

## 二者択一の定理と双対定理

並木 誠 (東邦大学理学部)

塚田 真 (東邦大学理学部)

### 1 はじめに

二者択一の定理と呼ばれる定理には、多くの形のもの知られている ([6], pp.63-118)。その中で、Farkas の補題 [4] と呼ばれるものは、最も古典的で最もよく知られたものであろう。これは以下のように述べられる。いま、 $A$  を  $m \times n$ -行列とし、 $\mathbb{R}^m$  (resp.  $\mathbb{R}^n$ ) を  $m$  次元 (resp.  $n$  次元) 列ベクトルの全体とする。このとき、任意の  $b \in \mathbb{R}^m$  に対して次のいずれか一方の集合のみ必ず空となる：

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}, \\ \mathcal{Y} &\stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y \geq 0, b^T y < 0\}. \end{aligned}$$

一方、Gale [5] は、次のいずれか一方の集合のみ必ず空集合となるという形で、二者択一の定理を述べている：

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}, \\ \mathcal{Y} &\stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y \geq 0, y \geq 0, b^T y < 0\}. \end{aligned}$$

二者択一の定理は、線形計画法の双対定理と密接に結びついている ([3], [5], [6])。例えば、標準型、或いは基準型と呼ばれる線形計画問題の主問題と双対問題は

$$\text{Maximize } c^T x \quad \text{s.t. } \begin{cases} Ax = b; \\ x \geq 0. \end{cases}$$

および

$$\text{Minimize } b^T y \quad \text{s.t. } A^T y \geq c.$$

のように表現される。これは、Farkas の補題と結びついている。一方、双対型と呼ばれる線形計画問題の主問題と双対問題は

$$\text{Maximize } c^T x \quad \text{s.t. } \begin{cases} Ax \leq b; \\ x \geq 0, \end{cases}$$

AMS 2000 Subject classifications. Primary 90C05, Secondary 46C05

Key words. Farkas's lemma, linear programming, closed convex set, geometry of Hilbert space

$$\text{Minimize } \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \mathbf{A}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{c}; \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

で表現される。これは Gale の形の二者択一定理と結びついていることが読みとれるであろう。この論文の目的は、Farkas、Gale およびその他既知の幾つかを含む二者択一の定理を示し、それを用いて線形計画問題とその双対問題の関係を明確にして、更に双対定理を直接証明することにある。線形計画法の教科書では通常、単体法（シンプレクス法）などのアルゴリズムが先に与えられ、それに基づいて双対定理（基本定理、弱双対定理、強双対定理および相補スラック条件）が証明される。共著者の一人（並木）は、線形計画問題の基本的性質がアルゴリズムに基づいて導かれるのは不自然であるとの観点から、既に線形代数の初等的知識だけを仮定して、二者択一定理を経由して双対定理を導く方法を開発した ([7])。この方法の利点は、その証明が新たなアルゴリズムの可能性を提案しているところにあり、この方向での発展が期待される。もう一方の共著者（塚田）は、函数解析学の立場でその証明を眺めたとき、行列の成分をいじる証明は、内積の基本的性質だけを用いる見通しのよい証明に変形できるのではと考えた。更に、その証明は自然に非線形計画問題の双対定理となっている。ここで得られた結果は、更にそのまま局所凸線形位相空間へ拡張することは容易い ([2])。しかしながら、敢えて Hilbert 空間の文脈で記述することが重要であると考えている。その理由の 1 つは、その証明がそのまま有限次元空間でのごく自然な証明になっていることが重要と考えるからである。[1] では有限次元 Euclid 空間で、ここで得られた結果に近いものを導いている。しかし、多面錐を一般の凸錐（スムーズな境界面を持つ錐など）に置き換えた場合、有限次元であることの利点はあまり重要ではなくなる。これは有限次元の場合ですら、一般の閉凸錐の線形写像による像が閉でなくなること、また 2 つの閉凸錐の和が閉でなくなることなどによるものである。もう 1 つの理由は、Hilbert 空間として Hilbert-Schmitt クラスや再生核 Hilbert 空間を考えたとき、応用上有用な結果が得られるのではないかと考えていることにある。実際、Hilbert-Schmitt クラスを考えるとという方向性は、有限次元では半定値計画問題 (semi-definite programming) として、現在活発に研究されている分野である ([8])。

