数理解析研究所講究録 1252 巻 2002 年 240-245

ファジィランダム変数を含む線形計画問題に対する可能性計画と確率計画に基づく意思決定

広島大学大学院工学研究科 片桐 英樹 (Katagiri Hideki)
Graduate School of Engineering, Hiroshima University
広島大学大学院工学研究科 坂和 正敏 (Masatoshi Sakawa)
Graduate School of Engineering, Hiroshima University
大阪大学大学院工学研究科 石井 博昭 (Hiroaki Ishii)
Graduate School of Engineering, Osaka University

1 はじめに

現実の社会においては，扱う環境の複雑かつ大規模化により，不確実なデータや情報に基づいて意思決定を行わなければならない場合がますます増えつつある．これまで，不確実性あるいはあいまい性を伴う状況下での意思決定を行う場合には，主に確率論的アプローチとファジィ理論的アプローチの 2 つが考えられてきた．確率計画法 (stochastic programming) においては，Dantzig[1] や Beale[2] が 2 段階問題を考え，また Charnes と Cooper[3] が機会制約条件計画問題として，目的関数の期待値を最適化する E モデル，分散を最小化する V モデル，さらに，目的関数がある希求レベル以下である確率を最大化する P モデルを提案している．また，片岡 [4] は，目的関数を確率とするのではなく制約として扱い，希求水準を目的関数として最適化するモデルを考えた．このモデルは，fractile criterion model[5] とも呼ばれる．

一方，Zadeh によって提案されたファジィ理論 [6] に基づいて発展してきたファジィ数理計画法 (fuzzy mathematical programming) においても様々なモデルが考えられ，発展してきている [7].

これらのモデルにおいては，ランダム性とファジィ性が別々に扱われているが，現実には熟練者があるパラメータを見積もる際に「ある確率でだいたいこれぐらい」という形で情報をもっている場合もある．そのような状況を扱うための有用な概念として，ファジィランダム変数 [8, 9] が提案されており，近年になって，線形計画問題や多目的問題など数理計画問題への応用が盛んになりつつある．Wang ら [10, 11] はファジィランダム変数を含む線形計画問題を最初に定式化し，分布問題を考えた．彼らはファジィランダム変数を含む線形計画問題に対するモデル化やその解法をまとめて，ファジィランダム線形計画法 (fuzzy random linear programming) と名付けている [11]．その後，太田ら [12] は多目的線形計画問題において目的関数の係数が離散型のファジィランダム変数である場合を扱い，目的関数に対する満足度に関して楽観インデックスと悲観インデックスを用いた意思決定モデルを提案した．さらに，Luhandjula[13, 14] は，ファジィランダム変数のレベル集合を表す区間の端点に対応する確率変数に注目し，確率制約条件計画として扱うモデルを与えている．また，Katagiri ら [15] は，線形計画問題の等式制約における右辺定数項がファジィランダム変数である場合に対する定式化とその解法を示している．この論文では，等式における両辺の差に対してファジィ目標を設け，その目標に関する可能性測度 [16, 17] が確率的に変動することに着目して確率計画に基づいた意思決定法を提案している．

本論文では，確率変数の実現値に関するアンビギュイティ[18] を扱う概念としてファジィランダム変数を解釈し，[15] に基づいて目的関数値がある値以下である可能性測度および必然性測度に対する確率計画モデルを提案する．

まず，2 節では線形計画問題の目的関数がファジィランダム変数である場合を取り扱い，ファジィランダム変数が扱うあいまい性に関する考察に基づいて，可能性測度の期待値を最大化するモデルを提案する．3

