数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 122-127

E.Artin(1924)による合同式ゼータ関数のはじまりについて

小柴 洋一 (鹿児島大 (理))

2001 年 8 月 29 日 (水)

1 はじめに

合同式ゼータ関数は整数論、代数幾何学等の研究現場に現れる重要な概念です。この概念が歴史的に見てどのようにして発生したかを調べてきました。普通は文献 [1] で Emil Artin(1898-1962) が創案したといわれます。この論文はI章 (§1-§16) とII章 (§17-§26) からなり、合同式ゼータ関数はIIに登場します。

2 代数的数体と代数関数体の類似性

合同式ゼータ関数を考えるアイデアは、有理数体上の有限次代数体と1変数代数関数体の類似性にあります。1924 年以前にこの類似性に注目した数学者、もしくは論文著作が種々見られます[1]。
Dedekind と Weber,H は文献 [5] で代数関数体の代数的理論が論ぜられています。ここで代数体についても同様な理論が成り立つだろうといっている部分があります。
手っ取り早く、現代流に述べます。
有理整数環 Z、有理数体 Q、および Q の有限次拡大体 K とします。K のなかで Z の整閉包を R とすると R は Dedekind 整域です。すなわち、環 R は元の素因子分解の一意性は必ずしも成り立ちませんが、イデアルの素イデアル分解の一意性の成り立つ環です。
代数曲線 C があって完備、非特異とします。C のアフィン座標環も Dedekind 整域です。この場合はアフィン座標環が多項式環の商体の有限次拡大体内の整閉包と見なせるからです。詳しくは文献 [7] をご覧ください。
Dedekind-Weber 達は閉リーマン面[2]上の整関数環が Dedekind 環であることを示していると見られます。

[1] もちろん、初等的には、整数と多項式の類似といってもよろしいかと思います
[2] 複素数体上の完備、非特異代数曲線と閉 (コンパクト) リーマン面は解析的同値

よく知られていることではあるのですが、念のため類似性の対応を書いておきます。

代数体	代数関数体
素イデアル	素点
(素イデアル) ノルム	(素点) ノルム
拡大体	リーマン面の被覆
類数	Jacobi 多様体の有理点の個数
ゼータ関数	合同式ゼータ関数
⋮	⋮

3 そもそも合同式ゼータ関数とは何であったか？

II,§17 の初めに合同式ゼータ関数が次のようにあります。

$$\mathrm{Z}(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{|N\mathfrak{a}|^s} \tag{1}$$

ここで級数の総和はある代数関数体のイデアル $\mathfrak{a}$ を走る、と言っています。

代数体の Dedekind zeta 関数と全く同じ形式です。

このイデアル $\mathfrak{a}$ を今日流に述べますと、代数曲線の正の有理因子の意味です。

はじめからより詳しく述べると以下のようになっています。

一般に代数多様体 U 上の chain X が k 上の素有理 chain であるとは

$$X = p^m(V + V' + V'' + \cdots).$$

の形であるときをいいます；ここで V は $\overline{k}$(k の代数閉包) 上で定義されている U の部分多様体、$V', V'', \cdots$ は V の相異なる共役の全て、p^m は V(又は $V', V'', \cdots$ のどれかひとつといっても同じ) の k 上の非分離位数；すなわち同じ V でも重複度を付けて数える。文献 [8]207 ページ参照。

代数多様体の次元、完備性、特異点のあるなしに関わらず素有理 chain の概念が有り得ます。

ところで今我々が考えている場合は定義体 k が有限体、したがって非分離位数 $p^m = 1$、V が 0 次元、すなわち一点；しかも U は完備、非特異の場合です。

A.Weil は 1948 年ごろ次の定義を与えました。

有限体 k を定義体とする代数多様体 U があるとします。k_n を k の n 次拡大、N_n を U の k_n- 有理点の個数とします。

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\log Z(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} N_n u^{n-1} \\ Z(0) &= 1\end{aligned} \qquad (2)$$

で定義された関数 $Z(u)$ を代数多様体 V/k の合同式ゼータ関数といいます。

右辺の u についての巾級数の収束半径が 0 であると解析関数として意味を持たないわけですが、それが 0 でないことは Cauchy-Hadamard の公式から $\overline{\lim_{n\to\infty}} N_n^{\frac{1}{n}} < \infty$ を確かめれば良い訳ですが、もともと定義体が有限体であること、及び Weil の意味の代数多様体では affine 被覆は有限個であること (文献 [8]179 ページ参照) を見れば解ります[3]。

Emil Artin が 1924 年に最初に考え出して定義したのは、実はこの式の形ではありません。5 節で定義されたものです。文献 [2] における素点、又は同じことですが文献 [8] における素有理 chain を $\mathfrak{p}$ と記すと

$$N_n = \sum_{deg(\mathfrak{p})|n} deg(\mathfrak{p})$$

となっています。このことから式 (1) と式 (2) は同値であることが解ります。

4 Iの序言

§1 の Einleitung(論文紹介) で Artin は以下のように云っています。

…………………………………………………………

高次合同の領域における二次体 I. (整数論篇).