## 2 閉凸錐と双対錐

$H$  を実 Hilbert 空間とし、内積は  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  で表すことにする。 $H$  の部分集合  $C$  が

$$\alpha, \beta > 0, x, y \in C \Rightarrow \alpha x + \beta y \in C$$

を満たすとき、 $C$  は凸錐であるという。 $H$  の閉凸錐の任意の族の共通部分は閉凸錐であるので、 $H$  の任意の部分集合  $X$  に対して、 $X$  を含む最小の閉凸錐が存在する。その閉凸錐を、 $X$  が生成する閉凸錐と呼び  $\widehat{X}$  で表すことにする。任意の  $x \in H$  に対して、 $\langle x \rangle^+$  および  $\langle x \rangle^-$  はそれぞれ  $\widehat{\langle x \rangle}$  および  $\widehat{\langle -x \rangle}$  のこととする。

$H$  の任意の部分集合  $X$  に対して、

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in H \mid \langle x | y \rangle \geq 0 \text{ for all } x \in X\}$$

と定義して、 $X$  の正の双対錐（或いは、単に双対錐）と呼ぶ。負の双対錐  $-X^*$  はしばしば  $X$  の極錐と呼ばれる。任意の  $X \subseteq H$  に対して、 $\widehat{X^*} = X^*$  である。また、 $X$  が  $H$  の線形部分空間であるときは  $X^*$  は  $X$  の直交補空間  $X^\perp$  に等しい。以下に挙げる補題はすべて、よく知られた結果で

補題 1  $H$  の任意の部分集合  $X$  に対して、 $X^{**} = \widehat{X}$  が成立する。

この補題は、いわゆる分離定理から証明される。分離定理は Hahn-Banach 定理の幾何的表現と呼ばれることもあり、選択公理（或いはそれと同値な Zorn の補題）がクリティカルに関わってくる。しかしながら、Hilbert 空間で論ずる限りは Hahn-Banach 定理を持ち出すまでもなく、最短距離定理から容易に証明される。

補題 2  $H$  の任意の閉凸錐  $X$  に対して、 $X^{**} = X$  が成立する。

$K$  が  $H$  の閉部分空間であるならば、上の系は  $K^{\perp\perp} = K$  であることを主張している。 $H$  の任意の凸錐  $C_1$  および  $C_2$  に対して、 $C_1 + C_2$  を

$$C_1 + C_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$$

と定義する。

補題 3  $\overline{C_1 + C_2} = (C_1 \cup C_2)^\wedge$ .

補題 4  $(C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*$ .

補題 5  $(C_1 \cap C_2)^* = \overline{C_1^* + C_2^*}$ .

$H_1$  および  $H_2$  をそれぞれ Hilbert 空間とし、任意の  $C \subseteq H_1$  および  $D \subseteq H_2$  に対して直和  $C \oplus D \subseteq H_1 \oplus H_2$  を

$$C \oplus D \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x \in C, y \in D \right\}$$

により定義する。

補題 6  $(C \oplus D)^* = C^* \oplus D^*$ .

### 3 二者択一の定理

以下では、Hilbert 空間  $H_1$  および  $H_2$  と、 $H_1$  上で定義され  $H_2$  に値をとる任意の有界線形写像  $A$  を固定して考える。 $A^*$  は  $H_2$  上で定義され  $H_1$  に値をとる  $A$  の共役線形写像を表す。即ち、任意の  $x \in H_1$  および  $y \in H_2$  に対して

$$\langle Ax | y \rangle = \langle x | A^* y \rangle$$

を満たす。

任意の凸錐  $C \subseteq H_1$  に対して

$$A[C] \stackrel{\text{def}}{=} \{Ax \mid x \in C\} \quad \text{and} \quad (A^*)^{-1}[C^*] \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in H \mid A^*y \in C^*\}$$

と定義する。 $A[C]$  および  $(A^*)^{-1}[C^*]$  はいずれも  $H_2$  の凸錐であり、特に後者は閉凸錐となる。

補題 7  $A[C]^* = (A^*)^{-1}[C^*]$ .

$$\begin{aligned}
v \in A[C]^* &\Leftrightarrow \langle y|v \rangle \geq 0 \text{ for all } y \in A[C] \\
&\Leftrightarrow \langle Ax|v \rangle \geq 0 \text{ for all } x \in C \\
&\Leftrightarrow \langle x|A^*v \rangle \geq 0 \text{ for all } x \in C \\
&\Leftrightarrow A^*v \in C^* \\
&\Leftrightarrow v \in (A^*)^{-1}[C^*].
\end{aligned}$$

系 1  $\overline{A[C]} = (A^*)^{-1}[C^*]^*$ .

