neq 0$ となる p-subgp. のうちで maximal, ここで $\mathrm{Br}^G_P : (kG)^P \to kC_G(P)$ は Brauer hom.). i を b の source idempotent (i.e., $(kGb)^D$ の primitive idempotent s.t. $\mathrm{Br}^G_D(i) \neq 0$), e_D

を $\mathrm{Br}_D^G(i)$ ($\mathrm{Br}_D^G(i)$ は primitive) を含む $kC_G(D)$ の block とする．この時，Brauer pair (D, e_D) は maximal b-Brauer pair となり，D の任意の subgroup Q に対し $(Q, e_Q) \leq (D, e_D)$ となるただ1つの e_Q が存在する ([16])．$Q \leq D$ (i.e., D の subgroup Q) に対し，$E_G((Q,e_Q),(D,e_D)) = \{ \varphi : Q \to D \mid \varphi$ は x-conjugation s.t. ${}^x(Q,e_Q) \leq (D,e_D)$ $(x \in G)$ $\}$ とおく．${}^x(Q,e_Q) \leq (D,e_D) \Leftrightarrow {}^xQ \leq D$, ${}^xe_Q = e_{{}^xQ}$ (${}^xQ$ は Q の cojugate subgp. の意味)．さらに，D_γ を (D,e_D) と対応する defect pointed group とする (γ は i を含む point)．

定義 3.1.([10, 5.1]) D_γ と associate される block b の cohomology ring を次の様に定義する．$H^*(G,b,D_\gamma) = \{ [\zeta] \in H^*(D,k) \mid \tilde{\varphi} \circ \mathrm{res}_Q^D([\zeta]) = \mathrm{res}_{Q^x}^D([\zeta])$ for any $Q \leq D$ and any $\varphi \in E_G((Q,e_Q),(D,e_D))$ $\}$．ここで，$\tilde{\varphi}$ は φ によって導かれる conjugation map $H^*(Q,k) \to H^*({}^xQ,k)$ である．

b が principal block の場合，D は G の p-sylow subgroup であるから res_D^G : $H^*(G,k) \cong \{$ stable elements of $H^*(D,k)$ $\}$ ([4, 10.1])．ここで $[\zeta]$ が stable とは，定義 3.1 において Q が sylow intersection ${}^{x^{-1}}D \cap D$ のときに，φ がこの x による conjugate ${}^{x^{-1}}D \cap D \to D \cap {}^xD$ の場合だけで条件式が成り立つことを要求する．ゆえに $\mathrm{Image}(res_D^G) \supseteq H^*(G,b,D_\gamma)$．逆に $\mathrm{Image}(res_D^G) \subseteq H^*(G,b,D_\gamma)$ は明らかであるから $H^*(G,k) \cong H^*(G,b,D_\gamma)$ となる．

1 節で embeding $\delta_G : H^*(G,k) \to HH^*(kG)$ について述べたが Linckelmann [10] は $H^*(G,b,D_\gamma)$ から $HH^*(kGb)$ への embeding を与えている．通常の transfer を使った場合 $H^*(G,b,D_\gamma) \xrightarrow{\iota} H^*(D,k) \xrightarrow{t_{D,G}} H^*(G,k) \xrightarrow{\delta_G} HH^*(kG) \xrightarrow{proj.} HH^*(kGb)$ ここで ι は inclusion, は injective でも alg.hom. でもない．しかし T_X を用いると $H^*(G,b,D_\gamma) \xrightarrow{\iota} H^*(D,k) \xrightarrow{\delta_D} HH^*_{X^*}(kD) \xrightarrow{T_X} HH^*_X(kGb)$ は injective alg. hom. になる．そこで X を捜すことになるが次のことに注意する．$H^*(G,b,D_\gamma)$ は block b の source algebra $ikGi$ によって決まる ([10, 5.2.4])，さらに kGb と $ikGi$ は kGb–$ikGi$-bimodule kGi とその dual $(kGi)^* = ikG$ により森田同値となる ([16, 18.10])．

