

## 非対称 2 次関数のカオス力学に関する研究

東 聡子(Satoko Higashi), 古川 長太(Nagata Furukawa), 木戸 和彦(Kazuhiko Kido)  
創価大学工学研究科(Graduate School of Engineering, Soka University)

### 1. はじめに

近年, カオスの研究が注目されている. その応用分野は, 物理学, 数学はもちろんのこと, 生物学, 社会科学など, 実に広範にわたっている. その理由は, カオスの興味深い多くの特徴にあると考えられる. その特徴の 1 つに, 「比較的簡単な規則に支配されている」というものがある. カオスは, 複雑な振る舞いをするが, それは非常に単純な規則によって支配されているのである. このような興味深い特徴を持つカオスの研究を進めていく上で, 非常に重要となるのが, 1 次元写像の解析である. 一般に, ロジスティック関数のような左右対称な関数の解析が, よく知られている. しかし, 左右非対称な関数の解析はあまりされていない. そこで本研究では, “左右非対称な関数を定義し, その写像がカオスの性質を有しているか” ということについて解析を行った.

### 2. 不動点と周期点

写像の解析とは, ある関数の定義域内の全ての点の軌道を調べることである. そこでまず, 点の軌道を決定する重要な要素である不動点と周期点について説明する. なお, 写像は全てその関数の定義域に含まれるという条件の下で行われるので, 今後その条件が成り立つという前提で研究を進めることにする.

#### 2.1 不動点

写像した点が写像前と一致するような点を不動点という. グラフでいうと,  $f$  と直線  $y=x$  との交点 (または接点) のことである. 不動点には, 吸引的不動点と反発的不動点とどちらでもないものがある. ここで, 吸引的不動点と反発的不動点の定義を示す.

**定義 1**  $p$  は  $f$  の不動点とする.

- (a)  $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$  にある  $f$  の定義域内の任意の点  $x$  に対し,  $f^{[n]}(x) \rightarrow p$  となるような区間  $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$  が存在するならば  $p$  は吸引的不動点であるという.
- (b)  $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$  にある  $f$  の定義域内の任意の点  $x$  に対し,  $x \neq p$  ならば必ず  $|f(x)-p| > |x-p|$  であるような区間  $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$  が存在するならば  $p$  は反発的不動点であるという.

次に, 不動点の性質を判断するための定理を示す.

**定理 1**  $f$  は不動点  $p$  で微分可能とする.

- (a)  $|f'(p)| < 1$  ならば  $p$  は吸引的である.
- (b)  $|f'(p)| > 1$  ならば  $p$  は反発的である.
- (c)  $|f'(p)| = 1$  ならば  $p$  は吸引的または反発的, あるいはどちらでもない.

次に, 吸引的不動点を持つ吸引域を判定するための定理を示す.

**定理 2**  $f$  は閉区間上で定義された連続関数とする.  $\{f^{[n]}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  は有界で単調な数列とする. このとき,  $f^{[n]}(x) \rightarrow p$  となるような不動点  $p$  が存在する.

## 2.2 周期点

$x_0$  は  $f$  の定義域内にあるとする.  $f^{[n]}(x_0) = x_0$  であり, さらに  $x_0, f(x_0), f^{[2]}(x_0), \dots, f^{[n-1]}(x_0)$  が全て異なるとき  $x_0$  は  $n$  周期点である (あるいは  $n$  周期点を持つ) という. 周期点を持つならば,  $x_0$  の軌道は  $\{x_0, f(x_0), f^{[2]}(x_0), \dots, f^{[n-1]}(x_0)\}$  が繰返し現れる周期軌道になる. この繰返される  $n$  個の点の集合を  $n$  サイクルという. グラフでいうと,  $f^{[2]}$  と直線  $y=x$  との交点 (または接点) である. サイクルにも不動点と同様に, 吸引的サイクルと反発的サイクルとがある.

