

“Knizhnik-Zamolodchikov 微分方程式と Drinfeld associator”
への補遺

島田 信夫 (Nobuo Shimada)

まえがき. 表題の Knizhnik-Zamolodchikov 微分方程式 ([KZ] 以下 KZ-(微分)方程式と略記する) は, 共形場の理論, 表現論, 量子群論など多方面へ応用之外, 各分野に重要な影響と発展をもたらした. 表題の小論は, 数理解析研究所講究録 1140 号 p.61-75 (2000年4月) に掲載したものであるが, 今回は, それに対する訂正および補充の意味でのコメントを付け加えたい.

§1. KZ-方程式に関する復習

KZ-方程式の定義域である複素 n 次元多様体 Y_n および X_n から始める. Y_n は複素 n 次元空間 \mathbb{C}^n の商集合として定義される.

$$Y_n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) / z_i = z_j \text{ (for } i \neq j)\} \quad (1.1)$$

この Y_n には座標の置換として n 次対称群 S_n が自由に作用する: 例えば左作用 $\sigma \cdot (z_i) = (z_{\sigma(i)}) \quad (1.1)'$

この作用による商空間 $X_n = Y_n / S_n$ は複素 n 次元多様体である. 自然な射影 $p: Y_n \rightarrow X_n$ は次の様子, 基本群の間の完全系列を導く (Birman [B])

$$1 \rightarrow \pi_1(Y_n, *) = P_n \xrightarrow{p} \pi_1(X_n, \bar{*}) \cong B_n \xrightarrow{\gamma} S_n \rightarrow 1 \quad (1.2)$$

ここで B_n は Artin の braid (組み紐) 群, $*$ は Y_n の基点, $\bar{*} = p(*)$.

いま V を \mathbb{C} 上のベクトル空間として, Y_n 上の自明なベクトルバンドル $Y_n \times V^{\otimes n}$ を考える. ファイバー $V^{\otimes n} = (V_{(1)} \otimes V_{(2)} \otimes \dots \otimes V_{(n)})$ ($V_{(i)}$ は V のコピー) には S_n の左作用 $\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) = (v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)})$ (1.3) があり, 更に $\text{End } V^{\otimes n} = \text{endomorphisms } f: V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$ 全体の作る \mathbb{C} 上の algebra (積は合成) には, S_n の元の自然な作用

$$f \mapsto \sigma \circ f \circ \sigma^{-1} \quad (\sigma \in S_n) \quad (1.4)$$

が定義されて $V^{\otimes n}$ への左作用 (1.3) とつり合う. 自明な同変ベクトルバンドル $Y_n \times V^{\otimes n}$ の全空間 E における S_n の作用を

$$(z_i) \times (v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \mapsto \sigma(z_i) \times \sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \quad (1.5)$$

により定義すれば, X_n 上のベクトルバンドル

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes n} & \longrightarrow & Y_n \times_{S_n} V^{\otimes n} & \longrightarrow & X_n \\ \text{ファイバー} & & \cong & & \cong \\ & & E/S_n & & Y_n/S_n \end{array} \quad (1.6)$$

が得られる. ファイバー $V^{\otimes n}$ の代りに $\text{End}(V^{\otimes n})$ を考えれば同様にバンドル

$$\text{End}(V^{\otimes n}) \longrightarrow Y_n \times_{S_n} \text{End}(V^{\otimes n}) \longrightarrow X_n \quad (1.7)$$

が全空間 $\tilde{E} = Y_n \times \text{End}(V^{\otimes n})$ における同一視

$$(z_i) \times f \sim \sigma(z_i) \times (\sigma \circ f \circ \sigma^{-1}) \quad (\sigma \in S_n) \quad (1.8)$$

によって得られる.

さて n 次の KZ-方程式

$$(KZ_n) \quad dW(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{i < j} \frac{t_{ij}}{z_i - z_j} (dz_i - dz_j) \right) W, \quad \left(\frac{t}{2\pi i} \right) \quad (1.9)$$

は, 先づ, Y_n 上の関数に対する全微分方程式の形で与えられる. ここで t は定数のパラメータ, t_{ij} ($1 \leq i < j \leq n$ ($i \neq j$)) は不定元と見做

とれ、次の二つの場合を考える、1) $V = U(\mathfrak{g})$ (複素リ-環 \mathfrak{g} の普通包絡環) で、 $t_{ij} \in V_{(i)} \otimes V_{(j)} \subset V^{\otimes n}$ 、2) V は一般の \mathbb{C} -ベクトル空間、 $t_{ij} \in \text{End}(V_{(i)} \otimes V_{(j)}) \subset \text{End}(V^{\otimes n})$ 。これに就いて以下の (t) を仮定する:

- (t)
- i) t_{ij} は可換なパラメータである。
 - ii) 対称性 case 1) $V_{(i)} \otimes V_{(j)} = V^{\otimes 2}$ とあるとき $t_{ij} = t_{ji}$
 case 2) $\text{End}(V_{(i)} \otimes V_{(j)})$ が t_{ij} に対して、一般に
 $\sigma^{-1} \circ t_{(\sigma(i)\sigma(j))} \circ \sigma = t_{ij}$ ($\sigma \in S_n$) であるか、
 $\text{End}(V_{(i)} \otimes V_{(j)}) = \text{End}(V^{\otimes 2})$ とあるとき $t_{ij} = t_{ji}$ (1.10)
 - iii) 上記 1), 2) の二つの場合とも、それぞれ t_{ij} 向の積が定義されるが、一般に非可換、ただし交換子積につき
 $[t_{ij}, t_{kl}] = 0$ (i, j, k, l がすべて異なるとき)
 $[t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = 0$ (i, j, k が相異なるとき)

ついでに、この仮定 (t) を満足する $\{t_{ij}, 1 \leq i, j \leq n, (i, j)\}$ から生成された \mathbb{C} 上の Lie 環を \mathfrak{t}_n で表わす (t_{ij} で生成された自由 Lie 環の商環式 (t) によって生成されたイデアルによる商 Lie 環が \mathfrak{t}_n)。

元に戻って、方程式 (KZ_n) (1.9) の右辺における \sum_{ij} と $\frac{1}{2} \sum_{i \neq j}$ がお互換えても同じ (t_{ij} の対称性から) であるから、方程式 (KZ_n) は、 S_n の作用で不変な形であり、従って X_n 上の微分方程式であると考えられる。

§2. (KZ_n) の解について、特に $n=2$ の場合。

(KZ_n) の解である $W(z_1, \dots, z_n)$ (1.9) は、以下の $n=2$ の場合に見ら

れる様に、一般の n について、case 1) の場合は $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ -valued
 (case 2) の場合は、 $\text{End} V^{\otimes n}$ -valued) の多変数正則関数と定義
 されるが、パラメター \hbar や不定元 t_{ij} が方程式の係数に含まれて
 いること、および後に解の逆元と考える必要がある等々のこと
 から単に $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ (または $\text{End} V^{\otimes n}$) - 値でなく、パラメター \hbar に由
 る形式的巾級数環 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes n}[[\hbar]]$ (または $\text{End}(V^{\otimes n})[[\hbar]]$) に値をと
 る正則関数であると規定する方が妥当である。実際 $n=2$ の

場合 Y_2 上の方程式 $(KZ_2) \quad dW(z_1, z_2) = \hbar(t_{12} d \log(z_1 - z_2))W$ の解として

$$W_{1,2} = W(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)^{\hbar t_{12}} \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\hbar t_{12} \log(z_1 - z_2)) \quad (2.1)$$

が考えられる。これは \hbar の形式的巾級数の形であるが、 t_{12} は常に
 \hbar を伴って現れるため、 $W(z) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k(z) t_{12}^k \hbar^k (z = z_1 - z_2)$ 、 $\alpha_k(z)$ は普通
 の正則関数の形となり、case 1) のときは、 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}[[\hbar]]$ において、

両側イデアル $(\hbar^N), \supset (\hbar^{N+1})$ を零の基本開近傍系として、

$$(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 2})_{\hbar} = \varprojlim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}[[\hbar]] / (\hbar^N) \text{ なる完備一様位相代数 } (\mathbb{C} \text{ 上})$$

に値をとる正則関数と考えるのが便利である。(同様に case 2)

$$\text{の場合} \text{ は } (\text{End} V^{\otimes 2})_{\hbar} = \varprojlim_{N \rightarrow \infty} (\text{End} V^{\otimes 2}[[\hbar]]) / (\hbar^N) \text{ - 値正則関数} \quad (2.2)$$

ここで t_{ij} は degree 1 とすると (1.10) の Lie 環 \mathfrak{t}_n は graded Lie 環とな

り、その universal enveloping algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{t}_n)$ は graded (associative) algebra over

\mathbb{C} となる。この degree による完備化 $\widehat{\mathcal{U}(\mathfrak{t}_n)}$ は $\mathcal{U}(\mathfrak{t}_n)_{\hbar}$ (2.2) における完

備化)と同型となる。(KZ)-方程式の解は $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes n})_{\hbar}$ -値(あるいは $(\text{End} V^{\otimes n})_{\hbar}$ -値

の正則関数と考えられるが、形式的には $\mathcal{U}(\mathfrak{t}_n)_{\hbar}$ -値関数として統一される

る. $U(\mathfrak{h}_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ あるいは $\subset \text{End}(V^{\otimes n})$ 共は S_n -不変な部分環と見做せる.