定理 3.2.([10, 5.6]) $kGb - kD$-module とみた kGi に対して，$T_{kGi} \circ \delta_D \circ \iota$ は injective algebra homomorphism となる．

[10] における定義を除く大半の部分が上の証明にあてられている．ここでは point となる結果のみ記す．

(i) $kD - kD$-bimodule として，$ikGi \cong \bigoplus_{(Q,\varphi)} kD \otimes_{kQ} {}_\varphi kD$　ここで $Q \leq D, \varphi \in E_G((Q,e_Q),(D,e_D))$，さらに ${}_\varphi kD$ は φ を通して kQ-module の意味．

(ii) $[\zeta] \in H^*(G,b,D_\gamma) \Leftrightarrow \delta_D([\zeta])$ が $kD \otimes_{kQ} {}_\varphi kD$-stable for ${}^\forall Q \leq D, {}^\forall \varphi \in E_G((Q,e_Q),(D,e_D))$.

(iii) π_{kGi} と $\pi_{(kGi)^*} = \pi_{ikG}$ は可逆.

(i), (ii) より $\delta_D : H^*(G,b,D_\gamma) \hookrightarrow HH^*_{ikGi}(kD)$ がわかる．(iii) より $HH^*_{ikG}(kD) \cong$

$HH^*_{kGi}(kGb)$ となり最後に $HH^*_{ikGi}(kD) \subseteq HH^*_{ikG}(kD)$ を示すことにより定理が示される．さらに次のことが成り立つ．

定理 3.3.([11, 4.2]) 次の図式は可換．

$$\begin{tikzcd} H^*(G,k) \arrow[r, "\delta_G"] \arrow[d, "res^G_D"'] & HH^*(kG) \arrow[d, "proj."] \\ H^*(G,b,D_\gamma) \arrow[r, "T_{kGi} \circ \delta_D"'] & HH^*(kGb) \end{tikzcd}$$

次に variety について見ていく．U を bounded complex of A-modules (A : symmetric algebra) とする．k-algebra homomorphism $\alpha_U : HH^n(A) = \mathrm{Hom}_{K(A\otimes A^o)}(\mathscr{P}_A, \mathscr{P}_A[n]) \to \mathrm{Ext}^n_A(U,U)$ が $[\zeta : \mathscr{P}_A \to \mathscr{P}_A[n]] \longmapsto [\zeta \otimes_A Id_U : \mathscr{P}_A \otimes_A U \to \mathscr{P}_A[n] \otimes_A U]$ によって定義される ($\mathscr{P}_A \otimes_A U$ は U の projective resolution となる)．この時，合成 $\alpha_U \circ \delta_G : H^n(G,k) \to HH^n(kG) \to \mathrm{Ext}^n_{kG}(U,U)$ は $[\xi : \mathscr{P}(k) \to \mathscr{P}(k)[n]\,] \longmapsto [\xi \otimes_k Id_U : \mathscr{P}(k) \otimes_k U \to \mathscr{P}(k)[n] \otimes_k U]$ によって与えられていることが分かる (次の kG-module としての同型による；kG-modules M, N に対し，$\mathrm{Ind}^{G\times G}_{\Delta G} M \otimes_{kG} N \cong (M \otimes_k kG) \otimes_{kG} N = M \otimes_k N$ が $((x,y)\otimes m)\otimes n \mapsto xm \otimes xy^{-1}n$ for $x, y \in G$ and $m \in M, n \in N$ によって与えられる)．ところで，これは U が kG-module の場合 cup 積 $[\zeta] \cup I_U$ の chain map での表現であるから，$\alpha \circ \delta_G$ の kernel を $I^*_G(U)$ とすると maximal ideal spectrum of $H^*(G,k)/I^*_G(U)$ は U の Carlson's variety $V_G(U)$ のことである (U が complex の場合も同じ記号を使う)．