## 3. 非対称 2 次関数の解析

### 3.1 非対称 2 次関数の定義

非対称 2 次関数を

$$f(x) = \begin{cases} \mu x(1 - \frac{x}{2v}) & (0 \leq x \leq v) & \dots\dots\dots(3.1) \\ -\frac{\mu v}{2(1-v)^2} x^2 + \frac{\mu v^2}{(1-v)^2} x + \frac{\mu v(1-2v)}{2(1-v)^2} & (v < x \leq 1) & \dots\dots\dots(3.2) \end{cases}$$

で定義する. パラメータ  $\mu, v$  は正の定数とし,  $0 < \mu < 1, 0 < \mu v \leq 2$  を満たすものとする. このとき  $f$  は  $x=v$  で微分可能であることがわかる.  $f$  のグラフは,  $\mu$  を大きくすると高さが増し,  $v$  を変化させると頂点が左右に移動する. また  $f$  は  $x=v$  のとき最大値  $\mu v/2$  となり,  $x=1/2$  のときロジスティック関数となる.

### 3.2 非対称 2 次関数の解析

ある関数のカオス的性質の有無を調べるには, リー・ヨークのカオスの定理から 3 周期点の存在が非常に重要であると言える.

#### 定理 3 (リー・ヨークのカオスの定理)

$f$  は閉区間  $J$  で連続であるとし, とする.  $f$  が 3 周期点を持つならば,  $f$  は他のすべての周期を持つ.

よって, 本研究ではまず基本となる 1 回写像の解析を行い, その結果をもとに 3 回写像の解析で 3 周期点を持つようなパラメータ  $\mu, v$  の組み合わせがあるかどうかについて調べた.

#### 3.2.1 1 回写像の解析

解析は, 不動点の取り方の違いにより, 3 つの場合に分けて考えた.