節では，分散最小化モデルについて述べ，その解法を示す．最後に 4 章でまとめと今後の課題について述べる．

2 可能性測度を用いた期待値モデル

2.1 定式化

次のような多目的線形計画問題を考える。

$$\left.\begin{array}{ll}\min & \bar{\boldsymbol{c}}_i(\omega_i)\boldsymbol{x}, \quad i=1,...,k \\ \text{s. t.} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\end{array}\right\} \quad (1)$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ は n 次元決定変数列ベクトル，A は $m \times n$ 係数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元列ベクトルである．また，目的関数の係数ベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_i(\omega_i)$ は $\bar{\boldsymbol{c}}_i(\omega_i) = (\bar{c}_{i1}(\omega_i), \ldots, \bar{c}_{in}(\omega_i))$，$i = 1,...,k$，であり，$\bar{c}_{ij}(\omega_i)$，$j = 1,\ldots,n$ は次のメンバシップ関数で規定される対称三角型ファジィ数 $\tilde{C}_{ij}(\omega_{is})$ を実現値とするファジィランダム変数であるとする．

$$\mu_{\tilde{C}_{ij}(\omega_{is})}(t) = \max\left\{0, 1 - \frac{|t - c_{ij}(\omega_{is})|}{\alpha_{ij}}\right\}, \quad (2)$$

$$i = 1,...,k,\ j = 1,...,n$$

ただし，ω_{is}，$s = 1,...,l_i$ は i 番目の目的関数に含まれるファジィランダム変数 $\bar{c}_{ij}(\omega_i)$ に対応する根元事象を表し，生起確率 p_{is} は非負ですべての i について，$\sum_{s=1}^{l_i} p_{is} = 1$ を満たすものとする．また，α_{ij}，$i = 1,\ldots,k$，$j = 1,\ldots,n$ は広がりを表すパラメータであり正数とする．このファジィランダム変数は，Kaufman

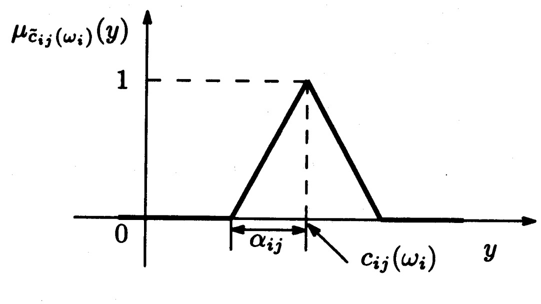

図 1: ファジィランダム変数係数

ら [19] によって提案されたハイブリッド数と同じものである．

全ての係数が対称三角型のファジィランダム変数であるため，各目的関数も拡張原理に基づく L-R ファジィ数の演算 [17] により，次のメンバシップ関数で規定されるファジィランダム変数 $\tilde{Y}_i(\omega_i)$ となる (図 2 参照).

$$\mu_{\tilde{Y}_i(\omega_i)}(t) = \max\left\{0\ ,\ 1 - \frac{\left|t - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\omega_i)x_j\right|}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j}\right\},$$

$$i = 1,\ldots,k \quad (3)$$

問題 (1) は，目的関数にファジィランダム変数を含

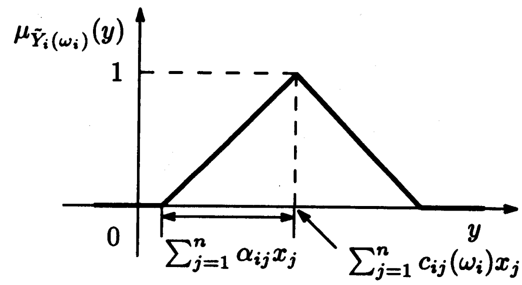

図 2: 各目的関数のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{Y}_i(\omega_i)}(t)$

んでいるため，通常の確定問題と同じように目的関数を最小化することはできない．したがって，ファジィ数理計画や確率計画と同様に何らかの最適化基準に基づいたモデルを考えることが必要になる．

