数理解析研究所講究録 1252 巻 2002 年 226-232

相互関係のあるファジィ係数ベクトルをもつ線形計画問題の最悪達成率最適化

大阪大学大学院工学研究科　乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)
大阪大学大学院工学研究科　谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)

概 要

本研究では，ファジィ目的関数をもつ線形計画問題に対する達成率に基づく解法が議論される．最悪達成率最適化問題が定式化され，最悪達成率最適解がの性質が述べられる．ファジィ目標が与えられた場合と目標が具体的に与えられない場合について，緩和法に基づいた最悪達成率最適解の計算方法が提案される．

Key Words: 可能性計画法，必然性測度，緩和法，二分法，双線形計画法

1 はじめに

可能性計画問題に対する種々の定式化が提案されている [1][2]．可能性計画法は，目的関数の取り扱いにより，満足化に基づく方法と最適化に基づく方法に分類することができる [2]．最適化に基づく方法では，可能的最適解，必然的最適解，リグレットに基づくファジィ必然的最適解などが提案されているが，未だ十分に研究されていない．本研究では，達成率に基づくファジィ必然的最適解を取り上げ，その計算方法を議論する．

従来，可能性計画問題では，不明確な係数間の相互関係はあまり考慮されておらず，係数間に相互関係がないと仮定され，各係数の取りうる範囲に関する情報のみを用いてきた．しかし，現実には,「係数 a_1 と係数 a_2 の和はだいたい 10」といった複数の係数の総和や差に関する情報が得られる場合がある．そこで，本研究では，より一般に，不明確な係数の 1 次結合の値がファジィ数として与えられると仮定した問題を取り扱う．

このようなより一般的な場合にも，リグレットに基づくファジィ必然的最適解と同様に，達成率に基づくファジィ必然的最適解が緩和法と双線形計画法を用いて解けることが示される．

2 ファジィ目的関数をもつ線形計画問題と最適解

本研究では，次のファジィ目的関数をもつ線形計画問題を取り扱う．

$$\text{maximize} \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \quad \text{sub. to} \quad \boldsymbol{x} \in F, \tag{1}$$

ただし，$F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ であり，有界と仮定される．また，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}$ は可能性変数ベクトルで，次のメンバシップ関数をもつ $\mathbf{R}^n$ の有界なファジィ集合 Γ により取りうる範囲が与えられる．

$$\mu_\Gamma(\boldsymbol{r}) = \min_{j=1,2,\ldots,p} \mu_{\Gamma_j}(\boldsymbol{d}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}). \tag{2}$$

$\boldsymbol{r} \in \mathbf{R}^n$ で，Γ_j はファジィ数，すなわち，上半連続なメンバシップ関数 μ_{Γ_j} をもつ，正規，凸かつ有界な一次元実数空間上のファジィ集合で，$\boldsymbol{d}_j \in \mathbf{R}^n$ は定数ベクトルである．Γ の有界性より，$p \geq n$ となる．

$P(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \max_{\boldsymbol{y}\in F} \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\}$ とする．問題 (1) の可能的最適解集合 ΠS と必然的最適解集合 NS は，次のメンバシップ関数により定義される [3].

$$\mu_{\Pi S}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \sup\limits_{\boldsymbol{r}\in P(\boldsymbol{x})} \mu_{\gamma}(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{x} \in F \text{ のとき} \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin F \text{ のとき} \end{cases} \tag{3}$$

$$\mu_{NS}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \sup\limits_{\boldsymbol{r}\notin P(\boldsymbol{x})} 1 - \mu_{\Gamma}(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{x} \in F \text{ のとき} \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin F \text{ のとき} \end{cases} \tag{4}$$

$\mu_{NS}(\boldsymbol{x}) > 0$ ($\mu_{\Pi S}(\boldsymbol{x}) > 0$) となる解は，必然的 (可能的) 最適解と呼ばれる．必然的最適解は常に存在するとは限らない一方，可能的最適解は数多く存在する．必然的最適解が存在すれば，その解は最も合理的な解となる．

3 必然的ファジィ最適解

必然的最適解は存在しない場合が多いので，必然的最適性の概念を緩める必要がある．そこで，ファジィ最適性の概念を導入する．目的関数値が最適値と比べ，あまり遜色のない実行可能解は，準最適解とみなすことができる．この観点から，準最適解集合を次のメンバシップ関数をもつファジィ集合として定めることができる．

$$\mu_{T(\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mu_{Dif}\left(\max\limits_{\boldsymbol{y}\in F} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right), & \boldsymbol{x} \in F \text{ のとき} \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin F \text{ のとき} \end{cases} \tag{5}$$