上の補題と系の特別な場合として、基本的な関係式  $\text{Range}(A)^\perp = \text{Kernel}(A^*)$  および  $\overline{\text{Range}(A)} = \text{Kernel}(A^*)^\perp$  が得られる。

定理 1  $C \subseteq H_1$  を凸錐とし  $A[C]$  が閉であるとする。このとき、任意の  $b \in H_2$  に対して、次に2つの集合のうちいずれか一方のみが必ず空集合となる。

$$\begin{aligned}
X &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in H_1 \mid Ax = b, x \in C\}, \\
Y &\stackrel{\text{def}}{=} \{y \in H_2 \mid A^*y \in C^*, \langle b|y \rangle < 0\}.
\end{aligned}$$

証明 証明すべき命題は

$$X \neq \emptyset \Leftrightarrow Y = \emptyset$$

と言い換えてもよい。この同値関係の左辺は  $b \in A[C]$  と同値である。一方、

$$\begin{aligned}
Y = \emptyset &\Leftrightarrow \forall y \in H_2, A^*y \notin C^* \text{ or } \langle b|y \rangle \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \forall y \in H_2, A^*y \in C^* \text{ implies } \langle b|y \rangle \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \forall y \in H_2, y \in (A^*)^{-1}[C^*] \text{ implies } \langle b|y \rangle \geq 0 \\
&\Leftrightarrow b \in (A^*)^{-1}[C^*]^*
\end{aligned}$$

である。従って、証明すべき命題は

$$b \in A[C] \Leftrightarrow b \in (A^*)^{-1}[C^*]^*$$

即ち、 $A[C] = (A^*)^{-1}[C^*]^*$  であるが、これは  $A[C]$  が閉であることから系 1 で示されている。

上の定理において、 $H_1$  および  $H_2$  が有限次元であり、 $C$  が多面錐、即ち

$$C = \{x \in H_1 \mid \langle b_1|x \rangle \geq 0, \dots, \langle b_n|x \rangle \geq 0\}.$$

という形をしているならば、その  $A$  による像  $A[C]$  も多面錐であり、 $A[C]$  が閉という条件は自動的に満たされる。しかしながら、一般には  $A[C]$  が閉という条件は  $C$  が閉という条件置き換えることはできない。 $H_1 = H_2 = \mathbb{R}^3$  として、行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

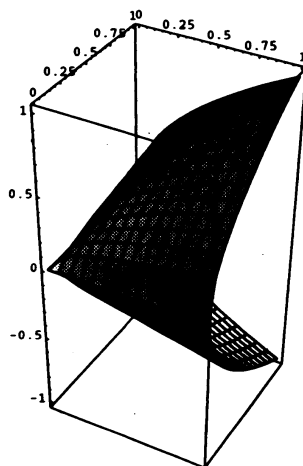
で表現される線形写像を考える。また、

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 \text{ and } y \geq 0 \text{ and } z^2 \leq xy\}.$$

と定義すると、 $C$  は閉凸錐であるが

$$A[C] = (\{0\} \times (0, \infty) \times \mathbb{R}) \cup \{[0, 0, 0]^T\}$$

は凸錐であるが閉集合とはならない。



ここで  $b = [0, 0, 1]^T$  とおくと  $b \notin A[C]$  であり、従って定理 1 における集合  $X$  は空集合である。一方、 $A^* = A$  および  $C^* = C$  であることから、 $A^*[x, y, z]^T \in C^*$  であるならば  $z = 0$  であるので、

$$[0, 0, 1][x, y, z]^T = 0$$

が言える。よって、定理 1 における集合  $Y$  も空集合である。即ち、二者択一は成立しない。

もし定理 1 における  $A[C]$  の条件を取り除くならば、定理 1 は次のような漸近的な形に修正しなければならない。

**定理 2**  $C \subseteq H_1$  を凸錐とし、 $b \in H_2$  とする。このとき、次の命題のいずれか一方のみ必ず真となる。

$$(I) \quad \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C : \|b - Ax_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$(II) \quad \exists y \in H_2 : A^*y \in C^* \text{ and } \langle b|y \rangle < 0.$$

**証明** (I) は  $b \in \overline{A[C]}$  と同値であり、一方、(II) の否定命題は  $b \in ((A^*)^{-1}[C^*])^*$  と同値であったので、 $\overline{A[C]} = ((A^*)^{-1}[C^*])^*$  であることより証明される。

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \{[1, 0, \dots, 0]^T, \dots, [0, \dots, 0, 1]^T\}$$