§3. (KZ_3) の解についての復習

これについては前稿([Sh] 講究録1140)でそれなりに詳しく触れたので, 別な解法を紹介する. $n=3$ の場合には変数の reduction によつて, (KZ_3) がそれと同値な次の方程式と同値となった.

$$(*_3) : \frac{dV}{dz} = \eta \left(\frac{t_{12}}{z} + \frac{t_{23}}{z-1} \right) \cdot V, \quad \left(z = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \right) \quad (3.1)$$

これは係数に regular な特異点 $z=0, 1$ を持つ一変数の常微分方程式で Fuchs-型と呼ばれ, 各特異点の近傍で, 或る点での初期値を指定すれば, その様な正則解が一意的に存在し, 単連結な定義域に解析的延長できることが知られている. 解は各特異点の近傍で, それぞれ存在し (この場合 V_0 と V_1) それらは, 特異点の近傍での漸近挙動に応じて定まった $([D]_2)$ ここでは (K. T. Chen [Ch]) による iterated integral の方法で解を求める. (3.1) の方程式 $(*_3)$ の定義域は $\mathbb{C}' = \mathbb{C} - \{(-\infty, 0] \cup [1, \infty)\}$ とする. $x_1 = t_{12}, x_2 = t_{23}$ とおき, ここで free に生成された \mathbb{C} 上の Lie 環を $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_1, x_2) \subset \mathfrak{h}_3$ とおく.

$\mathcal{U} = U(\mathcal{L})$ universal enveloping algebra は, 余積 $\Delta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ (algebra map) および counit $\varepsilon : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ を持つ Hopf 代数となる. $(\varepsilon \otimes 1) \cdot \Delta = (1 \otimes \varepsilon) \cdot \Delta = \text{id}$. $(\Delta \otimes 1) \cdot \Delta = (1 \otimes \Delta) \cdot \Delta$ (coassociativity) 等が成り立つ. $\Delta(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$ ($i=1, 2$) により Δ が一意的に定まる. $x \in \mathcal{U}$ が $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ が成り立つものを primitive 元と呼ぶ. \mathcal{U} における primitive 元は \mathcal{L} の元に限る. $x, y \in \mathcal{L} \Rightarrow [x, y] \in \text{primitive}$. $\mathcal{U}^{[P]} = \mathcal{U}$ の元 x

ここで $|x| = \text{degree}(x) = p$ ならば x の二張りの部分加群 $\mathcal{A}^{[1]} = \mathcal{L}^{[1]} = \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$.

定理 3.2 (Chen [Ch]) $(*)_3$ の解 V は \mathcal{A}_h -値正則関数として, iterated integral で表わされる:

証明) $(*)_3$ の係数 $A(z) = \alpha(\frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z-1})$ の特異点 $z=0$ の近傍に, 点 $z=\varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$ の正数 ε) と解 $V_0^{(\varepsilon)}$ をとり, $V_0^{(\varepsilon)}(\varepsilon) = 1$ (初期値) と定める, \mathbb{C}' に $z=\varepsilon$ と点 $z=1-\varepsilon$ と結ぶ curve $z(t)$ を任意に選ぶ, その上で線積分を考えるが簡単のため $z(t) = t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset \text{実軸}$ とする. つまり

$$(*)_3 \text{ 変 } \quad d \frac{V^{(\varepsilon)}}{dt} = A(t) \cdot V(t), \quad A(t) = \alpha \left(\frac{x_1}{t} + \frac{x_2}{t-1} \right) \quad (3.3)$$

を考える. $Q_1^{(\varepsilon)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\varepsilon}^s A(t) dt$, $Q_{p+1}^{(\varepsilon)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\varepsilon}^s A(t) Q_p^{(\varepsilon)}(t) dt$ ($p \geq 1$) $(3.4)^{(\varepsilon)}$

と置く. このとき $Q_1^{(\varepsilon)}(s)' = \frac{d Q_1^{(\varepsilon)}(s)}{ds} = A(s)$; $Q_{p+1}^{(\varepsilon)}(s)' = A(s) \cdot Q_p^{(\varepsilon)}(s)$ ($p \geq 1$)