ここで，ファジィ理論において扱われてきた概念として Klir[18] によって導入されたベイグネスとアンビギュイティの概念に着目する．ベイグネスとは境界がはっきりしないというあいまい性を表し，またアンビギュイティとは多くの可能性のうちのどれであるか特定できないあいまい性を表す．そのような観点から考察すると，本研究で扱うファジィランダム変数は，ある事象が起こったときの確率変数の実現値そのものがあいまいである状況を扱う概念であり，確率変数の実現値に対するアンビギュイティを扱っているといえる．一方，Zadeh によって定義されたファジィ事象 [20] は，例えば，サイコロを振る場合において「大きな目の出る」事象など，あいまいさを含む事象について，その生起確率など様々な性質を扱うための概念であり，確率変数の実現値に関するベイグネスを扱ったものと解釈することができる．

ファジィ数理計画法においては，アンビギュイティを扱ったアプローチの一つに可能性計画が考えられており，可能性測度や必然性測度を用いた様々なモデルが提案されている [7]．ファジィランダム変数が確率変数の実現値に対するアンビギュイティを扱う概念で

あると解釈すれば，従来の可能性計画と確率計画に基づいたアプローチも有効な意思決定法になると考えられる．

2.2 可能性測度と期待値モデル

各目的関数に対して，意思決定者の人間としての判断の曖昧性を考慮すると，各目的関数の値を「だいたい h_i^0 以下にしたい」という曖昧な目標をもつものと考えることができる．したがって，各目的関数に対するファジィ目標を次の線形メンバシップ関数に規定されるファジィ集合 $\tilde{G}_i$ で与える．

$$\mu_{\tilde{G}_i}(y) = \begin{cases} 0, & y > h_i^0 \\ \dfrac{y - h_i^0}{h_i^1 - h_i^0}, & h_i^1 \le y \le h_i^0 \\ 1, & y < h_i^1, \quad i = 1, \dots, k \end{cases}$$

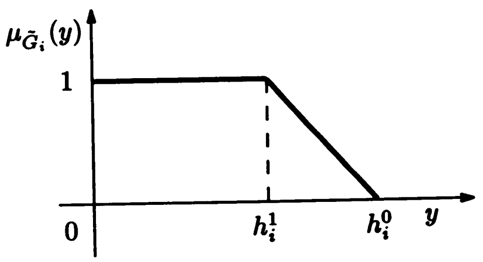

図 3: ファジィ目標のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{G}_i}(y)$

それぞれの根元事象 ω_{is}, $s = 1, \dots, l_i$ に対して，目的関数を規定するメンバシップ関数 $\mu_{\bar{Y}_i(\omega_{is})}$ を可能性分布とみなすとき，その分布の下でファジィ目標 $\tilde{G}_i$ が満たされる可能性測度 $\Pi_{\bar{Y}_i(\omega_{is})}(\tilde{G}_i)$ は，次の式で与えられる．

$$\Pi_{\bar{Y}_i(\omega_{is})}(\tilde{G}_i) = \sup_y \min\left\{\mu_{\bar{Y}_i(\omega_{is})}(y),\ \mu_{\tilde{G}_i}(y)\right\}, \quad i = 1, \dots, k \tag{4}$$

ここで，目的関数に対して，起こり得る全事象を考慮したときに，可能性測度が最小，すなわち 0 になるような y の最大値を h_i^0 とし，逆に可能性測度が最大，すなわち 1 になるような y の最小値を h_i^1 とする．言い換えれば，

$$h_i^0 = \max_s \max_{x \in X} \sum_{j=1}^n \{c_{ij}(\omega_{is}) - \alpha_{ij}\} x_j$$

$$h_i^1 = \min_s \min_{x \in X} \sum_{j=1}^n c_{ij}(\omega_{is}) x_j, \quad i = 1, \dots, k$$