として、 $P \stackrel{\text{def}}{=} \hat{E}$  と定義する。このとき

$$P = \{[x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$$

であるので  $P$  は閉多面錐であり、しかも  $P^* = P$  を満たす。 $x \geq y$  (或いは同じ意味で  $y \leq x$ ) であることを  $x - y \in P$  であることと定義する。

系 2  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  を線形部分空間とし、 $b \in \mathbb{R}^m$  とする。このとき以下の (1)-(4) において  $X$  および  $Y$  いずれか一方のみ空集合となる。

(1) Matsui & Namiki:

$$\begin{aligned} X &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \in P \cap K\}, \\ Y &\stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^*y \in P + K^\perp, \langle b|y \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

(2) Matsui & Namiki:

$$\begin{aligned} X &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \in P + K^\perp\}, \\ Y &\stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^*y \in P \cap K, \langle b|y \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

(3) Farkas:

$$\begin{aligned} X &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}, \\ Y &\stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^*y \geq 0, \langle b|y \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

(4) Gale:

$$\begin{aligned} X &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}, \\ Y &\stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^*y \geq 0, \langle b|y \rangle \neq 0\}. \end{aligned}$$

定理 3  $K \subseteq H$  を閉線形部分空間とし、 $C \subseteq H$  を凸錐で  $C$  の  $K$  上への直交射影は閉集合となるものとし、 $b \in K$  とする。このとき、次の集合のいずれか一方のみ必ず空集合となる。

$$\begin{aligned} X &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in K^\perp \mid x + b \in C\}, \\ Y &\stackrel{\text{def}}{=} \{y \in K \mid y \in C^*, \langle b|y \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

証明 定理 1 において  $H_1 = H_2 = H$  とし、 $A$  を  $K$  上への直交射影とする。

$$\begin{aligned} X' &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in H \mid Ax = b, x \in C\}, \\ Y' &\stackrel{\text{def}}{=} \{y \in H \mid A^*y \in C^*, \langle b|y \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

とおくと、 $X'$  と  $Y'$  のいずれか一方のみ必ず空集合となる。このとき

$$\begin{aligned} X' &= \{x + b \mid x \in K^\perp, x + b \in C\}, \\ Y' &= \{y \in K \mid y \in C^*, \langle b|y \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

と表現でき、 $X'$  が空であることと  $X$  が空であることは同値であり、また  $Y' = Y$  である。従って、定理の主張を得る。

定理 4  $K \subseteq H$  を閉線形部分空間とし、 $C \subseteq H$  を凸錐、 $b \in K$  とする。このとき、次の命題のいずれか一方のみ必ず真となる。

- (I)  $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq K^\perp : d(x_n + b, C) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ ,
- (II)  $\exists y \in K \cap C^* : \langle b|y \rangle < 0$

定理 5  $C \subseteq H_1$  および  $D \subseteq H_2$  を凸錐とし  $A[C] - D$  が閉であるとする。このとき  $b \in H_2$  に対して、次の集合のいずれか一方のみ必ず空集合となる。

$$\begin{aligned} X &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in H_1 \mid Ax - b \in D, x \in C\}, \\ Y &\stackrel{\text{def}}{=} \{y \in H_2 \mid A^*y \in C^*, -y \in D^*, \langle b|y \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

証明 直和 Hilbert 空間  $H_1 \oplus H_2$  を

$$H_1 \oplus H_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x \in H_1, y \in H_2 \right\}.$$

のように考える。このとき、以下のような同値関係が成立する。

$$\begin{aligned} X \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists x \in H_1, \exists y \in H_2, Ax - b = y, y \in D, x \in C \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid Ax - b = y, y \in D, x \in C \right\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid Ax - b = y, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C \oplus D \right\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid Ax - y = b, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C \oplus D \right\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid [A, -I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C \oplus D \right\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

ここで  $A[C] - D$  が閉であるので最後の命題は定理 1 より

$$\left\{ y \in H_2 \mid \begin{bmatrix} A^* \\ -I \end{bmatrix} y \in (C \oplus D)^*, \langle b|y \rangle < 0 \right\} = \emptyset.$$

と同値であり、

$$\begin{aligned} &\left\{ y \in H_2 \mid \begin{bmatrix} A^* \\ -I \end{bmatrix} y \in (C \oplus D)^*, \langle b|y \rangle < 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in H_2 \mid \begin{bmatrix} A^* \\ -I \end{bmatrix} y \in (C^* \oplus D^*), \langle b|y \rangle < 0 \right\} \\ &= \{y \in H_2 \mid A^*y \in C^*, -y \in D^*, \langle b|y \rangle < 0\} \end{aligned}$$