従って $V_0^{(\varepsilon)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} Q_0^{(\varepsilon)}(s) + Q_1^{(\varepsilon)}(s) + \dots + Q_p^{(\varepsilon)}(s) + \dots$, $Q_0^{(\varepsilon)}(s) \equiv 1$ $(3.5)^{(\varepsilon)}$

とすれば, $V_0^{(\varepsilon)}(\varepsilon) = 1$ (初期値), $A(s) \in \mathcal{A}_h^{[1]}$ -値関数 $Q_1^{(\varepsilon)} = A(s) \in \mathcal{A}_h^{[1]}(s)$

従って $Q_1^{(\varepsilon)}(s) \in \mathcal{A}_h^{[1]}(s) \Rightarrow Q_2^{(\varepsilon)}(s) = A(s) Q_1^{(\varepsilon)}(s) \in \mathcal{A}_h^{[2]}(s) \Rightarrow$ 同様に $Q_2^{(\varepsilon)}(s) \in \mathcal{A}_h^{[2]}(s)$

$Q_p^{(\varepsilon)}(s) \in \mathcal{A}_h^{[p]}(s) \Rightarrow Q_{p+1}^{(\varepsilon)}(s) \in \mathcal{A}_h^{[p+1]}(s)$ となり, 従って無限級数 $V_0^{(\varepsilon)}(s) =$

$\sum_{n \geq 0} Q_n^{(\varepsilon)}(s)$ は収束する. $(V_0^{(\varepsilon)})' = \sum_{n \geq 1} Q_n^{(\varepsilon)'}(s) = A(s)(1 + Q_1^{(\varepsilon)}(s) + Q_2^{(\varepsilon)}(s) + \dots) =$

$A(s) \cdot V_0^{(\varepsilon)}(s)$. つまり $V_0^{(\varepsilon)}(s)$ は $(*)_3$ の解 $(*)_3$ の $z=0$ の近傍) となり. 線

積分を考えれば, 複素関数でも同様にして $(*)_3$ の解 V_0 が得られる.

$z=1$ の近傍での $(*)_3$ の解 V_1 へ, $(*)_3$ の解 $V_1^{(1-\varepsilon)}$ が点 $z=1-\varepsilon$ において

初期値 1 をとるものとして定まる (解析的解). 上と同様に

$$Q_1^{(1-\varepsilon)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^{1-\varepsilon} A(t) dt, \quad Q_{p+1}^{(1-\varepsilon)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_s^{1-\varepsilon} A(t) Q_p^{(1-\varepsilon)}(t) dt \quad (p \geq 1)$$

$$(Q_1^{(1-\varepsilon)}(s))' = A(s), \quad (Q_{p+1}^{(1-\varepsilon)}(s))' = A(s) \cdot Q_p^{(1-\varepsilon)}(s)$$

$(3.4)^{(1-\varepsilon)}$

$$V_1^{(1-\varepsilon)} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sum_{p \geq 1} Q_p^{(1-\varepsilon)} \left(Q_0^{(1-\varepsilon)} \equiv 1 \right), \quad V_1^{(1-\varepsilon)}(1-\varepsilon) = 1 \quad (3.5)^{(1-\varepsilon)}$$

とすれば $(V_1^{(1-\varepsilon)})' = \frac{dV_1^{(1-\varepsilon)}}{ds} = A(s) \left(\sum_{p \geq 0} Q_p^{(1-\varepsilon)}(s) \right) = A(s) \cdot V_1^{(1-\varepsilon)}$

となり、 $(*)_3$ の $s=1$ 近くの解が得られる。従って $(*)_3$ の点 $z=1$ の近傍での解 V_1 が得られる。

§4. Drinfeld associator Φ について

以下 Φ につき、その具体形を調べる方法を考える。定数 2 での解 $V_0^{(2)}$ 、 $V_1^{(2)}$ は共に $1 + \sum_{p \geq 1} Q_p$ 、 $Q_p \in \mathcal{A}_h^{(p)}(2\mathbb{Z})$ の形であり、従って

$\mathcal{A}_h^{(2\mathbb{Z})}$ における可逆元である。 $\Phi = \Phi_{KZ}$ は Drinfeld $[D]_2$ により、

$$\Phi = V_1^{(2)-1} V_0^{(2)} \text{ と定義された。 } V_0^{(2)} = V_1^{(2)} \Phi \text{ を微分して} \quad (4.0)$$

$$V_0' = V_1' \cdot \Phi + V_1 \cdot \Phi' \text{ を得るが、 } V_1' = A \cdot V_1 \text{ から } V_1' \cdot \Phi = A \cdot V_1 \cdot \Phi$$

$$= A \cdot V_0 = V_0' \text{ となり } V_1 \cdot \Phi' = 0 \text{ を得る。 } V_1 \text{ は可逆であるから } \Phi' = 0$$