あるいは，

$$\mu_{T(\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mu_{Rat}\left(\dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\max\limits_{\boldsymbol{y}\in F} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}\right), & \boldsymbol{x} \in F \text{ のとき} \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin F \text{ のとき} \end{cases} \tag{6}$$

ここで，μ_{Dif} は上半連続で非増加であり，μ_{Rat} は，$\max_{\boldsymbol{y}\in F} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$ であれば，上半連続で非減少，$\max_{\boldsymbol{y}\in F} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < 0$ であれば，非増加であると仮定される．式 (5) はリグレットに基づく準最適解集合の定義で，意思決定者が目的関数値の最適値からの差に着目している場合に有用である．一方，式 (6) は達成率に基づく準最適解の定義で，意思決定者が目的関数値の最適値との比を考慮したい場合に有用である．

準最適解集合 $T(\boldsymbol{c})$ を用いると，必然的ファジィ最適解集合 NT は，

$$\mu_{NT}(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{c}} \max\left(1 - \mu_{\Gamma}(\boldsymbol{c}), \mu_{T(\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{x})\right) \tag{7}$$

と定義される．ただし，式 (6) により定義される $T(\boldsymbol{c})$ を用いる場合には，$\max_{\boldsymbol{y}\in F} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} > 0, \forall \boldsymbol{c} \in (\Gamma)_0$ または，$\max_{\boldsymbol{y}\in F} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} < 0, \forall \boldsymbol{c} \in (\Gamma)_0$ の場合しか有効でないことに注意しよう．ここで，$(\Gamma)_h$ はファジィ集合 Γ の強 h-レベル集合で，$(\Gamma)_h = \{\boldsymbol{r} \mid \mu_{\Gamma}(\boldsymbol{r}) > h\}$ と定められる．特に，$(\Gamma)_0$ は Γ の支持集合と呼ばれる．

4 ファジィ目標が与えられる場合

4.1 定式化と解法

式 (5) の μ_{Dif} あるいは式 (6) の μ_{Rat} が意思決定者により予め定められたとき，$\mu_{NT}(\boldsymbol{x})$ が最大となる解が最も良好な解と考えられる．このことから，次の問題の解を求めることが課題となる．

$$\text{maximize}\ \ \mu_{NT}(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

この定式化は，既に，文献 [4] で提案されている．問題 (8) の最適解を $\hat{\boldsymbol{x}}$，最適値を $\hat{h}$ とすると，

$$\forall \boldsymbol{c} \in (\Gamma)_{1-\hat{h}},\ \mu_{T(\boldsymbol{c})}(\hat{\boldsymbol{x}}) \geq \hat{h} \tag{9}$$

が成立する．したがって，たとえ $\boldsymbol{c}$ が $(\Gamma)_{1-\hat{h}}$ 内で変動しても，$\hat{\boldsymbol{x}}$ が準最適解である度合いは，少なくとも $\hat{h}$ 以上であることが保証される．このように，問題 (8) を解くことにより，ロバスト性を有する解が求められる．

$T(\boldsymbol{c})$ が式 (5) で定められ，Γ が特別な場合については，緩和法と二分法に基づいた問題 (8) の解法が提案されている [4]．ここでは，より一般の Γ であり，しかも $T(\boldsymbol{c})$ が式 (6) で定められる場合についても，同様な結果が得られることを示す．ただし，$\max_{\boldsymbol{y}\in F} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} > 0, \forall \boldsymbol{c} \in (\Gamma)_0$ と仮定する．

変数 h を導入すると，μ_{Rat} の上半連続性より，問題 (8) は，

$$\text{maximize}\ \ h,\quad \text{sub. to}\ \ \boldsymbol{x} \in F,\ \ \mu_{Rat}\left(\min_{\substack{\boldsymbol{c}\in \mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}\\ \boldsymbol{y}\in F,\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}>0}} \frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}\right) \geq h \tag{10}$$

と書ける．h が大きければ大きいほど，$\boldsymbol{c} \in \mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$，$\boldsymbol{y} \in F$ かつ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} > 0$ という制約条件の下での $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}/\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ の最小値は小さい．したがって，問題 (10) は，次式の成否の判定を伴った二分法により解くことができる．

$$\mu_{Rat}\left(\max_{\boldsymbol{x}\in F} \min_{\substack{\boldsymbol{c}\in \mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}\\ \boldsymbol{y}\in F,\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}>0}} \frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}\right) \geq h \tag{11}$$