であるので、定理の主張を得る。

系 3 (Gale)  $b \in H_2$  とする。このとき次の集合のいずれか一方のみ必ず空集合となる。

$$\begin{aligned} X &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in H_1 \mid Ax \leq b, x \geq 0\}, \\ Y &\stackrel{\text{def}}{=} \{y \in H_2 \mid A^*y \geq 0, y \geq 0, \langle b|y \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

#### 4 錐計画法における双対定理

以下この節では任意の有形線形写像  $A : H_1 \rightarrow H_2$ 、凸錐  $C \subseteq H_1$  および  $B \subseteq H_2$ 、そして  $c \in H_1$ 、 $b \in H_2$  を固定して考える。錐計画問題とは

$$(P) : \text{Maximize } \langle c|x \rangle \quad \text{s.t.} \begin{cases} b - Ax \in B^*; \\ x \in C, \end{cases}$$

で表される。それに対する双対問題とは

$$(D) : \text{Minimize } \langle b|y \rangle \quad \text{s.t.} \begin{cases} A^*y - c \in C^*; \\ y \in B. \end{cases}$$

で表される。

**定理 6 (弱双対定理)**  $x$  および  $y$  がそれぞれ (P) および (D) の実行可能解である (即ち、それぞれの拘束条件を満たす) とき、

$$\langle c|x \rangle \leq \langle b|y \rangle$$

が成立する。

**証明**  $A : H_1 \oplus H_2 \rightarrow H_1 \oplus H_2$  を行列

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & A^* \\ -A & 0 \end{bmatrix}.$$

により定義する。このとき、(P) および (D) の拘束条件をまとめて

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} \in C^* \oplus B^*, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C \oplus B.$$

と表現できる。 $C^* \oplus B^* = (C \oplus B)^*$  であったので

$$\left\langle A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0,$$

であり

$$\left\langle A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = (A^*y)^* x + (-Ax)^* y = \langle y|Ax \rangle - \langle Ax|y \rangle = 0$$

であるので

$$-\left\langle \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0.$$

を得る。即ち、 $\langle c|x \rangle \leq \langle b|y \rangle$  が示された。

**定理 7 (相補スラック条件)** (P) および (D) の実行可能解をそれぞれ  $x$  および  $y$  とするとき、

$$\begin{bmatrix} A^*y - c \\ b - Ax \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

が成立するための必要十分条件は、 $x$  および  $y$  がそれぞれ (P) および (D) の最適解となることである。

**証明** 弱双対定理の証明により明らか。



定理 8 (強双対定理) (P) および (D) のいずれにも実行可能解が存在し、しかも  $H_1 \oplus H_2$  の凸錐

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left[ \begin{array}{c} A^*y - u \\ -Ax - v \end{array} \right] \mid x \in C, y \in B, \langle b|y \rangle \leq \langle c|x \rangle, u \in C^*, v \in B^* \right\}$$

が閉集合であるとする。

このとき (P) および (D) にそれぞれ最適解  $\bar{x}$  および  $\bar{y}$  (それぞれの目的関数の最適値を与える実行可能解) が存在し

$$\langle c|x \rangle = \langle b|y \rangle$$

が成立する。

証明 次の条件を満たすような  $\bar{x}$  および  $\bar{y}$  を示せば十分である。

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} &\in C^* \oplus B^*, \\ \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} &\in C \oplus B, \\ \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} &\geq 0. \end{aligned}$$

最後の条件は  $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}^*$  と書き換えることができることに注意する。ここで、

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} \in (C \oplus B)^*, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in (C \oplus B) \cap \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}^* \right\}$$

および

$$Y = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid A^* \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in (C \oplus B)^* + \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}^+, - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C \oplus B, \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} < 0 \right\}$$

とおく。X が空ではないことを示せばよいが、定理 5 より、それには Y が空集合であることを示せば十分である。そこで、

$$A^* \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in (C \oplus B)^* + \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}^+, - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C \oplus B$$

と仮定する。このとき、 $\lambda \geq 0$  が存在して

$$A^* \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} \in C^* \oplus B^*$$

が成立する。A\* = -A であったから

$$A \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} \in C^* \oplus B^*.$$

である。 $\lambda > 0$ であるとする。このとき

$$\mathbb{A} \begin{bmatrix} -x/\lambda \\ -y/\lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} \in C^* \oplus B^*, \quad \begin{bmatrix} -x/\lambda \\ -y/\lambda \end{bmatrix} \in C \oplus B$$