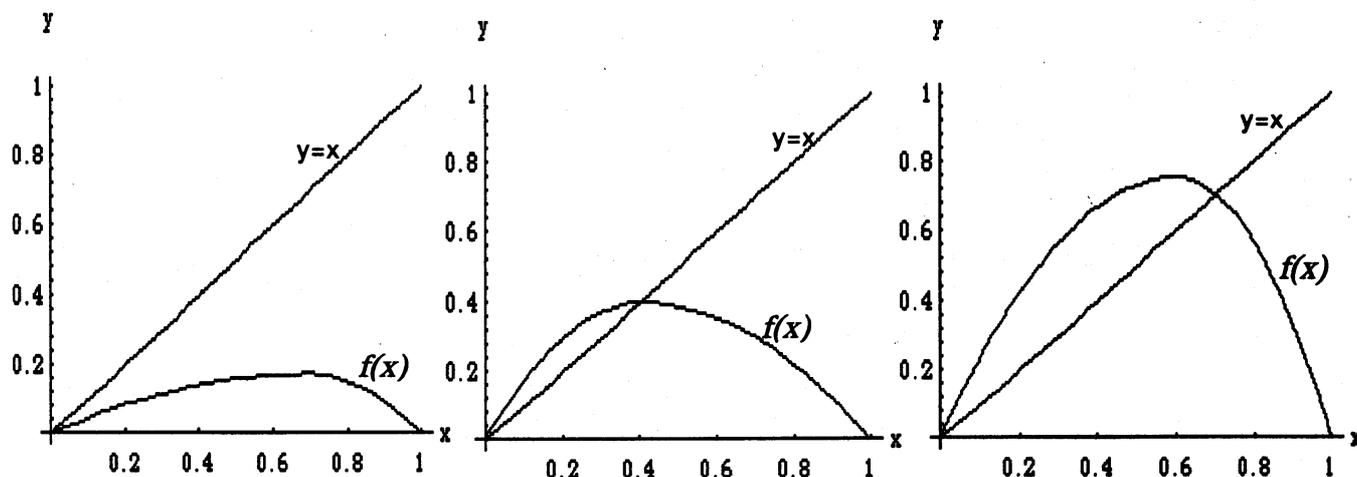


図 3.1  $\mu = 0.5, v = 0.7$

図 3.2  $\mu = 2.0, v = 0.4$

図 3.3  $\mu = 2.5, v = 0.6$

## 1. 不動点が 0 だけの場合 (図 3.1)

不動点が 0 のみとなるのは,  $f'(0) = \mu(1 - \mu/v \cdot 0) = \mu \leq 1$  となるときなので,  $\mu$  は  $0 < \mu < 1$  に限られる.  $0 < \mu < 1$  のとき  $|f'(0)| = \mu < 1$  なので, 定理 1 より 0 は吸引的不動点である. また,  $\mu = 1$  のときは  $|f'(0)| = 1$  となるが,  $f$  に  $\mu = 1$  を代入しグラフを見ると  $f$  は常に  $y = x$  の下側にあり,  $\{f^{[n]}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  は単調減少列であり, 定理 2 によりこの範囲にある唯一の不動点 0 に収束することがわかる. よって  $0 < \mu \leq 1$  のとき 0 は吸引的不動点である. 次に不動点 0 の吸引域について調べる. まず,  $0 \leq x \leq v$  のとき

$$0 \leq f(x) = \mu x \left(1 - \frac{x}{2v}\right) < \mu x \leq x \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

であり,  $0 < \mu \leq 1$  であるので,  $\{f^{[n]}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  は有界単調減少列で, 定理 2 より不動点 0 に収束する. 次に,  $v < x \leq 1$  のとき,  $0 \leq f(x) < v$  となるので上の解析から  $\{f^{[n]}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  は不動点 0 に収束する. 以上より, 不動点 0 の吸引域は区間  $[0, 1]$  で, 不動点 0 以外に周期点は存在しない.

2. 0 以外の不動点が  $0 < x \leq v$  に存在する場合 (図 3.2)

0 以外の不動点を  $p$  とおく.  $p$  が存在するのは,  $f'(0) > 1$  かつ最大値  $\mu v / 2 \leq v$  のときなので,  $\mu$  は  $1 < \mu \leq 2$  に限られる. まず不動点  $p$  の座標を求める.  $f(p) = \mu p(1 - p/2v) = p$  より  $p = 2v(1 - 1/\mu)$  になる. 次に 2 つの不動点の性質について調べる. まず不動点 0 は  $|f'(0)| = \mu > 1$  なので定理 1 より反発的不動点である. 次に不動点  $p$  について調べる.  $f'(x) = -\mu x/v + \mu$  なので  $f'(p) = -\mu(2v(1 - 1/\mu))/v + \mu$  より  $f'(p) = 2 - \mu$  である. よって  $1 < \mu < 2$  のとき  $|f'(p)| < 1$  となり, 定理 1 より不動点  $p$  は吸引的不動点である. また,  $\mu = 2$  のとき  $p = v$  となるが, グラフによる解析から,  $x < v$  での任意の点  $x$  は写像を繰返すうちに  $p$  に収束することがわかる. よって,  $p$  は吸引的不動点である. 次に不動点  $p$  の吸引域について調べる.  $0 < x < v$  のとき,

$$\begin{aligned} x - f(x) &= x - \mu x \left(1 - \frac{x}{2v}\right) \\ &= \frac{\mu}{2v} \left\{ x + \frac{v(1-\mu)}{\mu} \right\}^2 - \frac{v(1-\mu)^2}{2\mu} \quad \dots\dots\dots(3.4) \end{aligned}$$