つまり Φ は z に依らない constant $\in \mathcal{A}_h$ となる (4.1)

$$\Phi = \Phi(t_{12}, t_{23}) = \Phi_{1,2,3}$$

の意味は、 (KZ_3) の解 W_0, W_1 により示唆される。いま $T =$

$t_{12} + t_{13} + t_{23} \in \mathbb{C}$ とおき、方程式 $(*)_3$ の解 V_0, V_1 (前節参照) に

対して $W_i = V_i(z_3 - z_1)^{T/\varepsilon}$ と考える ($i=0,1$) ($T = \mathbb{Z}$ ($(*)_3$) in (3.1) において $z = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ とする)

$$W_i \text{ が } (KZ_3) \text{ の解} \iff V_i \text{ が } (*_3) \text{ の解 } (i=0,1) \quad (4.2)$$

が確かめられる。ここで、 $T = t_{12} + t_{13} + t_{23}$ は t_{12}, t_{13}, t_{23} のすべてと可換であり ((1.10) 参照)、直接計算で (4.2) が得られる。

$$W_i = V_i \cdot (z_3 - z_1)^{\pm T} \quad (i=0,1) \text{ であるから}$$

$$W_i^{-1} \cdot W_0 = (z_3 - z_1)^{-\pm T} \cdot V_i^{-1} \cdot V_0 \cdot (z_3 - z_1)^{\pm T} = V_i^{-1} V_0 = \mathbb{I} \quad (4.1)$$

$$\text{従って } W_0 = W_i \cdot \mathbb{I} \quad (4.3)$$

(KZ₃) の $z = e^{i\theta}$ の近傍での正則解 W_i の漸近挙動は

$$W_0 = W_0(z_1, z_2, z_3) \sim (z_2 - z_1)^{\pm t_{12}} \cdot (z_3 - z_1)^{\pm(t_{23} + t_{33})} \quad (|z_2 - z_1| \ll |z_3 - z_1|) \quad (4.4)$$

$$W_1 = W_1(z_1, z_2, z_3) \sim (z_3 - z_2)^{\pm t_{23}} (z_3 - z_1)^{\pm(t_{12} + t_{13})} \quad (|z_3 - z_2| \ll |z_3 - z_1|)$$

ここで与えられる $(\mathbb{I})_2$ および $[Sh]$ から (1.10) の case 2) の場合を考えることに

して, $t_{ij} \in \text{End}(V_{(i)} \otimes V_{(j)})$ から W_0 は $\text{End}((V_{(1)} \otimes V_{(2)}) \otimes V_{(3)})_{\mathbb{C}}$ 値の函数,

W_1 は $\text{End}(V_{(1)} \otimes (V_{(2)} \otimes V_{(3)}))_{\mathbb{C}}$ 値の函数と考えるのが自然と思われ.

$$\text{すると (4.3) は, } \mathbb{I}_{1,2} \in \text{Iso}((V_{(1)} \otimes V_{(2)}) \otimes V_{(3)}) \cong (V_{(1)} \otimes (V_{(2)} \otimes V_{(3)}))_{\mathbb{C}} \quad (4.5)$$

を意味すると考えられる. Drinfeld が \mathbb{I} を *associator* と呼び,

Lie環 \mathfrak{g} が \mathbb{C} 上の半単純 \mathfrak{g} の場合には, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の表現空間のカテゴリー

におけるテンソル積の *associativity constraint* $(V_{(1)} \otimes V_{(2)}) \otimes V_{(3)} \xrightarrow{\cong}$

$V_{(1)} \otimes (V_{(2)} \otimes V_{(3)})$ として \mathbb{I}_{KZ} の適用を思い着いたのが宜なるかなと

ある (Drinfeld は (KZ₄) の解の間の *monodromy* としての $\mathbb{I}_{1,2,3} \otimes \mathbb{I}_4$,

$\mathbb{I}_{1,(2,3),4}$, $\mathbb{I}_{(1,2),3,4}$, $\mathbb{I}_{1,2,(3,4)}$, $\mathbb{I}_{1,3,2,4}$ 等の間の *pentagon* 公式や,

braiding $R_{ij} \in \text{Iso}(V_{(i)} \otimes V_{(j)}, V_{(j)} \otimes V_{(i)})_{\mathbb{C}}$, $R_{ij} = \tau_{ij} \circ e^{\frac{\hbar}{2} t_{ij}}$ と $\mathbb{I}_{i,j,k}$ の間の

Hexagon 公式 (MacLane [M]) 等を示し \mathbb{I} がカテゴリー論における

associativity constraint の条件を満していることを証明した.) (KZ₄) の

解については, 前稿 [Sh] などで詳しく紹介したので, ここでは省

略させて頂いた.