式 (11) が成立すれば，問題 (10) の最適値が h 以上であることがわかり，式 (11) が成立しなければ，問題 (10) の最適値が h より小さいことがわかる．したがって，[0, 1] 内の適当な値を h の初期値として初め，式 (11) が成立すれば，h の値を増加させ，成立しなければ，h の値を減少させる手続きを繰り返すことにより，最適値の存在範囲を任意の精度で特定することができる．

式 (11) の成否を判定するためには，式 (11) に含まれる max-min 問題を解かなければならない．そこで，この max-min 問題の解法を議論する．$\boldsymbol{c}^j : (0,1] \to (\Gamma)_0$, $j = 1, 2, \ldots, k$ を $\boldsymbol{c}^j(h) \in \mathrm{cl}(\Gamma)_h$, $\forall h \in [0,1)$ となるベクトル値関数とする．実際，各 j に対して，$\boldsymbol{c}^j$ は次に述べるように定められる．指標集合 $Q_j = \{q_{j1}, q_{j2}, \ldots, q_{jn}\} \subseteq P = \{1, 2, \ldots, p\}$, $q_{j1} < q_{j2} < \cdots < q_{jn}$ を考える．$B_j = (\beta_{j1}, \beta_{j2}, \ldots, \beta_{jn})^{\mathrm{T}}$ を $\beta_{ji} \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ なる n 次元ベクトルとする．Q_j と B_j を用いると，$\boldsymbol{c}^j(h)$ は次の線形計画問題の最適解

$(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)^{\mathrm{T}}$ における $\boldsymbol{c}$ の値として得られる.

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_i \\
\text{sub. to} & \inf(\Gamma_{q_{ji}})_h + \delta_i = \boldsymbol{d}_{q_{ji}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} \le \sup(\Gamma_{q_{ji}})_h, \text{ for } i \in N \text{ such that } \beta_{ji} = 0 \\
& \inf(\Gamma_{q_{ji}})_h \le \boldsymbol{d}_{q_{ji}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} = \sup(\Gamma_{q_{ji}})_h - \delta_i, \text{ for } i \in N \text{ such that } \beta_{ji} = 1 \\
& \inf(\Gamma_q)_h \le \boldsymbol{d}_q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} \le \sup(\Gamma_q)_h, \; q \in P \backslash Q_j \\
& \delta_i \ge 0, \; i = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
\tag{12}
$$

ただし, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ である.

式 (11) 内の max-min 問題の緩和問題として,

$$
\text{maximize } r, \quad \text{sub. to } \boldsymbol{x} \in F, \; \frac{\boldsymbol{c}^j (1-h)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{c}^j (1-h)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}^j} \ge r, \; j \in K \tag{13}
$$

が得られる. ただし, $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ である. Q_j の数は高々 ${}_p\mathrm{C}_n = n!/(p!(n-p)!)$ 個であり, B_j の数は高々 2^n 個である. したがって, $\boldsymbol{c}^j$ の数は高々 $2^n n!/(p!(n-p)!)$ 個となる. 任意の $h \in (0, 1]$ に対して, $\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$ は凸多面体であるので, 任意の $\boldsymbol{c} \in \mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$ は $\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$ の頂点の凸結合で表される. $V(\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h})$ を $\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$ の頂点集合とすると, $V(\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}) = \{\boldsymbol{c}^j(1-h), \; j = 1, 2, \ldots, 2^n n!/(p!(n-p)!)\}$ となる. ゆえに, $k = 2^n n!/(p!(n-p)!)$ であるとき, 問題 (13) は式 (11) 内の max-min 問題と等価になる.

問題 (13) の最適解を $\boldsymbol{x}^0$, 最適値を r^0 とする. 問題 (13) は緩和問題であるので, $\boldsymbol{x}^0$ が式 (11) 内の max-min 問題の最適解か否かを調べる必要がある. これは, 次の問題の最適値が r^0 以上か否かを調べることと等価になる.