定義 3.4.([11, 4.1]) U を bounded complex of kGb-modules とする．graded k-algebra homomorphism $H^*(G,b,D_\gamma) \xrightarrow{T_{kGi} \circ \delta_D} HH^*(kGb) \xrightarrow{\alpha_U} \mathrm{Ext}^*_{kGb}(U,U)$ の kernel を $I^*_{G,b,D_\gamma}(U)$ とする．U の block variety を $V_{G,b}(U)$ = maximal ideal spectrum of $H^*(G,b,D_\gamma)/I^*_{G,b,D_\gamma}(U)$ と定義する．

定理 3.3 より bounded complex U of kGb-modules に対し，次の可換図式が得られる (右の図式の可換性は定義より明らか)．

$$\begin{tikzcd} H^*(G,k) \arrow[r, "\delta_G"] \arrow[d, "res^G_D"'] & HH^*(kG) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "proj."] & \mathrm{Ext}^*_{kG}(U,U) \arrow[d, equal] \\ H^*(G,b,D_\gamma) \arrow[r, "T_{kGi} \circ \delta_D"'] & HH^*(kGb) \arrow[r, "\alpha_U"'] & \mathrm{Ext}^*_{kGb}(U,U) \end{tikzcd}$$

定理 3.5.([11, 4.4]) $I^*_G(U) = (\mathrm{res}^G_D)^{-1}(I^*_{G,b,D_\gamma}(U))$ が成り立つ．$H^*(G,b,D_\gamma)$ は $\mathrm{Image}(\mathrm{res}^G_D)$ 上有限生成であるから，$(\mathrm{res}^G_D)^* : V_{G,b}(U) \to V_G(U)$ は finite surjective affine map となる．さらに，$\dim V_{G,b}(U) = \dim V_G(U)$ も成り立つ．

VARIETIES FOR MODULES OVER A BLOCK OF A FINITE GROUP II

Abstract. In Part I, we gave the explanations for the cohomology ring of the block and the block variety. In particular, we explained that for any bounded complex U of kGb-modules, there is a surjective map from the block variety $V_{G,b}(U)$ to the usual Carlson's variety $V_G(U)$. In Part II, We show that there is a surjective map $\iota^* : V_D(iU) \to V_{G,b}(U)$, where D is a defect group of b and i is a souce idempotent of b. We apply this result to the study on the block varieties.

4. Block varieties and source idempotents

notation は Part I に従う. 次の定理の (i) の可換図式は [11, 5.1] で与えられている. (ii) の可換図式はその inverse version で同様にして証明できる.

定理 4.1. A, B を symmetric R-algebra. X を bounded perfect complex of $A-B$-bimodules ([I, 2 節]) とする.
(i) もし $\pi_X(\in Z(A))$ が可逆なら, 任意の bounded complex V of B-modules に対して下の図式は可換となる.
(ii) もし $\pi_{X^*}(\in Z(B))$ が可逆なら, 任意の bounded complex U of A-modules に対し下の図式は可換となる.
ここで, $\mathrm{Ext}^*_{\_}(\_,\_)$ を $\mathrm{Ext}^*_{\_}(\_)$ と略記した. また $X \otimes_B \_$ は $[\tau : \mathscr{P}(V) \to \mathscr{P}(V)[n]] \longmapsto [Id \otimes \tau : X \otimes_B \mathscr{P}(V) \to X \otimes_B \mathscr{P}(V)[n]]$ によって与えられる. $X^* \otimes_A \_$ も同様.

$$
(i)\quad \begin{array}{ccc}
HH^*_X(A) & \xrightarrow{\alpha_{X\otimes_B V}} & \mathrm{Ext}^*_A(X \otimes_B V) \\
{\scriptstyle T_X}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle X\otimes_B\_} \\
HH^*_{X^*}(B) & \xrightarrow[\alpha_V]{} & \mathrm{Ext}^*_B(V)
\end{array}
\qquad
(ii)\quad \begin{array}{ccc}
HH^*_X(A) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathrm{Ext}^*_A(U) \\
{\scriptstyle T_{X^*}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle X^*\otimes_A\_} \\
HH^*_{X^*}(B) & \xrightarrow[\alpha_{X^*\otimes_A U}]{} & \mathrm{Ext}^*_B(X^* \otimes_A U)
\end{array}
$$

