

# 天元術と傍書術

竹之内 脩

## 1 前史

九章算術 (c.a.250) において、平方根、立方根の求め方が述べられている。そこでは、

商、実、法、借一算、中行、下行、廉、隅

が登場している。この名称は、その後、

商、実、法 (あるいは方)、廉 (上廉、二廉、三廉、…、下廉)、隅  
というように変わっている。

後、7 世紀、

王孝通、緝古算経

においては、複 2 次方程式が扱われている。

## 2 発祥

11 世紀、金の蔣周は益古集を著した。(1080)

この書物は現存しないが、この中のいくつかの問題は、後、李冶の益古演段、および楊輝の楊輝算法の中に取り上げられている。

この中に天元という言葉は登場している。

初期の発展は緩慢であった。

12 世紀後半から研究が盛んになる。

彭澤 (1190 頃) は、易経を根拠に記法を改造した。定数項に人が用いられていたのを、太にした。

13 世紀前半、研究は進展し、研究者も多く、出版されたものも多い。北宋の劉益、賈憲など。賈憲の解法作法本源など。この中には、2 項係数が 6 次まで載せられている。

表示の方法は、まちまちであった。

李冶により如積之術が作られた。劉汝諧、元裕などが、如積釋鎖を書いている。

平陽の地区、すなわち山西省、河北省の太行山脈から東の地区で研究が進展していた。

### 3 天元術

元は、はじめの意味であり、まずこれを立てて立式ということである。蔣周が用いたのがはじめとされる。

多項式の項を表すのに、19 個の文字が使われていたという。(李迪 [5] による)

仙、明、霄、漢、壘、層、高、上、天、人、地、下、低、減、落、逝、泉、暗、鬼

ここでは、人は定数項であり、天は上に、地は下であった。定数項の人を太にしたのは、彭澤である。この後、天元が太の下に来るようになる。また、上の名称を用いずに、場所で次数を表すことにより、多項式の研究が進展した。

天元術は、未知数 1 個の方程式であるが、

未知数 2 個の二元術は 李徳蔵 によって、

未知数 3 個の三元術は 劉潤夫 によって、

未知数 4 個の四元術は 朱世傑 によって、

作り出された。しかし、二元術、三元術の書物は現存しない。朱世傑の四元玉鑑によって、その内容が知られる。

#### 書き方の特徴

天元術は、

立天元一為 …

という出だしではじまることから名がついている。

プラスの数は、正または従といい、マイナスの数は益という。

中国の算書は、問題のはじめが

今有 …

ではじまることから、今有体などとよばれることもある。そして、条件は、

只云 …、又云 …

と述べられ、それらに与えられたデータは、次のように引用される。

只云数 (あるいは先云数)、又云数

条件を式にしたときは、

如積求之

という。

また、実を法で割るということを表示するのに、

実如法而一

## 4 天元術の主要な書物

13世紀には、異常なまでの発展をし、数多くの数学者がでた。中でも、秦九韶、李冶、楊輝、朱世傑は傑出している。

李冶	「測圓海鏡」
秦九韶	「数書九章」
楊輝	「楊輝算法」
朱世傑	「算学啓蒙」、「四元玉鑑」

朱世傑が算学啓蒙とともに著した「四元玉鑑」は、中国数学の最高峰といわれている。四元玉鑑は、3巻24章から成る。問題集の体をしており、それぞれの章はいくつかの問題から成る。各問題は、問題文、答、術から成っている。術は、単に、最終的な答えを得るための式の記述を与えているに過ぎず、そこに至る過程は示されていない。書物の最初に、假令四艸と称して、四題、例題として問題が与えられ、そこに、艸と称する術に至るやり方を述べたものがついているだけである。

大部分が、天元術の問題で、最後の巻に至って、二元術、三元術、四元術が扱われている。また、巻中から巻下に至る2章で級数の総和問題が扱われ、これは素晴らしい内容のものである。

算学啓蒙が日本にあったことは、建部賢弘が諺解を書いているので確かなことである。その算学啓蒙がどのようにして日本にもたらされたかという点、秀吉の朝鮮出兵の際に彼の地から略奪してきたものであろうといわれている。さて、算学啓蒙が、朝鮮戦役で、朝鮮から略奪してきたものだとすれば、同じ著者の四元玉鑑が同時にもたらされた、と考えるのは、自然なことであるが、そうではないというのが大方の意見である。中国では、この両著とも、長い間失われていて、19世紀になってから、再発見されたものである。