§5. associator 重の特徴づけ

§3節の微分方程式 $(*)_3$ の解 V_0, V_1 と重の定義 $V_1 \cdot V_0 = \bar{\mu}(1, 0)$ また $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(x_1, x_2)} (x_1 = t_2, x_2 = t_3)$ なる自由Lie環 (\mathbb{C}) およびその普遍包絡環 $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{L})$, またそれらの次数(degree)による完備化 $\hat{\mathcal{A}}$ 等の同様の代数的諸関係を利用して重や V の特徴づけを示す。特に $\bar{\mu} = \bar{\mu}(t_1 t_2, t_1 t_2)$ (§3参照)の代りに $\bar{\mu}(x_1, x_2)$ を考える。そのため

微分方程式 (X_3) におけるパラメータ z を置き換えて

$$A(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z-1} \right), \quad \frac{dV(z)}{dz} = A(z)V(z) \quad (5.1)$$

の解を改めて $V_0(z), V_1(z)$ とおく。これは§3で述べたのと同じ方法で求めることができる。 V_0, V_1 を単に V で表れすと

$$V = 1 + \sum_{p \geq 1} Q_p \in \hat{\mathcal{A}}^{(z)}, \quad Q_p \in \mathcal{A}^{(p)}(z) \quad (5.2)$$

$$\frac{dQ_p}{dz} = A(z) \cdot Q_{p-1}(z) \quad (p \geq 1) \quad Q_0(z) \equiv 1$$

等が得られる。この意味で

$$\bar{\mu}(x_1, x_2) = V_1^{-1}(z) \cdot V_0(z) \in \hat{\mathcal{A}} \quad (5.3)$$

は z に依らずに constant である。

いま $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{(x_1, x_2)} = \text{Ker}(\varepsilon: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C})$ (ε は counit) とおく。 (5.4)

この完備化(次数による) $\hat{\mathfrak{m}} = \text{Ker}(\varepsilon: \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C})$

と同様に定義される。 $\hat{\mathfrak{m}}$ の元は x_1, x_2 の非可換^{形式的}中級数で常数項 = 0 なるものである。このとき写像 $\exp: \hat{\mathfrak{m}} \rightarrow 1 + \hat{\mathfrak{m}} \subset \hat{\mathcal{A}}$ かつ

$\log: 1 + \hat{\mathfrak{m}} \rightarrow \hat{\mathfrak{m}}$ が 次式で定義され、互いに逆写

像となる。

$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots, \quad u \in \widehat{\mathcal{M}}$$

$$\log(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots, \quad u \in \widehat{\mathcal{M}} \quad (5.5)$$

これらが互いに逆写像 ($\exp \circ \log = \text{id}$, $\log \circ \exp = \text{id}$) であることを確かめられる。実際、一つの不定元 T に対して $\exp(\log(1+T)) = 1+T$ は定義(5.5)から容易に従う。また連続準同型 $\varphi: \underline{\mathbb{Q}}[[T]] \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$ を $\varphi(T) = u$ で定義すれば $\exp \circ \log(1+u) = 1+u$ を得る、 $\log \circ \exp = \text{id}$ も同様に示すことが出来る。(5.6)

補題 5.7. 写像 \exp は $\widehat{\mathcal{M}}_{(x_1, x_2)}$ における primitive 元 $\alpha \in \widehat{\mathcal{A}}$ における group-like 元 β になる。逆に $\beta \in 1 + \widehat{\mathcal{M}} \subset \widehat{\mathcal{A}}$ が group-like 元であるならば、 $\log \beta$ は $\widehat{\mathcal{M}}$ における primitive 元 $\in \widehat{\mathcal{L}}$ となる。