定理 4.1 の X の例として次のもは重要と思う. derived category の森田理論において, 次の節の定理 5.1 の条件 (i) をみたすような bounded perfect complex X は $U_b = U_c = \{ 0 \}$ のとき two sided split endomorphism tilting complex と呼ばれるものであり, X が bimodule のときは A と B は stable equivalence of Morita type の関係にあるという ([7]). このとき A, B が indecomposable non-simple な symmetric algebra (たとえば block algebra) ならば 5.1 の 条件 (i) より π_X, π_{X^*} は可逆となり

([11, 5.2])，上の定理の可換図式が成り立つことが分かる．さて，X として定理 3.2 における $kGb-kD$-bimodule kGi をとると次の可換図式を得る．ここで Ext-group に出てくる modules の対応は kD-modules V の category と kGb-modules U の category の間の kGi-induction, ikG-restriction と呼んでよいものである．

$$\begin{tikzcd}
HH^*_{kGi}(kGb) \arrow[r, "\alpha_{kGi\otimes_{kD}V}"] & \mathrm{Ext}^*_{kGb}(kGi \otimes_{kD} V) \\
HH_{ikG}(kD) \arrow[u, "T_{ikG}"] \arrow[r, "\alpha_V"'] & \mathrm{Ext}^*_{kD}(V) \arrow[u, "kGi\otimes_{kD}_"']
\end{tikzcd} \quad (i)$$

$$\begin{tikzcd}
HH^*_{kGi}(kGb) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "T_{ikG}"'] & \mathrm{Ext}^*_{kGb}(U) \arrow[d, "ikG\otimes_{kGb}_"] \\
HH_{ikG}(kD) \arrow[r, "\alpha_{iU}"'] & \mathrm{Ext}^*_{kD}(iU)
\end{tikzcd} \quad (ii)$$

上の可換図式に $\delta_D : H^*(G,b,D_\gamma) \to HH^*_{ikG}(kD)$ を合成することにより次の可換図式が得られる．ここで，ι は包含写像，top horizontal maps は $\alpha_{kGi\otimes_{kD}V} \circ T_{kGi} \circ \delta_D$ と $\alpha_U \circ T_{kGi} \circ \delta_D$，さらに bottom horizontal maps は $\alpha_V \circ \delta_D$ と $\alpha_{iU} \circ \delta_D$ である．

$$\begin{tikzcd}
H^*(G,b,D_\gamma) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"'] & \mathrm{Ext}^*_{kGb}(kGi \otimes_{kD} V) \\
H^*(D,k) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^*_{kD}(V) \arrow[u, "kGi\otimes_{kD}_"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^*(G,b,D_\gamma) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"'] & \mathrm{Ext}^*_{kGb}(U) \arrow[d, "ikG\otimes_{kGb}_"] \\
H^*(D,k) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^*_{kD}(iU)
\end{tikzcd}$$

ところで，次のことが成り立つ ([6, 1.1])．

$$U \text{ is a direct summand of } kGi \otimes_{kD} iU \text{ as } kGb-\text{modules}$$

ゆえに，左の図式で $V = iU$ とするとき $kGi\otimes_{kD}V$ を U と置き換えることができる．Linckelmann's variety は top horizontal map の kernel で定まり，Carlson's variety は bottom horizontal map の kernel で定まるので次のことが示される．(Linckelmann も同じ結果を得ている [12])．

定理 4.2 D を block b の defect group, $i \in \gamma$ を b の source idempotent とする．この時，$I^*_{G,b,D_\gamma}(U) = H^*(G,b,D_\gamma) \cap I^*_D(iU)$ が成り立つ．$H^*(D,k)$ は $H^*(G,b,D_\gamma)$ 上有限生成であるから，ι^* を包含写像 ι から導かれる affine map とすると $\iota^* : V_D(iU) \to V_{G,b}(U)$ は finite surjective となる．さらに，$\dim V_D(iU) = \dim V_{G,b}(U)$ も成り立つ．

5. Invariance properties of varieties

定理 5.1.([11, 5.5]) G, H を finite group. b, c は kG, kH の blocks で共通の defect group をもつ．i, j を b, c の source idempotent とし，i, j と associate される maximal b-Brauer pair, maximal c-Brauer pair を $(D, e_D), (D, f_D)$ とするとき，$E_G((Q,e_Q),(D,e_D)) = E_H((Q,f_Q),(D,f_D))$ for any $Q \le D$ (ゆえに，b と c の Brauer category は同値) と仮定する．以上の設定のもとで次の条件をみたす bounded perfect complex X of $kGb-kHc$-bimodules が存在すると仮定する.