とする．ただし，$X \triangleq \{x | Ax \le b,\ x \ge 0\}$ である．このとき，(4) 式で表される値は図 4 で示されるように線形関数の交点に対応しているため，次のように計算される (図 4 参照)．

$$\Pi_{\bar{Y}_i(\omega_{is})}(\tilde{G}_i) = \frac{\sum_{j=1}^n \{\alpha_{ij} - c_{ij}(\omega_{is})\} x_j + h_i^0}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - h_i^1 + h_i^0} \tag{5}$$

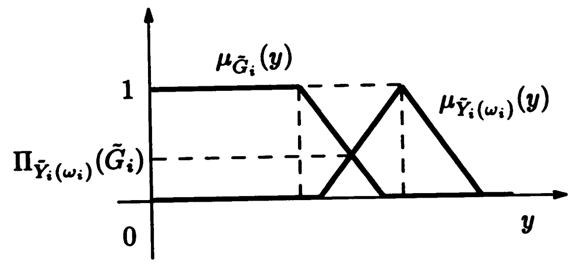

図 4: ファジィ目標に対する可能性測度の値

(5) 式によって，それぞれの根元事象に ω_{is} に対する可能性測度の値が与えられるため，元の問題は確率的に変動する目的関数にもつ次の多目的確率計画問題として定式化される．

$$\left.\begin{array}{ll} \max & \dfrac{\sum_{j=1}^n \{\alpha_{ij} - c_{ij}(\omega_i)\} x_j + h_i^0}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - h_i^1 + h_i^0}, \\ & \qquad i = 1, \dots, k \\ \text{s. t.} & Ax \le b,\ x \ge 0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

確率計画問題に対してはいくつかのアプローチがあるが，ここでは，まず可能性測度の期待値を最大化するモデルを考える．可能性測度の期待値 $E[\Pi_{\bar{Y}_i(\omega_i)}(\tilde{G}_i)]$ は次の式で表される．

$$E[\Pi_{\bar{Y}_i(\omega_i)}(\tilde{G}_i)] = \frac{\sum_{s=1}^{l_i} p_{is}\left[\sum_{j=1}^n \{\alpha_{ij} - c_{ij}(\omega_{is})\} x_j + h_i^0\right]}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - h_i^1 + h_i^0}, \quad i = 1, \dots, k \tag{7}$$

以上により，問題 (1) に対して，各目的関数に対応する可能性測度の期待値が計算された．したがって，問題 (1) は，次のような多目的意思決定問題として定式化される．

$$\left.\begin{array}{ll} \max & E[\Pi_{\bar{Y}_i(\omega_i)}(\tilde{G}_i)],\ i = 1, \dots, k \\ \text{s. t.} & Ax \le b,\ x \ge 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

ここで，この問題は各目的関数が (7) で与えられる線形分数関数であるため，多目的線形分数計画問題になっている．

2.3 パレート最適性と対話型満足化手法

問題 (8) には複数個の目的関数が存在するため，通常の単一目的の場合の最適解と同様に議論することはできない．そこで，ある目的関数に対応する可能性の期待値を改善するためには少なくとも他の一つの可能性の期待値を改悪せざるを得ないような解としてパレート最適解を求めることを考え，基準点法に基づく対話型意思決定 [21] により意思決定者の満足解を導出する．

それぞれの可能性測度の期待値に対して意思決定者の志望水準を反映させるために，意思決定者により基準点 $\bar{\pi} = (\bar{\pi}_1, ..., \bar{\pi}_k)$ を主観的に設定する．このとき，もし，基準点の設定がひかえめすぎて達成可能であれば，その基準点より望ましい最適解を求める一方，もし基準点の設定が達成不可能であれば，基準点にできるだけ近い最適解を求めることが望まれる．各目的関数値と基準点との差の最大値の最小にする minimax 問題を考えると，次のように定式化される．

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} \max_{1 \leq i \leq k} \{\bar{\pi}_i - EP_i(\boldsymbol{x})\} \tag{9}$$