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}^0}{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}} \\
\text{sub. to} & \inf(\Gamma_q)_{1-h} \le \boldsymbol{d}_q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} \le \sup(\Gamma_q)_{1-h}, \; q \in N \\
& \boldsymbol{y} \in F, \; \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} > 0
\end{array}
\tag{14}
$$

問題 (14) の最適値が r^0 以上であれば, $\boldsymbol{x}^0$ は式 (11) 内の max-min 問題の最適解である. そうでなければ, 次式を満たすように, $\boldsymbol{c}^{k+1} : (0, 1] \to (\Gamma)_0$ を定め, $K = K \cup \{k+1\}$ と更新すればよい.

$$
\frac{\boldsymbol{c}^{k+1} (1-h)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{c}^{k+1} (1-h)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}^j} < r^0 \tag{15}
$$

この関数 $\boldsymbol{c}^{k+1}$ は, 問題 (14) の最適解より定義することができる. すなわち, $\boldsymbol{d}_q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} = \inf(\Gamma_q)_{1-h}$ あるいは $\boldsymbol{d}_q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} = \sup(\Gamma_q)_{1-h}$ なる n 個の互いに独立な $\boldsymbol{d}_q$ をもつ問題 (14) の最適解 $\boldsymbol{c}$ の存在を示すことができ, この $\boldsymbol{c}$ に応じて Q_{k+1}, B_{k+1} が求まる. したがって, Q_{k+1}, B_{k+1} を用いて, 問題 (12) の最適解として, 関数 $\boldsymbol{c}^{k+1}$ を定めることができる.

許容誤差を $\varepsilon > 0$ とすると, 以上の議論より, 二分法と緩和法に基づいた次の解法が得られる.

アルゴリズム 1

手順 1. $\boldsymbol{c}^1 : (0,1] \to (\Gamma)_0$ を定めるため，Q_1 と B_1 を任意に定める．$\boldsymbol{y}^1$ を次の線形計画問題の最適解とする．

$$\text{maximize } \boldsymbol{c}^1(0.5)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \text{ sub. to } \boldsymbol{y} \in F. \tag{16}$$

手順 2. $h^{\mathrm{L}} = 0$, $h^{\mathrm{U}} = 1$, $k = 1$, $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{y}^1$ と設定する．

手順 3. $h = \frac{1}{2}(h^{\mathrm{L}} + h^{\mathrm{U}})$ とし，問題 (14) を解き，その最適解を $\boldsymbol{y}^{k+1}$，最適値を r^k とする．

手順 4. $\mu_{Rat}(r^k) \geq h$ であれば，$h^{\mathrm{L}} = h$ と更新し，手順 3 へ戻る．

手順 5. $h^{\mathrm{U}} - h^{\mathrm{L}} \leq \varepsilon$ であれば，アルゴリズムを終了する．このとき，$h^{\mathrm{U}} \leq \varepsilon$ であれば，$\mu_{NT}(\boldsymbol{x}) > \varepsilon$ なる解 $\boldsymbol{x}$ は存在しない．そうでなければ，$\boldsymbol{x}^0$ が最適解となる．

手順 6. 問題 (14) の最適解に対応する (Q_{k+1}, B_{k+1}) から $\boldsymbol{c}^{k+1}$ を構成する．$\boldsymbol{c}^j = \boldsymbol{c}^{k+1}$, $\boldsymbol{y}^j = \boldsymbol{y}^{k+1}$ なる $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ が存在しなければ，$k = k+1$ と更新する．

手順 7. $h = \frac{1}{2}(h^{\mathrm{L}} + h^{\mathrm{U}})$ とし，問題 (13) の最適解 $(\boldsymbol{x}^*, r^*)$ を求める．

手順 8. $\mu_{Rat}(r^*) < h$ であれば，$h^{\mathrm{U}} = h$ と更新し，手順 7 へ戻る．そうでなければ，$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}^*$ と更新して，手順 3 へ戻る．

アルゴリズム 1 では，h を固定する度に，式 (11) 内の max-min 問題を解くのではなく，max-min 問題の解の計算と h の最適化とを同時進行させている．このアルゴリズムの収束性は，文献 [4] と同様に示すことができる．

4.2 問題 (14) の解法

アルゴリズム 1 における問題 (14) 以外の部分問題は線形計画問題となり，容易に解くことができる．問題 (14) は凸計画問題ではないが，凹最小化問題となる．文献 [5] では，この問題が 2 レベル計画問題として取り扱われ，シンプレックス法と分枝限定法を用いて解く方法が提案されている．しかし，残念ながら，類似した問題による数値実験 [6][7] から，この方法の計算効率性は芳しくない．