(i) $X\otimes_{kHc}X^*\simeq kGb\oplus U_b$ $\quad U_b$: bounded complex of proj. $kGb-kGb$-bimodules

$X^*\otimes_{kGb}X\simeq kHc\oplus U_c$ $\quad U_c$: bounded complex of proj. $kHc-kHc$-bimodules

(ii) $M_{n,t}$ を X の component X_n の indecomposable direct summand とする. 任意の n,t において, $M_{n,t}$ is a direct summand of $kGi\otimes_{kQ}jkH$ for some $Q\leq D$.

このとき, 任意の bounded complex V of kHc-modules に対して, $V_{H,c}(V)\cong V_{G,b}(X\otimes_{kHc}V)$ が成り立つ.

block algebra 上の derived category の森田理論では, $U_b=U_c=\{0\}$ のとき条件 (i), (ii) をみたす X は splendid tilting complex と呼ばれる. (ii) は Linckelmann の条件で, この概念を導入した J. Rickard は (ii) の条件を $M_{n,t}\mid kG\otimes_{kD}kH$ とした ([8], [15]). また X が bimodule で条件 (i), (ii) $X\mid kGi\otimes_{kD}jkH$ をみたすとき, Linckelmann [9] は kGb と kHc は splendid stable equivalence の関係にあると呼んでいる (条件 (ii) は block algebra に関する条件で, 条件 (i) のみの場合が通常 stable equivalence of Morita type と呼ばれるものである). stable equivalence of Morita type の block algebra に関する具体的な場合として, Broué の設定 ([2]) をもとにした derived equivalent blocks に関する"奥山の方法"の出発点に位置する設定がある. ここでは Linckelmann [9, 3.1] (splendid stable eq. の場合の Broué [2, 6.3] にあたるもの) をもとにして拡張した設定で, 次の定理 5.1 の系を与える. 上の事柄の詳しい説明と系 5.2 の証明については環論の報告集 [17] を参照して下さい.

系 5.2. b を kG の任意の block, D を b の defect group (abelian とは仮定しない). $N=N_G(D)$ とおき, kN の block b_0 を b の Brauer 対応子とする. M を kGb の $(G\times G,\triangle D,G\times N)$ に関する Green 対応子とするとき, $M\otimes_{kNb_0}\_=b\mathrm{Ind}_N^G\_$ と $M^*\otimes_{kGb}\_=b_0\mathrm{Res}_N^G\_$ により kNb_0 と kGb が stable equivalence of Morita type の関係にあると仮定する. このとき, この functor から導かれる { indecomposable non-proj. kGb-modules } と {indecomposable non-proj. kNb_0-modules } の間の 1 対 1 対応 (Green 対応を含む) において, その block varieties は不変である.

上では stable eq. of Morita type としたが, 実際は splendid stable eq. の関係にあることが分かる. また, [9, 3.1] より対応する blocks に対して定理 5.1 の Brauer category に関する条件も成り立つ. さらに, 証明には [1, II ,5.7.2] の block variety version である次のことも用いる. 定理 3.5 と定理 4.2 より,

U : projective kGb-module $\Leftrightarrow$ $V_{G,b}(U)=\{0\}$ ($V_{G,b}(U)$ は homogeneous variety).