基準点 $\bar{\pi}$ が与えられたとき，minimax 問題 (9) は各目的関数が線形分数関数であることから，2 分法と 2 段階シンプレックス法の第一段を用いることにより解くことができる．したがって，意思決定者との対話によって満足解を得るアルゴリズムは次のようになる．

[可能性の期待値モデルに対する基準点を用いた対話型意思決定手法]

手順 1 初期の基準値 $\bar{\pi}_i$ を 1.0 に設定する．

手順 2 設定された基準値 $\bar{\pi}$ に対して，対応する minimax 問題 (9) を解く．

手順 3 現在の解に満足なら終了．そうでなければ，基準値 $\bar{\pi}$ を更新して手順 2 へ戻る．

3 可能性測度を用いた分散最小化モデル

3.1 定式化

前節では，各目的関数に対してファジィ目標を設定し，その目標が満たされる可能性の度合いの期待値を最大化する問題を考えた．しかし，期待値モデルでは値のばらつきを考慮していないために特定のシナリオに対する可能性の度合いが小さくなる恐れがある．したがって，本節では値のばらつきを考慮するために分散最小化モデルを考える．

$$\Pi_{\tilde{Y}_i(\omega_{is})}(\tilde{G}_i) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \{\alpha_{ij} - c_{ij}(\omega_{is})\} x_j + h_i^0}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - h_i^1 + h_i^0} \tag{10}$$

$i = 1, ..., k$ に対して，それぞれ可能性測度の分散 $V[\Pi_{\tilde{Y}_i(\omega_i)}(\tilde{G}_i)]$ を考えると次のように計算できる．

$$\begin{aligned} & V[\Pi_{\tilde{Y}_i(\omega_i)}(\tilde{G}_i)] \\ = \;& V\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} \{\alpha_{ij} - c_{ij}(\omega_i)\} x_j + h_i^0}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - h_i^1 + h_i^0}\right] \\ = \;& \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - h_i^1 + h_i^0\right)^2} V\left[\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\omega_i) x_j\right] \\ \triangleq \;& \frac{1}{\{Q_i(\boldsymbol{x})\}^2} V\left[\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\omega_i) x_j\right] \end{aligned}$$

係数ベクトル $\boldsymbol{c}_i(\omega_i)$, $i = 1, \ldots, k$ の分散共分散行列を，V_i, $i = 1, \ldots, k$ とすると，問題 (1) に対する可能性測度の分散モデルは次のように定式化できる．

$$\left.\begin{array}{ll} \min & \dfrac{1}{\{Q_i(\boldsymbol{x})\}^2} \boldsymbol{x}^T V_i \boldsymbol{x}, \quad i = 1, ..., k \\ \text{s. t.} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \; \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right\} \tag{11}$$

このとき，分散共分散行列は以下のように表される．

$$V_i = \begin{bmatrix} v_{11}^i & v_{12}^i & \cdots & v_{1n}^i \\ v_{21}^i & v_{22}^i & \cdots & v_{2n}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1}^i & v_{n2}^i & \cdots & v_{nn}^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, k$$

ここで，行列のそれぞれの要素は，

$$
\begin{aligned}
v^i_{jj} &= V[c_{ij}(\omega_i)] \\
&\doteq \sum_{s=1}^{l_i} p_{is}\{c_{ij}(\omega_{is})\}^2 - \left\{\sum_{s=1}^{l_i} p_{is}c_{ij}(\omega_{is})\right\}^2, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad j = 1,\dots,n \\
v^i_{jl} &= Cov[c_{ij}(\omega_i), c_{il}(\omega_i)] \\
&= E[c_{ij}(\omega_i), c_{il}(\omega_i)] - E[c_{ij}(\omega_i)]E[c_{il}(\omega_i)], \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad j \neq l, \quad l = 1,\dots,n
\end{aligned}
$$

とする．ただし，

$$
E[c_{ij}(\omega_i), c_{il}(\omega_i)] = \sum_{s=1}^{l_i} p_{is}c_{ij}(\omega_{is})c_{il}(\omega_{is})
$$