## 5 日本における天元術

日本で、天元術のことについて述べた最初の書物は

澤口一之、古今算法記 1670

である。天元術がどのように普及したか、ということは明らかではない。

この古今算法記において、著者は遺題として15の問題を提出している。この遺題に解答を与えたのが、

関孝和、発微算法 1674

田中由真、算法明解 1678

である。この中では天元術は登場しない。しかし、この解答を作るにあたって、天元術が使われたのは間違いない。おそらくこの研究の過程において、傍書術、後の点竄術が創り出されたのであろう。そして、それと共に、解伏題之法も開発されたのであろう。

田中は発微算法を研究して、算法明解を著したのであろう。その頃、関と田中の間には交流があり、傍書術、解伏題のことを語りあったのか、それとも田中は自己の研究の中で独自にこの方法を確立できたのであろうか。

## 6 傍書術

傍書術が、初めてその形で登場するのは、

関孝和、解伏題之法 1683

においてである。この稿本の中では、傍書という言葉は繰り返し現れるが、傍書術とまでは言っていない。しかし、

関孝和、病題明致之法 1685

においては、はっきり傍書術という言葉を使っている。

ところで、

坂部広胖、算法点竄指南録 1815

には、次のようにある。

点竄の法は元祖関先生発明する所にして初め飯源整法といふ後松永良弼に至り其主君岩城侯の命を受けて名を点竄と改む但傍書の筆算を用ひ乗除加減は勿論すべて矩口的當の解義を明らかにする良法にして実に数学の要用なり

これによって、傍書術は後に点竄術という名前にされて、それが一般に行われていたようである。

また、

建部賢弘、発微算法演段諺解 1687

において、建部は全面的に傍書法を用いて発微算法における計算法の解説をした。このため、演段術という言い方もあるようである。

しかし、本稿では、傍書術と呼ぶことにする。

上記の関の解伏題之法とほぼ同じ頃に書かれたと思われる

田中由真、算学紛解 1683?

にも、傍書術が用いられている。

## 7 天元術から傍書術へ

天元術が日本に伝えられる元になった書物、朱世傑の算学啓蒙では、計算はすべて算木を用いてするようになっている。関の初期の稿本にも、算木の形で書かれたものがある。また、算木では、数が大きくなると、それを書くのが大変なので、天元の位を表す縦棒の脇に数字を書いて表したものがある。

このようにしているうちに、数を書き込むよりも、その数の意味、計算の由来を書いたほうが、より一般的な意味があることに気が付いたことと思われる。このようにして、解の一般化が行れるようになった。まさにこの傍書術は、ヨーロッパにおいて、デカルトの記号法がその後の数学の発展の原動力となったのと同じく、日本の数学の発展をもたらした根源となったものである。