となる. このままでは正負の判定が出来ない. そこで,  $A(x) = x - f(x)$  とおき,  $A(x)$  を横軸を  $x$  とした 2 次関数と見てその正負を調べる.  $A(x)$  は  $A(x) = 0$  より  $x$  軸との交点が 0 と  $p$  である. また,  $\mu/2v > 0$  なので  $A(x)$  は下に凸の 2 次関数となる. よって,  $0 < x < p$  のとき  $A(x) < 0$  すなわち  $x - f(x) < 0$  となる. このことから,  $x < f(x) < p$  がわかる. これより  $\{f^{[n]}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  は有界単調増加列で, 定理 2 より不動点  $p$  に収束する. また,  $p < x < v$  のとき,  $A(x) > 0$  すなわち  $x - f(x) > 0$  となる. これより,  $p < f(x) < x$  がわかる. これより  $\{f^{[n]}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  は有界単調減少列で定理 2 より, 不動点  $p$  に収束する. 次に,  $v < x < 1$  のときだが, これは,  $0 < f(x) < v$  となるので上の解析から  $\{f^{[n]}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  は不動点  $p$  に収束する. 以上のことより,  $p$  の吸引域は开区間  $(0, 1)$  であり, 0 と  $p$  の 2 つの不動点以外に周期点は存在しない.

3. 0 以外の不動点が  $v < x < 1$  に存在する場合 (図 3.3)

0 以外の不動点を  $q$  とおく.  $q$  が存在するのは  $f'(0) > 1$  かつ  $\mu v / 2$  のときなので,  $\mu$  は  $\mu > 2$  に限られる. まず, 不動点  $q$  の座標を求める.

$$f(q) = -\frac{\mu v}{2(1-v)^2} q^2 + \frac{\mu v^2}{(1-v)^2} q + \frac{\mu v(1-2v)}{2(1-v)^2} = q \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

1-11

$$q = \frac{(\mu-1)v^2 + 2v - 1 \pm (1-v)\sqrt{(1-\mu)^2v^2 - (2v-1)}}{\mu v} \dots\dots\dots(3.6)$$

なので,  $q$  は明らかに  $y = x$  との交点の大きい方なので

$$q = \frac{(\mu-1)v^2 + 2v - 1 + (1-v)\sqrt{(1-\mu)^2v^2 - (2v-1)}}{\mu v} \dots\dots\dots(3.7)$$

である. 次に 2 つの不動点の性質について調べる. まず 0 は,  $|f'(0)| = \mu > 1$  なので定理 1 より反発的不動点である. 次に  $q$  について調べる.

$$f'(x) = -\frac{\mu v}{(1-v)^2}x + \frac{\mu v^2}{(1-v)^2} \dots\dots\dots(3.8)$$

より,

$$\begin{aligned} f'(q) &= -\frac{\mu v}{(1-v)^2} \cdot \frac{(\mu-1)v^2 + 2v - 1 + (1-v)\sqrt{(1-\mu)^2v^2 - 2v + 1}}{\mu v} + \frac{\mu v^2}{(1-v)^2} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{(1-\mu)^2v^2 - 2v + 1}}{1-v} \dots\dots\dots(3.9) \end{aligned}$$

グラフより明らかに  $f'(q) < 0$  なので  $|f'(q)| = -f'(q)$  である. よって,

$$\begin{aligned} 1 - |f'(q)| &= 1 + f'(q) \\ &= 2 - \frac{\sqrt{(1-\mu)^2v^2 - 2v + 1}}{1-v} \\ &= \frac{1}{1-v} \left\{ 2(1-v) - \sqrt{(1-\mu)^2v^2 - 2v + 1} \right\} \dots\dots\dots(3.10) \end{aligned}$$

ここで,  $2(1-v) > 0$  であるから  $2(1-v) = \sqrt{4(1-v)^2}$  と書ける. よって,

$$1 - |f'(q)| = \frac{1}{1-v} \left\{ \sqrt{4(1-v)^2} - \sqrt{(1-\mu)^2v^2 - 2v + 1} \right\} \dots\dots\dots(3.11)$$

となる. これの正負の判定をするため, 根号の中身で大小を比較する.  $A = 4(1-v)^2$ ,  $B = (1-\mu)^2v^2 - 2v + 1$  とおく.

$$\begin{aligned} A - B &= 4(1-v)^2 - \left\{ (1-\mu)^2v^2 - 2v + 1 \right\} \\ &= (3+2\mu-\mu^2) \left( v - \frac{3}{3+2\mu-\mu^2} \right)^2 + \frac{3\mu(2-\mu)}{3+2\mu-\mu^2} \dots\dots\dots(3.12) \end{aligned}$$

このままでは正負の判定が出来ない.