証) $\exp \alpha$ は簡単なため e^α と記す。 α が primitive 元ならば $\Delta \alpha = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$ 。従って $\Delta \beta = \Delta e^\alpha = e^{\Delta \alpha} = e^{\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha} = e^{\alpha \otimes 1} \cdot e^{1 \otimes \alpha} = (e^\alpha \otimes 1)(1 \otimes e^\alpha) = e^\alpha \otimes e^\alpha = \beta \otimes \beta$ 。つまり $\beta = e^\alpha$ は group-like となる。
 逆に β が group-like になると $\Delta \beta = \beta \otimes \beta \Rightarrow (\varepsilon \otimes 1) \Delta \beta = (\varepsilon(\beta) \cdot \beta)$ (これは $(\varepsilon \otimes 1) \Delta = \text{id}$ であるから $\varepsilon(\beta) = 1$)。つまり $\beta \in 1 + \widehat{\mathcal{M}}$ 。また $\alpha = \log \beta$ とおけば $\beta = e^\alpha \Rightarrow \Delta \beta = \beta \otimes \beta = e^\alpha \otimes e^\alpha = (e^\alpha \otimes 1) \cdot (1 \otimes e^\alpha) = e^{\alpha \otimes 1} \cdot e^{1 \otimes \alpha} = e^{\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha}$ ($\alpha \otimes 1$ と $1 \otimes \alpha$ とは可換であるから) 一方 $\Delta \beta = \Delta e^\alpha = e^{\Delta \alpha}$ 従って $\Delta \alpha = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$ 。つまり α は primitive 元 即ち $\alpha \in \widehat{\mathcal{L}}$ となる。□

元を定めて、方程式(5.1)の解である $V_0^{(2)}, V_1^{(2)}$ は同じ形(5.2)で表わすことができる。単に $V = V^{(2)}$ と表わす。 $V \in 1 + \widehat{\mathcal{M}}^{(2)}$

補題 5.8. $\Delta: \widehat{\mathcal{A}}^{(2)} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}^{(2)} \otimes \widehat{\mathcal{A}}^{(2)}$ と余乗算とすれば $\frac{dV}{dt} = A \cdot V$, $A = \frac{X_1}{z} + \frac{X_2}{z-1}$ の解 V_i は $\widehat{\mathcal{A}}^{(2)}$ における group-like 元である: $\Delta V_i = V_i \otimes V_i$ ($i=0,1$)

証明) (5.5) により $V = \sum_{p \geq 0} Q_p$ であるから $\Delta V = \sum_{p \geq 0} \Delta Q_p$, ($Q_0 \equiv 1$), 従って

若し, $\Delta Q_p = \sum_{q+r=p} Q_q \otimes Q_r$ が成立すれば, $\Delta V = \sum_{p \geq 0} (\sum_{q+r=p} Q_q \otimes Q_r) =$

$$\sum_{q, r \geq 0} Q_q \otimes Q_r = (\sum_{q \geq 0} Q_q) \otimes (\sum_{r \geq 0} Q_r) = V \otimes V \text{ と成り, 従って}$$

i) $\Delta Q_p = \sum_{q+r=p} Q_q \otimes Q_r$ (5.9)

ii) $\Delta \left(\frac{dQ_p}{dz} \right) = \frac{d(\Delta Q_p)}{dz}$

を induction で導く. 先ず $Q_1 \in \mathcal{A}^{[1]}(z) = \mathcal{L}^{[1]}(z)$ であり $Q(x_1, x_2)$ 値

関数で Q_1 は primitive $\Delta Q_1 = Q_1 \otimes 1 + 1 \otimes Q_1$ である. 次に ii)

であるが Q_p は \mathcal{A} -値正則関数で有限和 $\sum_{|m|=p} \alpha_m(z) \cdot m$ の形であり, $\alpha_m(z)$ は

各 $m(x_1, x_2)$ の非可換単項式で次数 $|m|=p$ (必ずしも) に於いて定まる普通の正

則関数である. 従って $(\Delta Q_p)' = \sum_{|m|=p} \alpha_m'(z) \cdot \Delta m = \Delta Q_p'$ 従って

ii) を得る. これを用いて, i) が $p < N$ で成立すると仮定して $p = N$ の場合を

導く. $(\Delta Q_N)' = \Delta(Q_N') \stackrel{(5.2)}{=} \Delta A \cdot \Delta Q_{N-1} \stackrel{\text{帰納法の仮定}}{=} (A \otimes 1 + 1 \otimes A) (\sum_{q+r=N-1} Q_q \otimes Q_r) =$

$$\sum_{q+r=N-1} A Q_q \otimes Q_r + \sum_{q+r=N-1} Q_q \otimes A Q_r = \sum_{q+r=N-1} (Q_{q+1}' \otimes Q_r + Q_q \otimes Q_{r+1}') = (\sum_{q+r=N} Q_q \otimes Q_r)'$$