より効率的な解法を適用するため，さらに $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$, $\forall \boldsymbol{c} \in (\Gamma)_0$ なる $\boldsymbol{x} \in F$ が存在すると仮定する．この仮定の下では，問題 (13) の任意の最適解に対して，$\boldsymbol{c}^{j\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0 > 0$, $\forall j \in K$ が保証される．このことから，手順 6 で $\boldsymbol{c}^{k+1}(1-h) \in \mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$ かつ $\boldsymbol{c}^{k+1}(1-h)^T\boldsymbol{x}^0 = \min_{\boldsymbol{c} \in \mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0 \leq 0$ を満たす $\boldsymbol{c}^{k+1} : (0,1] \to (\Gamma)_0$ が得られたならば，$\boldsymbol{y}^{k+1}$ を $\text{maximize}_{\boldsymbol{y} \in F}\ \boldsymbol{c}^{k+1}(1-h)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ の最適解で更新し，アルゴリズム 1 の次の手順に進む方法が考えられる．これに基づき変更した手順 6 は次のようになる．

手順 6'. 問題 (14) の最適解に対応する (Q_{k+1}, B_{k+1}) から $\boldsymbol{c}^{k+1}$ を構成する．$\boldsymbol{c}^{k+1}(1-h)^T\boldsymbol{x}^0 \leq 0$ が成立すれば，$\boldsymbol{y}^{k+1}$ を次の線形計画問題の最適解で置き換える．

$$\text{maximize } \boldsymbol{c}^{k+1}(1-h)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \text{ sub. to } \boldsymbol{y} \in F \tag{17}$$

$\boldsymbol{c}^j = \boldsymbol{c}^{k+1}$, $\boldsymbol{y}^j = \boldsymbol{y}^{k+1}$ なる $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ が存在しなければ，$k = k+1$ と更新する．

この変更により，$\boldsymbol{c}^{j\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0 > 0, \forall j \in K$ を満たす解 $\boldsymbol{x}^0$ が手順 7 で得られる．

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0, \forall \boldsymbol{c} \in \mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}$ なる解 $\boldsymbol{x} \in F$ が存在するという仮定から，次式が成立する．

$$\max_{\substack{\boldsymbol{c}\in\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}\\ \boldsymbol{y}\in F, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}>0}} \frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0} = \frac{1}{\displaystyle\min_{\substack{\boldsymbol{c}\in\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h}\\ \boldsymbol{y}\in F,\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}>0}} \frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0}{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}} \tag{18}$$

線形分数計画法の考え方を適用すると，式 (18) の左辺の分母の問題は，次の双線形計画問題に帰着する．

$$\text{maximize}\ \ \hat{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \qquad \text{sub. to}\ \ \hat{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0 = 1,\ \boldsymbol{y} \in F,\ \frac{\hat{\boldsymbol{c}}}{t} \in \mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h} \tag{19}$$

この問題の最適解を $(\hat{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{y}, t)$ とすると，解 $(\hat{\boldsymbol{c}}/t, \boldsymbol{y})$ は問題 (14) の最適解となる．問題 (19) を解くために，外部近似法や切除平面法などの多くの解法を適用することができる [7]．類似した問題の数値実験の結果 [6][7] では，外部近似法あるいは外部近似と切除平面を併用する方法が，2 段階アプローチ，2 レベル計画アプローチ，切除平面法より効率性の面で優れていることが報告されており，問題 (19) に対してもこれらの解法が適していると考えられる．このように，問題 (14) の最適解を求めるためには，より容易な問題 (19) を解けば良いことになる．

5　ファジィ目標が与えられない場合

μ_{Dif} や μ_{Rat} を予め定めることが，意思決定者にとって困難のことがある．このような状況にあっても，係数のどの程度の変動を考慮するかをメンバシップ値に相当するレベル $h^0 \in (0, 1]$ で与えることが可能な場合がある．h^0 が大きければ大きいほど，より広い範囲の変動を考慮することになる．そこで，

$$\mu_{Dif}(r) = \begin{cases} 1, & r \le q_{Dif}\ \text{のとき} \\ 0, & r > q_{Dif}\ \text{のとき} \end{cases} \tag{20}$$

$$\mu_{Rat}(r) = \begin{cases} 1, & r \le |q_{Rat} - 1|\ \text{のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{21}$$

と定義し，それぞれ，次の問題として取り扱うことが考えられる．

$$\text{minimize}\ q_{Dif}\ \ \text{sub. to}\ \mu_{NT}(\boldsymbol{x}) \ge h^0 \tag{22}$$

$$\text{minimize}\ |q_{Rat} - 1|\ \ \text{sub. to}\ \mu_{NT}(\boldsymbol{x}) \ge h^0 \tag{23}$$