である．

(11) において，$Q_i(\boldsymbol{x}) > 0$, $i = 1,\dots,k$ であり，分散の性質から $\boldsymbol{x}^T V_i \boldsymbol{x} \geq 0$ であるので，目的関数の平方根をとっても解は変わらない．よって (11) は次の問題と等価である．

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\min & \dfrac{1}{Q_i(\boldsymbol{x})}\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i \boldsymbol{x}} \ (\triangleq VP_i(\boldsymbol{x})),\ i = 1,\dots,k \\
\text{s. t.} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\right\}
\tag{12}
$$

3.2 対話型満足化手法に基づく意思決定

前節の期待値モデルと同様にして，基準点法に基づく対話型意思決定手法によって意思決定者の満足解を導出する方法を考える．基準点 $\bar{\pi} = (\bar{\pi}_1,\dots,\bar{\pi}_k)$ が与えられたとき，多目的問題 (12) に対して，$\max_{1\leq i\leq k}\{VP(\boldsymbol{x}) - \bar{\pi}_i\}$ が最小となる $\boldsymbol{x}$ が最も望ましいと考えると，

$$
\min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{1\leq i\leq k}\{VP_i(\boldsymbol{x}) - \bar{\pi}_i\} \triangleq \min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{1\leq i\leq k}\left\{\frac{N_i(\boldsymbol{x})}{Q_i(\boldsymbol{x})}\right\}
\tag{13}
$$

と定式化することができる．

このとき minimax 問題 (13) において，各目的関数の分子が凸関数，分母が線形となるため，分数関数全体としては準凸関数となる．したがって，Borde ら [22] による一般化分数計画問題に対する解法を用いて大域的最適解を求めることができる．

以上から，意思決定者との対話によって満足解を得るアルゴリズムは次のようになる．

手順 1 初期の基準点 $\bar{\pi}_i$ を 0 に設定する．

手順 2 任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}^0 \in X$ を求め，$\lambda = 0$ とする．

手順 3 $\boldsymbol{x}^\lambda$ に対して，

$$
q^\lambda = \max_{1\leq i\leq k}\left\{\frac{N_i(\boldsymbol{x}^\lambda)}{Q_i(\boldsymbol{x}^\lambda)}\right\}
$$

を計算し，次の問題を解く．

$$
\begin{array}{ll}
\min & Z \\
\text{s.t.} & \dfrac{1}{Q_i(\boldsymbol{x}^\lambda)}\{Q_i(\boldsymbol{x}) - q^\lambda N_i(\boldsymbol{x})\} \leq Z, \\
& i = 1,\dots,k, \qquad \boldsymbol{x} \in X
\end{array}
$$

この問題の最適解を $\boldsymbol{x}^{\lambda+1}$ として手順 4 へ進む．

手順 4 $Z = 0$ ならば，手順 5 へ進む．そうでなければ，$\lambda \leftarrow \lambda + 1$ として手順 3 へ戻る．

手順 5 現在の解に満足すれば，終了する．基準点 $\bar{\pi}$ を更新して手順 2 へ戻る．

4 おわりに

本稿では，目的関数の係数にファジィランダム変数を含む多目的線形計画問題において，各目的関数にファジィ目標を設定し，可能性計画に基づいて目標が達成される可能性に焦点をあて，それらの度合いの期待値および分散を最適化するモデルを提案した．このとき，ファジィランダム変数およびファジィ目標を特性付けるメンバシップ関数が線形である場合には，期待値モデルが線形分数計画問題に帰着され，また分散最小化モデルにおいて基準点に基づく対話型満足化手法を用いて解くときの問題が一般分数計画法のアルゴリズムによって解けることを示した．

本論文で扱ったファジィランダム変数では，広がりを表すパラメータが事象に依存せずに一定であったが，事象に依存する場合は，期待値を計算したときに線形分数にならないため，通常の線形分計画問題には帰着されない．しかし，広がりが事象に依存して変化する場合は，現実問題において非常に有用であると考えられるため，そのような状況でのモデル化が重要な課題の一つとして挙げられる．

また，本研究では取り上げなかった連続型のファジィランダム変数 [23] や決定変数が離散変数である場合なども提案されており，今後もさらに発展していくものと考えられる．

参考文献

[1] G.B. Dantzig, Linear programming under uncertainty, Management Science, vol. 1, pp. 197–206, 1955.