なので、 $-x/\lambda$  および  $-y/\lambda$  はそれぞれ (P) および (D) の実行可能解であり、

$$-\begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -x/\lambda \\ -y/\lambda \end{bmatrix} \geq 0$$

即ち

$$\begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x/\lambda \\ y/\lambda \end{bmatrix} \geq 0$$

が言える。一方、 $\lambda = 0$ であるとする、

$$\mathbb{A} \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \in C^* \oplus B^*, \quad \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \in C \oplus B$$

である。仮定より (P) および (D) の実行可能解  $x_0$  および  $y_0$  がそれぞれ存在する。即ち、

$$\mathbb{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} \in C^* \oplus B^*, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in C \oplus B$$

を満たす  $x_0$  および  $y_0$  が存在する。従って、任意の  $\mu > 0$  に対して  $x_0 - \mu x$  および  $y_0 - \mu y$  もそれぞれ (P) および (D) の実行可能解である。定理 4 より

$$\begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_0 - \mu x \\ y_0 - \mu y \end{bmatrix} \geq 0$$

でなければならない。ここで左辺を  $\mu$  で割って、 $\mu$  を  $\infty$  とすることによって

$$-\begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \geq 0$$

即ち

$$\begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq 0$$

となる。よって定理が証明された。

上の定理において  $\Gamma$  が閉集合であるという条件は、一般には (有限次元の場合においてすら) 凸錐  $C$  および  $D$  が閉集合という条件に置き換えることはできない。しかしながら、 $C$  および  $D$  が閉多面錐であれば  $\Gamma$  は自動的に閉集合となる。

問題 (P) (或いは (D)) に対して、それが実行可能であるとはその問題が実行可能解を持つときを言い、また非有界であるとはその問題の目的関数を最大 (小) 化する問題であれば、実行可能解の全体の集合上で目的関数が上 (下) に有界でないことを言う。

**定理 9 (基本定理)** 定理 5 における凸錐  $\Gamma$  が閉であるという条件に加えて、 $A^*[B] - C^*$  も閉集合であるとする。このとき問題 (P) (或いは (D)) が実行可能であれば、最適解を持つか非有界かのいずれかである。

**証明** 問題 (P) と (D) の対称性から、(P) について定理を証明すれば十分である。いま、問題 (P) が実行可能解を持つとする。強双対定理より、問題 (D) が実行可能解を持たないと仮定したときに (P) が非有界であることを示せば良い。(D) が実行可能解を持たないので

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in H_2 \mid A^*y - c \in C^*, y \in B\}$$

は空集合である。従って定理 5 から

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in H_1 \mid Ax \in B^*, -x \in C, \langle c|x \rangle < 0\}$$

は空集合ではない。従って、 $x_0 \in H_1$  が存在して

$$Ax_0 \in B^*, -x_0 \in C, \langle c|x_0 \rangle < 0.$$

を満たす。 $x^*$  を (P) の実行可能解とすると、 $x^* - \mu x_0$  も (P) の実行可能解となる。何故ならば

$$\begin{aligned} b - A(x^* - \mu x_0) &= b - Ax^* + Ax_0 \in B^*, \\ x^* - \mu x_0 &= x^* + \mu(-x_0) \in C. \end{aligned}$$

であるからである。一方

$$\langle c|x^* - \mu x_0 \rangle = \langle c|x^* \rangle - \mu \langle c|x_0 \rangle.$$

であり、ここで  $\mu \rightarrow \infty$  とすることによって (P) が非有界であることがわかる。

## 参考文献

- [1] J.M.Borwein & A.S.Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization*, Springer, 2000.
- [2] B.D.Craven & J.J.Koliha, *Generalizations of Farkas' Theorem*, *SIAM Math. Anal.* 8(6), 983-997, 1977
- [3] G.B.Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton, 1998.
- [4] J.Farkas, *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*, *J. Reine Angew. Math.* 124, 1-24.
- [5] D.Gale, *The Theory of Linear Economic Model*, MacGraw-Hill, 1960.
- [6] W.H.Marlow, *Mathematics for Operations Research*, Dover, 1993.
- [7] 松井知己, 並木誠, *Farkas の補題と双対定理の初等的証明*, *日本オペレーションズリサーチ学会誌* 45(10), 2000.
- [8] H.Wolkowicz, R.Saigal & L.Vandenberggho, *Handbook of Semidefinite Programming*, Kluwer,