そこで,  $Z(v) = A - B$  とおき,  $Z(v)$  を横軸を  $v$  とした 2 次関数と考えて, その正負を調べる.  $Z(v)$  は傾きが  $(3+2\mu-\mu^2)$  である. これより  $2 < \mu < 3$  のとき  $Z(v)$  は下に凸の 2 次関数となる.  $Z(v)$  は,  $v$  の範囲内にある  $v$  軸との交点  $\left\{ \beta - \sqrt{3\mu(\mu-2)} \right\} / (3+2\mu-\mu^2)$  でその正負が変化する.  $0 < v < \left\{ \beta - \sqrt{3\mu(\mu-2)} \right\} / (3+2\mu-\mu^2)$  のとき  $Z(v) > 0$  つまり  $1 - |f'(q)| > 0$  であり,  $|f'(q)| < 1$  となる. よって, 定理 1 より  $q$  は吸引的不動点である. また,  $\left\{ \beta - \sqrt{3\mu(\mu-2)} \right\} / (3+2\mu-\mu^2) < v < 1$  のとき  $Z(v) < 0$  つまり  $1 - |f'(q)| < 0$  であり,  $|f'(q)| > 1$  となる. よって, 定理 1 より  $q$  は反発的不動点である. 次に  $\mu > 3$  のときについて調べる. このとき  $Z(v)$  は上に凸の 2 次関数となる. 前述と同様にして調べた結果,  $2 < \mu < 3$  のときと全く同じ結果が得られた. 最後に,  $\mu = 3$  のときについて調べる.

$Z(v) = -6v + 3$  なので,  $Z(v)$  を  $v$  横軸とした 1 次関数と考えて同様に調べると次の結果が得られ

$0 < v < 1/2$  のとき,  $Z(v) > 0$  つまり  $1 - |f'(q)| > 0$  であり,  $|f'(q)| < 1$  となる. よって定理 1 より  $q$  は吸引的不動点である. また,  $1/2 < v < 1$  のとき,  $Z(v) < 0$  つまり  $1 - |f'(q)| < 0$  であり,  $|f'(q)| > 1$  となる. よって定理 1 より  $q$  は反発的不動点である. それぞれの範囲での吸引的不動点  $q$  の吸引域については, 式が複雑であり, 求めることは困難であるため今後の課題とする. しかし, グラフの解析によりその吸引域は区間  $(0, 1)$  であることが予想できる.

### 3.2.2 3回写像の解析

$f(x)$  の定義から,  $f^{[3]}(x)$  は写像の移り方の違いによって次の 8 つに分けられる. (図 3.4)

- ①  $0 \leq x \leq x_3$  のとき, 写像は (3.1)式  $\rightarrow$  (3.1)式  $\rightarrow$  (3.1)式に移る.
- ②  $x_3 < x \leq x_1$  のとき, 写像は (3.1)式  $\rightarrow$  (3.1)式  $\rightarrow$  (3.2)式に移る.
- ③  $x_1 < x \leq x_5$  のとき, 写像は (3.1)式  $\rightarrow$  (3.2)式  $\rightarrow$  (3.2)式に移る.
- ④  $x_5 < x \leq v$  のとき, 写像は (3.1)式  $\rightarrow$  (3.2)式  $\rightarrow$  (3.1)式に移る.
- ⑤  $v < x \leq x_6$  のとき, 写像は (3.2)式  $\rightarrow$  (3.2)式  $\rightarrow$  (3.1)式に移る.
- ⑥  $x_6 < x \leq x_2$  のとき, 写像は (3.2)式  $\rightarrow$  (3.2)式  $\rightarrow$  (3.2)式に移る.
- ⑦  $x_2 < x \leq x_4$  のとき, 写像は (3.2)式  $\rightarrow$  (3.1)式  $\rightarrow$  (3.2)式に移る.
- ⑧  $x_4 < x \leq 1$  のとき, 写像は (3.2)式  $\rightarrow$  (3.1)式  $\rightarrow$  (3.1)式に移る.