これらの問題は，次に示すように，ロバストな性質をもった解を導く．たとえば，問題 (22) を考え，その最適解を $\hat{\boldsymbol{x}}$，最適値を $\hat{q}$ とすると，次式が成立する．

$$\forall \boldsymbol{c} \in (\Gamma)_{1-h^0},\ \forall \boldsymbol{y} \in F,\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}} \le \hat{q} \tag{24}$$

問題 (23) の場合も同様である．

問題 (22)，(23) をいかに解くかが課題となる．ここでは，$\max_{\boldsymbol{y}\in F} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} > 0, \forall \boldsymbol{c} \in (\Gamma)_0$ と仮定して，問題 (23) を取り上げる．仮定より，問題 (23) は，

$$\text{maximize}\ \min_{\substack{\boldsymbol{c}\in\mathrm{cl}(\Gamma)_{1-h^0}\\ \boldsymbol{y}\in F,\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}>0}} \frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}},\ \ \text{sub. to}\ \ \boldsymbol{x} \in F \tag{25}$$

と変形できる．この問題は，式 (11) 内の max-min 問題と同じ問題で，4.1, 4.2 分節での議論がそのまま有効となる．特に，h^0 が固定されているので，問題 (25) は問題 (10) より容易な問題となっている．許容誤差を $\varepsilon > 0$ と定めると，緩和法に基づいた次の解法アルゴリズムが得られる．

アルゴリズム 2

手順 1. $\boldsymbol{c}^1 : (0,1] \to (\Gamma)_0$ を定めるため，Q_1 と B_1 を任意に定める．$\boldsymbol{y}^1$ を次の線形計画問題の最適解とする．

$$\text{maximize } \boldsymbol{c}^1(h_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \quad \text{sub. to } \boldsymbol{y} \in F \tag{26}$$

$k = 1$, $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{y}^1$, $r^0 = 1$ と設定する．

手順 2. $h = h^0$ とした問題 (14) の最適解を $\boldsymbol{y}^{k+1}$，最適値を r^k とする．

手順 3. $r^k \geq r^0 - \varepsilon$ であれば，アルゴリズムを終了する．このとき，最適解は $\boldsymbol{x}^0$ となる．

手順 4. 問題 (14) の最適解に対応する (Q_{k+1}, B_{k+1}) から $\boldsymbol{c}^{k+1}$ を構成する．$k = k+1$ と更新する．$h = h^0$ とする問題 (13) の最適解により，$(\boldsymbol{x}^0, r^0)$ を更新する．手順 2 へ戻る．

参考文献

[1] M. Inuiguchi and J. Ramík, "Possibilistic Linear Programming: A Brief Review of Fuzzy Mathematical Programming and a Comparison with Stochastic Programming in Portfolio Selection Problem," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.111, 2000, pp 3–28.

[2] 乾口，井田,"連載：多様な決定を支援する可能性計画法", 日本ファジィ学会誌，Vol.12, 2000, pp.10–18 (第 1 回), pp.210–217 (第 2 回), pp.377–381 (第 3 回), pp.507–514 (第 4 回)

[3] M. Inuiguchi and M. Sakawa, "Possible and Necessary Optimality Tests in Possibilistic Linear Programming Problems," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.67, 1994, pp 29–46.

[4] M. Inuiguchi and M. Sakawa, "Robust Optimization under Softness in a Fuzzy Linear Programming Problem," *Int. J. Approximate Reasoning*, Vol.18, 1998, pp 21–34.

[5] M. Inuiguchi and T. Tanino, "An Achievement Rate Approach to Linear Programming Problem with Convex Polyhedral Objective Coefficients," *Proc. of 3rd AFSS*, Masan, Korea, June 1998, pp 501–505.

[6] M. Inuiguchi, H. Higashitani and T. Tanino, "On Computation Methods of the Minimax Regret Solution for Linear Programming Problems with Uncertain Objective Function Coefficients," *Proc. of 1999 IEEE Int. Conf. on SMC*, Vol.3, Tokyo, Japan, October, 1999, pp 979–984.

[7] M. Inuiguchi and T. Tanino, "On Computation Methods for a Minimax Regret Solution Based on Outer Approximation and Cutting Hyperplanes," *International Journal of Fuzzy Systems*, Vol.3, 2001, pp 548–557.