関の発微算法において、implicit ながら、傍書法の影を見ることができる。発微算法における特徴として、次の2点を強調しておこう。

(1) 問題文には、具体的な数で問題が与えられている。(もともとの古今算法記のままの形である。) それで、答のあとの術では、全く一般の形の解になっている。

(2) 後に述べる解伏題の形の解答がすでに見られる。解伏題之法は、10年あまり後の作品であるが、この発微算法の頃に、すでに作り上げられていたものであろう。

まさに、発微算法の生成の途中で、傍書術、解伏題が考えられたと思うものである。

最初の点(1)については、発微算法の第1問を見てみよう。(2)については、次の節で。

図のように、大圓内に3個の圓がある。

外餘寸は平積 120 歩

只云う、小圓径は、中圓径より 5 寸短い。

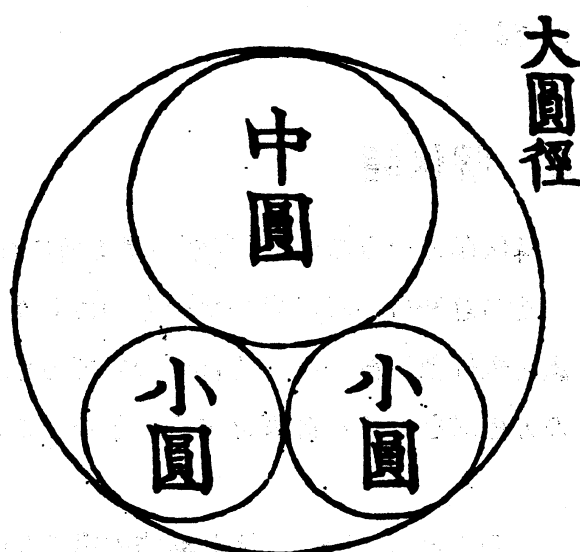
このとき、大中小の圓径を求めよ。

**術** 大圓径 =  $x$ 、中圓径 =  $y$ 、小圓径 =  $z$   
として、

$$\text{中小圓径差 (= 只云数)} = y - z = a$$

$$\text{外餘積} = \pi/4(x^2 - y^2 - 2z^2) = b$$

が与えられている。



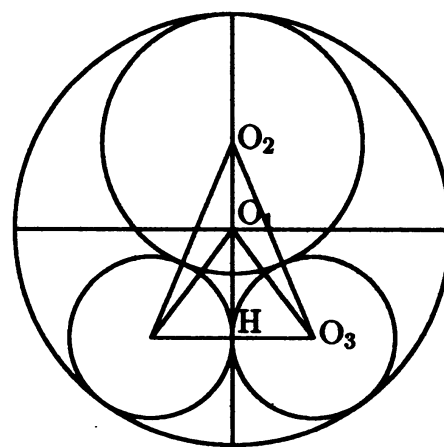
この問は、圓の面積に関係することなので、圓積率  $\pi$  がでてくるのであるが、実際のところ、それが必要になるのは、外餘積  $= \pi/4(x^2 - y^2 - 2z^2) = b$  についてだけであるので、以下では、 $b \div \pi/4$  を  $b$  と考えて、圓積率は無視する。

天元 $= z =$ 小圓徑		
$z + a = y =$ 中圓徑		$w = y^2$
$2z^2 + w \rightarrow v$		$v = y^2 + 2z^2$
$4b \times d + v = x^2 \rightarrow u$		$u = x^2$
$z \times w \rightarrow t$		$t = y^2 z$
$((4y - z) \times u - t)^2 \rightarrow$ 左		左 $= (x^2(4y - z) - y^2 z)^2$
$(4y + 2z)^2 \times w \times u \rightarrow$ 右		右 $= x^2 y^2 (4y + 2z)^2$

左=右 として、開方式 6 次方程式を得る。之を解いて、小圓徑を得る。そして、これから、大圓徑、中圓徑が得られる。

このように、問題文中では数値で与えられている。天元術で解を求めるためには、データが具体的に数値で与えられていなければならない。それが、上に述べた術では、データにとらわれない一般に通ずる形にしているのである。

なお、最終の式は、2 乗の形で与えられているが、これは、与えられた条件  $b = x^2 - y^2 - 2z^2$  を使うためで、本来は、 $x^2(4y - z) - y^2 z = xy(4y + 2z)$  でよい。この式は、右図で  $O_1 O_1 = O_2 H - O_1 H$  から得られるもので、このような計算は、この時代、普通に行われていたものである。



## 8 解伏題

解伏題というのは、「真術の得る所に従って、追って虚術を求める也」とある。

その意味は、真に求めたいものはしかじかであるが、それは直接には得られないので、別の量を未知数に置いて、それについて方程式をたて、この方程式から、真に求めるものについての方程式をつくる計算をする、ということであると思われる。

このことについて、発微算法の第 5 問を見てみよう。

五つの立方体 甲、乙、丙、丁、戊がある。

甲の一辺  $x$ 、乙の一辺  $y$ 、丙の一辺  $z$ 、丁の一辺  $u$ 、戊の一辺  $v$  として、

$$x^3 + y^3 \quad (=a \text{ とする})$$

$$z^3 + u^3 + v^3 \quad (=b \text{ とする})$$

$$x - y = y - z = z - u = u - v \quad (=d \text{ とする})$$

が与えられているとき、それぞれの辺の長さを求めよ。

天元  $= v =$  戊方面

天元<sup>3</sup>  $=$  戊の体積

$3 \times$  先云数  $+ 15 \times$  子位  $- 7 \times$  又云数

$- 9 \times$  先云数  $+ 91 \times$  又云数  $- 225 \times$  子位

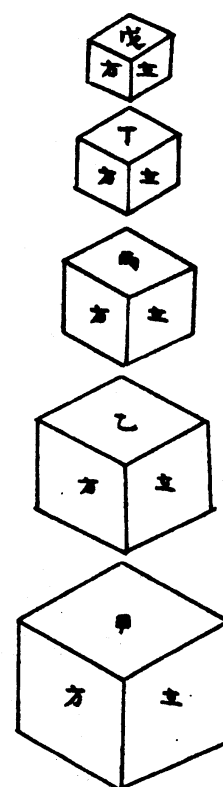
$21,829,500 \times$  子位<sup>2</sup>  $\times$  丑位  $+ 365,010 \times$  子位  $\times$  丑位<sup>2</sup>