ここで点  $x_1, x_2$  は  $f(x) = v$  となる 2 点 ( $x_1 < x_2$ ) である. また点  $x_3, x_4$  は  $f(x) = x_1$  となる 2 点 ( $x_3 < x_4$ ), 点  $x_5, x_6$  は  $f(x) = x_2$  となる 2 点 ( $x_5 < x_6$ ) である.

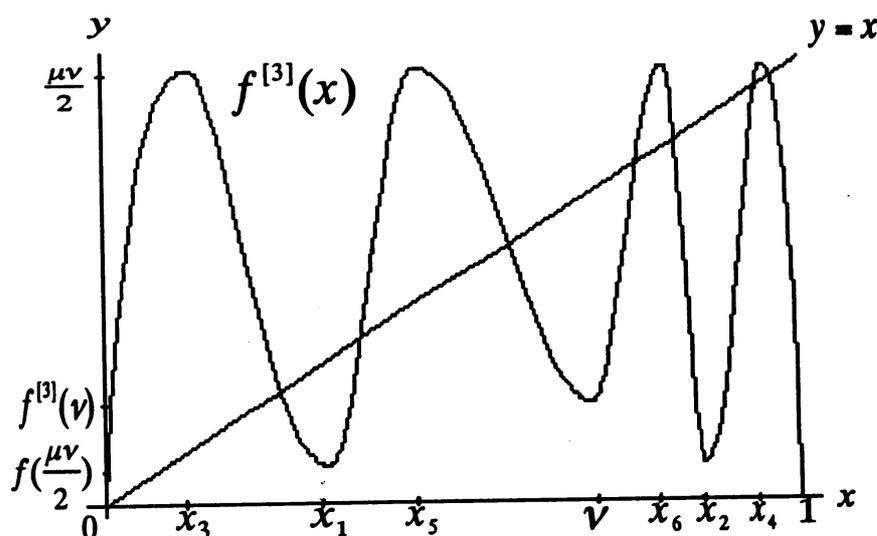


図 3.4  $\mu = 2.42, v = 0.8$

$f(x)$  の解析から,  $\mu \leq 2$  のときは  $f(x)$  の不動点以外の周期点は存在しないことがわかっているの  
で  $f^{[3]}(x)$  の解析は  $2 < \mu (< \frac{2}{v})$  について考える. 本研究では 3 周期点を持つ条件を,  $f^{[3]}(x)$  で  
不動点を 8 つ持つこととした. この 8 つの不動点には  $f(x)$  の不動点 0 と  $v$  が含まれている. それ  
以外の 6 つの不動点は 3 回写像の不動点なので 3 周期点である. 3 回写像で 8 つの不動点を持つ  
ための条件を次に示す.

条件 1:  $1 + \frac{1}{v} \sqrt{5v^2 - 8v + 4} < \mu < \frac{2}{v}$  (ただし  $5v^2 - 8v + 4 > 0 \because 0 < v < 1$ )

これはすべての点の値が実数となるための条件である.

条件 2:  $f^{[3]}(x_1) < x_1$  and  $f^{[3]}(v) < v$  and  $f^{[3]}(x_4) < x_4$

これは  $f^{[3]}(x)$  が  $y = x$  と 8 つの交点を持つための条件である.