§1. 序

Dedekind による高次合同式についての研究[4]から、次のように理論の拡張が容易に出来る。 *modulo p* の有理関数体 K [5]に、 関数 $\sqrt{D(t)}$ を添加する。ここで $D(t)$ はパラメーター t について平方因子を持たない Dedekind の意味で整関数である。こうしてできた二次体 $K(\sqrt{D(t)})$ は、二次数体と類似した 特徴を示す。 つまり例えばイデアルの素イデアルによる一意分解可能の定理 、類数の有限性の定理、単数についてのいくつかの定理が成り立つ。

[3] $Z(u)$ は今日からすると u の有理関数であることが解っています。

[4] 文献 [4]

[5] K が有限体上の有理関数体の意

類数公式がゼータ関数を考察することにより得られる。ここでRiemann予想(の類似)の正しさについての問題が各々の特殊な場合において決定され得る。最初の場合 の計算は—約四十の体がこの場合の対象となっている—常にRiemann予想(の類似)は正しいという結果をもたらした。その正しいことの普遍的な証明には、しかし(本来の)Riemannの$\zeta(s)$の場合と似たような種類の困難が妨げとなっているように思われる。しかしながら、(本質的に) 有理整関数が対象となる限りにおいて、ここでは関係 がより明白に見通せるようになっている。これに関連する問題には、また後に触れることにする。

私たちのゼータ関数のその他の特徴の中で、次のことはなお際立っているといえるであろう:それらは簡単な関数等式を有しており、その関数等式は、ある指標和の珍しい相互法則関係を結果として有する。それらの零点は、ひとつの代数方程式の根と簡単な関連 にあり、そのことによりまさしくRiemann予想(の類似)についての判断を下すことが出来る。

Riemann予想(の類似)の正しさを全ての体に対して仮定するならば、全てのpに対して、ひとつの類からなる種をもった虚の体は有限個しか存在しないという証明がもたらされ得る。

お終いに、この論文の第II部の最後に述べられているKolnblumの仕事[6]との関連について、指摘しよう。それにより、Kolnblumの、等差数列 における無限に多数の素関数の存在についての結果を、本質的により詳しくすることに成功した。

なお、表示を簡単にするため、私は数の領域で使われるいくつかの記号を、その類似性に対応して関数(mod p)に転用していることを付け加える。このことは、私たちの結果の類似性がそれにより数体の中でより鮮明に現れることによって正当化される。その際、取り違えの危惧はない。なぜなら、記号は、ただ私たちの定義に即して使われるのだから。

....

5 IIの序言

§17 II で始めて合同式ゼータ関数の定義が出てくる。

....

高次合同の領域における二次体　II(解析篇).
§17. ゼータ関数

[6]文献 [6]

代数体における関数$\zeta(s)$の類似として

$$\mathsf{Z}(s)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{|N\mathfrak{a}|^s},$$

を考えよう、ここで その和は、$K(\sqrt{D})$の全てのイデアル$\mathfrak{a}$にわたる。このとき、体への依存を表現しようとするならば、$\mathsf{Z}_D(s)$と書く。 この級数の収束性を研究するために、$K(\sqrt{D})$の全ての素イデアル$\mathfrak{p}$上に渡る積

$$\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\frac{1}{|N\mathfrak{p}|^s}},$$

に注目する。

この積は、$\Re(s)\geqq 1+\delta$に対し、絶対収束かつ一様収束である。なぜなら、$\mathfrak{p}$がprimärな素関数Pのひとつの約数であるならば、$|N\mathfrak{p}|\geqq|P|$であり、あらゆるPに多くても2つの素イデアルが属する。ゆえに、$\Re(s)\geqq 1+\delta$に対し、

$$\sum_{\mathfrak{p}}\left|\frac{1}{|N\mathfrak{p}|^s}\right|\leqq\sum_{P}\frac{2}{|P|^{\Re(s)}}\leqq 2\sum_{F}\frac{1}{|F|^{1+\delta}}\qquad(sgn\,F=1)$$

であり、

ここで最後の和は全ての関数Fに渡る。ゆえに

$$\sum_{\mathfrak{p}}\left|\frac{1}{|N\mathfrak{p}|^s}\right|<2\sum_{\nu}\frac{p^\nu}{p^{\nu(1+\delta)}}=2\sum_{\nu}p^{-\nu\delta}.$$

最後の和は、しかし、ひとつの収束する等比級数 である。
数体の場合と同様に、ここで恒等式

$$\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\frac{1}{|N\mathfrak{p}|^s}}=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{|N\mathfrak{a}|^s}$$

を証明し、$\Re(s)\geqq 1+\delta$に対する級数もまた絶対一様収束するということを証明する。故に$\Re(s)>1$ に対し、$\mathsf{Z}(s)$は正則であり、また

$$\mathsf{Z}(s)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{|N\mathfrak{a}|^s}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\frac{1}{|N\mathfrak{a}|^s}}$$

が成り立つ。

....

参考文献

[1] Emil Artin,Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen.I & II ,Mathematische Zeitschrift 19(1924) pp.153-246

[2] 岩沢 健吉、代数関数論、岩波、1952

[3] 谷山 豊、代数幾何学と整数論、谷山 豊全集 (増補版)、pp.193-198

[4] Dedekind,Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus,J. für reine und angewandte Mathematik,Bd54,S1-26(1857)

[5] Dedekind-Weber,Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, J. für reine und angewandte Mathematik,Bd.92,S181-290(1882)

[6] Kornblum,Über die Primfunktionen in einer arithmetischen Progrssion, Mathematische Zeitschrift,Bd.5,S100-111(1919)

[7] Zariski-Samuel,Commutative Algebra Vol.I Chapter 5.

[8] Weil,Foundations of Algebraic Geometry,2ed.,Amer.Math.Soc.,1962.