従って (3.4)⁽⁶⁾ から $\Delta Q_N^{(E)}(z) = \int_E (\Delta Q_N^{(E)})' = \int_E (\sum_{q+r=N} Q_q^{(E)} \otimes Q_r^{(E)})' = \sum_{q+r=N} Q_q^{(E)} \otimes Q_r^{(E)}$

となる. i) が $p > N$ で成立する. $V = V_1$ の場合 $V_1^{(1-z)}$ についてと同様である. \square

補題 5.8 で $\Delta V = V \otimes V$ が示されたが, これは実は微分方程式

$$\frac{dH}{dz} = \left(\frac{\Delta X_1}{z} + \frac{\Delta X_2}{z-1} \right) H \text{ の解に等しい. } \quad (*)$$

$$V_0 = V_1 \bar{\Phi} \Rightarrow \Delta V_0 = \Delta V_1 \cdot \Delta \bar{\Phi} \Rightarrow V_0 \otimes V_0 = (V_1 \otimes V_1) \Delta \bar{\Phi} \Rightarrow$$

$$(V_1 \otimes V_1)^{-1} \cdot (V_0 \otimes V_0) = (V_1^{-1} \otimes V_1^{-1}) \cdot (V_0 \otimes V_0) = \Delta \bar{\Phi} \text{ が得られ, 右辺は}$$

$$V_1^{-1} V_0 \otimes V_1^{-1} V_0 = \bar{\Phi} \otimes \bar{\Phi} \text{ であるから } \Delta \bar{\Phi} = \bar{\Phi} \otimes \bar{\Phi} \text{ 従って}$$

補題 5.9 $\Delta \bar{\Phi} = \bar{\Phi} \otimes \bar{\Phi}$, したがって $\bar{\Phi}$ は $\hat{\mathcal{A}}$ の grouplike element である.

が得られた。73と補題5.7. によって $\theta = \log \mathbb{P}$ は primitive 元 in $\hat{\mathfrak{m}}$ となり $\theta \in \hat{\mathcal{L}}_{(x_1, x_2)}$ が得られた。

定理 5.9 (Drinfeld $(d[D]_2)$ $\mathbb{P} = \exp \theta$ とする有理数係数の formal Lie element $\theta \in \hat{\mathcal{L}}_{(x_1, x_2)}$ が存在する。

これは Campbell-Hausdorff 定理の類似であり、Drinfeld は更に具体的に \mathbb{P} の表示を求めている ($[D]_2$)

註*) ΔV_i と $V_i \circ V_i$ が共に $\frac{dH}{dz} = \Delta A \cdot H$ の解であることから $\Delta V_i = V_i \circ V_i$ が導き出せる(補題 5.8 の別証)。

文献

- [B] J. Birman, Braids, Links and Mapping Class Groups, Ann. of Math. Study 82, Princeton U.P. 1974
- [C] P. Cartier, Construction combinatoire des invariants de Vassiliev - Kontsevich des nœuds. C. R. Acad. Sci. Paris T. 316 Série I p. 1205-1210, 1993
- [D], V. G. Drinfeld, Quasi-Hopf algebras. Leningrad Math. J. 1 (1990) 1419-1457
- [D]₂ V. G. Drinfeld, On quasi-triangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. 2 (1991) 829-860
- [J] 神保道天, 「量子力学とヤン-バクスター方程式」 現代数学シリーズ, シュワウリョウガ-専攻.
- [Ka] C. Kassel, Quantum Groups, Springer V. GTM 155, Heidelberg 1994
- [Ko] T. Kohno, Monodromy Representation of Braided Groups, and Yang-Baxter equations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 37 (1987), 139-160.
- [C-P] ~~M.~~ Chari and A. Pressley, A Guide to Quantum Groups, Cambridge Univ. Press
- [S-S] Skovider and Sternberg, Quantum Groups, International Press/1993
- [K-Z] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, Current algebra and Wess-Zumino models in two dimensions. Nuclear Phys. B. 247 (1984), 83-103.
- [M] S. MacLane, Category theory for Working Mathematicians,
- [Sh] 島田 健夫, Knizhnik-Zamolodchikov 微分方程式と Drinfeld associator 教理研講究録 1140 p. 61-75 (2000年 4月)
- [Chen] K. T. Chen, Formal Differential Equations, Ann. of Math. 73 (1961) 110-133
- [S] J.-P. Serre, Lie Algebras and Lie Groups, ¹⁹⁶⁹ Lectures given at Harvard Univ.