$+ 177,330 \times$  子位  $\times$  丑位  $\times$  寅位  $\rightarrow$  左

$6,600 \times$  子位  $\times$  丑位<sup>2</sup>  $+ 49 \times$  寅位<sup>3</sup>

$\rightarrow$  右

左式と右式を相消して、開方式をつくる。



さて、この方法の解釈であるが、真術の変数を  $v$  とする。これが求めたいものであるが、これについての方程式が直接得られないので、 $d$  を補助に、虚術の変数として立式する。

$$a = x^3 + y^3$$

$$b = u^3 + v^3 + z^3$$

$$u = v + d, \quad z = v + 2d, \quad y = v + 3d, \quad x = v + 4d$$

これを代入する。

$$a = 91d^3 + 75d^2v + 21dv^2 + 2v^3$$

$$b = 9d^3 + 15d^2v + 9dv^2 + 3v^3$$

そして、この  $a$  の式からは  $dv^2$  の項を消し、 $b$  の式からは  $d^3$  の項を消す。 $v$  は方程式の未知数であるから、自由に出し入れしてよい。これが書かれてある最初の二つの式である。

$$p = 3a + 15v^3 - 7b = 210d^3 + 120d^2v$$

$$q = -9a + 91b - 255v^3 = 690d^2v + 630dv^2$$

そして、 $d$  の高次の項から、係数が等しくなるように順次調整する。

$$r = 30 \times 23^3 p^2 v^3 = 16096941000 d^6 v^3 + 18396504000 d^5 v^4 + 5256144000 d^4 v^5$$

$$(30 \times 23^3 = 365010)$$

$$s = 7^2 q^3 = 16096941000 d^6 v^3 + 44091621000 d^5 v^4 + 40257567000 d^4 v^5$$

$$+ 12252303000 d^3 v^6$$

$$rr = r + 177330 pqv^3 = 16096941000 d^6 v^3 + 44091621000 d^5 v^4 + 43399827000 d^4 v^5$$

$$+ 13406148000 d^3 v^6$$

$$ss = s + 6600 v^3 q^2 = 16096941000 d^6 v^3 + 44091621000 d^5 v^4 + 43399827000 d^4 v^5$$

$$+ 17990343000 d^3 v^6 + 2619540000 d^2 v^7$$

$$rrr = rr + 21829500 v^6 p = 16096941000 d^6 v^3 + 44091621000 d^5 v^4 + 43399827000 d^4 v^5$$

$$+ 17990343000 d^3 v^6 + 2619540000 d^2 v^7$$

この結果、 $ss$  と  $rrr$  の右辺が同じ式になったが、この左辺を書いたものが、次に示す関の解法にある最後の二つの式である。

$$21,829,500 v^6 p + 365,010 v^3 p^2 + 177,330 v^3 pq$$

$$6,600 v^3 q^2 + 49 q^3$$

## 9 結語

和算の発展をもたらす基礎となった傍書術について、その生まれた過程について考察した。筆者は、特に関の発微算法に注目している。さらにこれが発展していく過程を調べることは、今後の興味ある課題となるであろう。

## 参考文献

- [1] 任繼愈主編、中国科学技術典籍通彙 全 5 卷、河南教育出版社
- [2] 靖玉樹編勘、中国歴代算學集成 全 3 卷、山東人民出版社
- [3] 科学史全集、李儼、錢宝琮、江寧教育出版社
- [4] 吳文俊主編、中国数学史大系、北京師範大学出版社
- [5] 李迪、中国数学通史、江蘇教育出版社
- [6] J.-C. Martzloff: A History of Chinese Mathematics, Springer
- [7] 大山梅次、和算における、公式・定理と天元術・点竄術について、京成社
- [8] 小川東、関孝和「発微算法」—現代語訳と解説—、大空社