系 5.2 では stable eq. of Morita type によって与えられる Green 対応のもとで varieties が不変であることを述べたが, 上で述べたようにこの場合対応する block の Brauer category は定理 5.1 の条件を自動的にみたしている. そこで対応する block

の Brauer catrgory が 定理 5.1 の条件 をみたす場合において varieties の不変性について考察した．ここでは defect group を abelian とする．証明は定理 4.2 と，blocks の間の Clifford 理論をもちいる．

命題 5.3 b を abelian defect group をもつ kG の block, b_0 をその Brauer 対応子とする．vertex D をもつ indecomposable kGb-module M に対して，L を $(G, D, N_G(D))$ に関する M の Green 対応子とするとき，$V_{G,b}(M) \cong V_{N_G(D),b_0}(L)$ となる．

6. Quillen stratification for block varieties とその応用

defect group D の subgroup Q に対し，r_Q: $H^*(G, b, D_\gamma) \xrightarrow{\iota} H^*(D, k) \xrightarrow{\mathrm{res}^D_Q} H^*(Q, k)$ とする．定理 4.2 と [1, II, 5.7.4] より，任意の kGb-module M に対し次が成り立つ ($i \in \gamma$ は source idempotent of b).

$$V_{G,b}(M) = \iota^* V_D(iM) = \iota^*(\bigcup_E (res^D_E)^* V_E(iM)) = \bigcup_E \gamma_E^* V_E(iM)$$

ここで E は D の elementary abelian subgroups 全体を動く (p-群においては block は principal block のみなので $V_E(iM)$ は Linckelmann variety でもある).

定理 6.1.([12, 4.2]) M を kGb-module とする

(i) $$V_{G,b}(M) = \bigcup_E \gamma_E^* V_E^+(iM) \quad \text{(disjoint union)}$$

ここで，$V_E^+(iM)$ の定義は [1, II, 5.7.8] と同じで E は次の条件をみたす elementary abelian subgroups 全体を動く

(a) (E, e_E) が $\{ (E', e_{E'}) \leq (D, e_D), E'$ は elementary abelian subgroup $\}$ の G-conjugate class の代表系.

(b) e_E の defect group として $C_D(E)$ がとれる.

(ii) elementary abelian subgroup $E \leq D$ は上の (b) をみたすとする．この時 $\gamma_E^* V_E^+(iM)$ と $V_E^+(iM)/(N_G(E, e_E)/C_G(E))$ は γ_E^* のもとで同相.

特に，M が indecomposable kGb-module such that (source の次元)$\not| p$ (例えば，simple kGb-module with height 0) のとき上の (i), (ii) は $V_{G,b}$ (= maximal ideal spectrum of $H^*(G, b, D_\gamma)$) の stratification を与える.

Carlson's varieties に対する stratification [1, II, 5.7.8] との次に述べる相違点に注意しなければならない．定理の (i), (ii) における defect group に関する条件は除けない．また，(a) においての conjugate は Brauer pair の間の cojugate. それらに対する根本的理由は次による ; Carlson's varieties に対しては自明である下の左図の可

換図式に対応する Linckelmann varieties での可換図式は右図のようになる.

$$\begin{tikzcd} & V_G(M) & \\ V_E(M) \arrow[ur, "(\mathrm{res}^G_E)^*"] \arrow[rr, "x\text{-}conj."'] & & V_{{}^xE}(M) \arrow[ul, "(\mathrm{res}^G_{{}^xE})^*"'] \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} & V_{G,b}(M) & \\ V_Q(jM) \arrow[ur, "\gamma^*_Q"] \arrow[rr, "x\text{-}conj."'] & & V_{{}^xQ}({}^xjM) \arrow[ul, "\gamma^*_{{}^xQ}"'] \end{tikzcd}$$

ここで, $V_E(iM) = \bigcup_{Q_\epsilon \leq D_\gamma, Q \leq E} (\mathrm{res}^E_Q)^* V_Q(jM)$,

Q_ϵ は local pointed group, $j \in \epsilon$

(ii) に関しては大変雑であるが次の変更が必要となる (左が Carlson's varieties の場合, また $H^\bullet(\_, k)$ については [1, II, 5.1] 参照).