この 2 つの条件を全て満たす  $\mu, v$  の組合せが 1 つでも存在したら  $f(x)$  はカオス的性質を有

していると言える。次に全ての条件を満たす  $\mu$ ,  $\nu$  の組合せの有無を調べる手順を示す。

step1:  $\nu$  を適当に 1 つ決める ( $\nu = \nu_0$ )

step2:  $\nu = \nu_0$  のときの  $\mu$  の範囲が決まる

step3: step 2 で求めた範囲内の  $\mu$  を適当な刻み幅で動かし、条件を満たす  $\mu$  を探す

step3 が終了したら、step1 に戻り範囲内の  $\nu$  を適当な刻み幅で動かし各  $\nu$  について step1 から 3 を繰り返す。図 3.5 は、 $\mu$  と  $\nu$  の刻み幅を共に 0.1 とした時に条件を全て満たした  $\mu$ ,  $\nu$  の組をプロットさせたグラフである。グラフからは分かりにくいがこの時の条件を全て満たした  $\mu$ ,  $\nu$  の組合せは約 600 個見つかった。

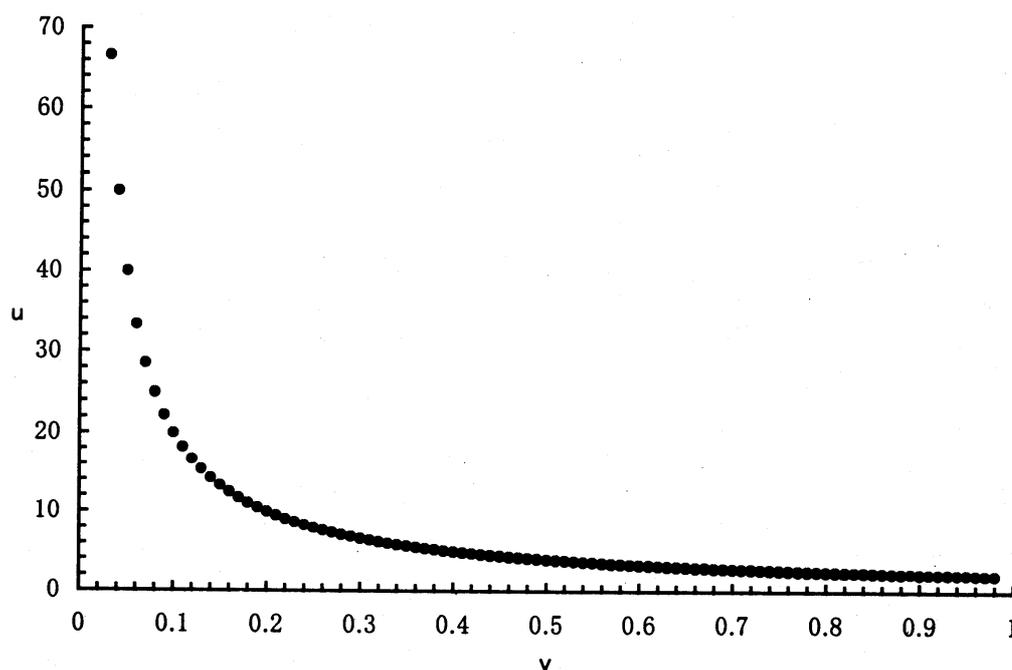


図 3.5 条件を全て満たした  $\mu$ ,  $\nu$  の組合せ

#### 4. おわりに

非対称 2 次関数の解析を行ったことで、これまで  $y$  軸方向にのみ注目していた解析に  $x$  軸方向への解析を取り入れることが出来た。このことにより、1 回写像の解析では、関数のグラフの高さを一定にしても頂点の位置を移動させることで不動点の性質が変化する場合もあるということがわかった。また、3 回写像の解析で 3 周期点を持つ  $\mu$ ,  $\nu$  の組合せが見つかったことで今回定義した関数  $f(x)$  がカオスの性質を有していることがわかった。

今後の課題は、 $f(x)$  に関して更に詳しい解析をすることや実際問題への応用を探ることなどである。

#### 参考文献

- [1] デニー・グーリック：カオスとの遭遇，産業図書(1995)
- [2] 長島弘幸・馬場良和：カオス入門，培風館(1996)
- [3] ロバート・L・デバニー：カオス力学系の基礎，星雲社(1997)
- [4] 下條隆嗣：カオス力学入門，近代科学社(1992)
- [5] 山口昌哉：カオス入門，朝倉書店(1996)
- [6] 森田善久：生物モデルのカオス，朝倉書店(1996)