[2] E.M.L. Beale, "On optimizing a convex function subject to linear inequalities", J. Roy. Statist. Soc, vol. 17, pp.173–184, 1955.

[3] A. Charnes, W.W. Cooper, "Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints," Operations Research, vol. 11, pp. 18–39, 1963.

[4] S. Kataoka, "A stochastic programming model," Econometrica, vol. 31, pp. 181–196, 1963.

[5] A.M. Geoffrion, "Stochastic programming with aspiration or fractile criteria," *Management Science*, vol. 13, pp. 672–679, 1967.

[6] L.A. Zadeh, "Fuzzy sets," Information and Control, vol. 8, pp. 338-353, 1965.

[7] M. Inuiguchi, and J. Ramik, "Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem," Fuzzy Sets and Systems, vol. 111, pp. 3–28, 2000.

[8] H. Kwakernaak, "Fuzzy random variable-1," Information Sciences, vol. 15, pp. 1-29, 1978.

[9] M.L. Puri, and D.A. Ralescu, "Fuzzy random variables," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 114, pp. 409–422, 1986.

[10] G.-Y. Wang, and Q. Zhong, "Linear programming with fuzzy random variable coefficients", Fuzzy Sets and Systems, vol. 57, pp. 295–311, 1993.

[11] Q. Zhong and G.-Y. Wang, "On solutions and distribution problems of the linear programming with fuzzy random variable coefficients," Fuzzy Sets and Systems, vol. 58, pp. 155–170, 1993.

[12] 太田英一，山口俊和，高野康浩，係数間の関係を考慮したファジィ多目標線形計画法，日本ファジィ学会誌，vol. 6, No. 1, pp. 166-176, 1994.

[13] M.K. Luhandjula, and M.M. Gupta, "On fuzzy stochastic optimization, " Fuzzy Sets and Systems, vol. 81, pp. 47–55, 1996.

[14] Luhandjula, "Fuzziness and randomness in an optimization framework," Fuzzy Sets and Systems, vol. 77, pp. 291-297, 1996.

[15] H. Katagiri, and H. Ishii, "Linear programming problem with fuzzy random constraint," Mathematica Japonica, vol. 52, pp. 123–129, 2000.

[16] L.A. Zadeh, "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility," Fuzzy Sets and Systems, vol. 1, pp. 3-28, 1978.

[17] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets and Systems, Academic Press, New York, 1980.

[18] G.J. Klir and T.A. Folger, Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice Hall (1988).

[19] A. Kaufman, and M.M. Gupta, Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications, Van Nostrand Reinhold Company, 1985.

[20] L.A. Zadeh, "Probability measure of fuzzy events," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 23, pp. 421–427, 1968.

[21] A.P. Wierzbicki, "The use of reference objectives in multiobjective optimization, in: G. Frande and T. Gal (eds.), Multiple Criteria Decision Making: Theory and Application, Springer-Verlag, 1980.

[22] J. Borde, and J.P. Crouzeix, "Convergence of a Dinkelbach-type algorithm in generalized fractional programming," Zeitschrift fur Operations Research, vol. 31, pp. 31–54, 1987.

[23] 片桐英樹，坂和正敏，石井博昭，ファジーランダム変数係数を含む線形計画問題に対する可能性測度と必然性測度を用いた機会制約条件計画，電子情報通信学会論文誌，(投稿中).