Evens norm map : $H^\bullet(E,k) \to H^\bullet(G,k) \;\Rightarrow\;$ norm map : $H^\bullet(E,k) \to H^\bullet(G,b,D_\gamma) \subseteq H^\bullet(D,k)$

すなわち, block cohomology ring $H^\bullet(G,b,D_\gamma)$ に属するように Evens norm を寄せ集める

定理 6.1 を用いて [1, II, 5.7.9] の block variety version を考えて見た.

命題 6.2. D を block b の abelian defect group とする. このとき D の任意の subgroup Q に対し, $V_Q(iM) = (\gamma^*_Q)^{-1} V_{G,b}(M)$ となる.

abelian の仮定は取るべきと思う. abelian と仮定すると ${}^x(E, e_E) \leq (D, e_D)$ となる任意の x に対して $iM \cong {}^xiM$ as kE-modules が成り立つ. そこで Carlson's variety の時と同様な議論より 6.2 は示せる.

Z を G の central p-subgroup とする. この時よく知られているように $kG \to k(G/Z)$ により block の間に 1 対 1 の対応 $b \to \bar{b}$ がある. さらに, この対応のもとで defect group は $D \to \bar{D}$, source idempotent は $i \to \bar{i}$ と対応する.

定理 6.3. inflation map $\mathrm{inf}^{\bar{D}}_D : H^*(\bar{D},k) \to H^*(D,k)$ の制限により $\mathrm{inf}^{\bar{b}}_b : H^*(\bar{G},\bar{b},\bar{D}_{\bar{\gamma}}) \to H^*(G,b,D_\gamma)$ が得られる. さらに, 任意の bounded complex U of $k\bar{G}\bar{b}$-modules (U は kGb-modules の complex ともみなせる) に対し affine map $(\mathrm{inf}^{\bar{b}}_b)^* : V_{G,b}(U) \to V_{\bar{G},\bar{b}}(U)$ が定義できる. この時, 命題 6.2 より D が abelian defect group なら [5] の block variety version $V_{G,b}(M) = ((\mathrm{inf}^{\bar{b}}_b)^*)^{-1} V_{\bar{G},\bar{b}}(M)$ も成り立つ (M は $k\bar{G}\bar{b}$-module).

References

[1] D. Benson: Representation and Cohomology, I and II, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[2] M. Broué: *Equivalences of blocks of group algebras, in: Finite Dimensional Algebras and Related Topics, V. Dlab, L. L. Scott (eds.)*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1994.

[3] J. F. Carlson: *Varieties and the cohomology ring of a module*, J. Algebra **85** (1983), 104–143.

[4] H. Cartan and S. Eilenberg: Homological Algebra, Princeton University Press, 1956.

[5] H. Kawai: *Module varieties and quotient groups* , J. Algebra **121** (1989), 248–251.

[6] H. Kawai: *Varieties for modules over a block of finite group*, preprint (2001).

[7] S. König and A. Zimmermann ed.: Derived Equivalences for Group Rings, Lecture Notes in Math. **1685**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1998.

[8] M. Linckelmann: *On derived equivalences and local structure of blocks of finite groups*, Turkish J. Math. **22** (1998), 93-107.

[9] M. Linckelmann: *On splendid derived and stable equivalences between blocks of finite groups*, preprint (1998).

[10] M. Linckelmann: *Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups,* Algebras and Representation Theory **2** (1999), 107–135.

[11] M. Linckelmann: *Varieties in block theory* , J. Algebra **215** (1999), 460–480.

[12] M. Linckelmann: *Quillen stratification for block varieties*, preprint (2001).

[13] T. Okuyama: *Some examples of derived equivalent blocks of finite groups, in: Proceedings of the 6th Symposium on Representation Theory of Algebras, S. Kositani, M. Sato (eds.)*, Chiba, Japan, 1996.

[14] L. Puig: *Pointed groups and construction of characters,* Math. Z. **176** (1981), 265–292.

[15] J. Rickard: *Splendid equivalences: derived categories and permutation modules,* Proc. London Math. Soc. **72** (1996), 331-358.

[16] J. Thévenaz: G-Algebras and Modular Representation Theory, Oxford Science Publications, Oxford, 1995.

[17] Proceedings of the 34th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, Gunma, Japan, 2001.