

スーサ数学文書No. 24の解説について

河合塾文理 室井 和男 (Kazuo MUROI)

§ 1. バビロニア数学の「穴掘り問題」

バビロニア数学には、井戸、貯水池、運河（の一部）、地下貯蔵庫などの体積、そしてある建物の基底部として地面に掘った穴の体積を扱う一群の問題がある。これらの「穴掘り問題 (excavation problems)」の数学的内容は比較的易しいが、内容が完全に理解されたとは言い難い問題もある。その原因は二つある。一つは、いくつかの術語、特に何らかの立体図形に関係すると思われるものの意味が不明であることであり、二つ目は、書き誤りと計算ミスが解釈を困難にしていることである。スーサ数学文書No. 24（裏面が未解説）は、これらの穴掘り問題に属するものであり、後で見るように、その数学的内容はこの種の中では最も複雑なものと言ってよい。（一般に、スーサ数学文書の数学的内容はバビロニア数学の中では高い方である）このNo. 24を解説するためには、いくつかの術語の意味を明確にしておかねばならない。

§ 2. 特徴的な表現と術語

以下において、 x, y, z をそれぞれ長さ、幅そして深さとする。長さとの単位は *nindan* ($1 \text{ nindan} \approx 6\text{m}$)、深さの単位は *kûš* である ($1 \text{ kûš} = 1/12 \text{ nindan} \approx 50\text{cm}$)。

(1) 頻出の関係式 $z=12(x-y)$

例：BM 85200+VAT 6599, No. 14, line 1

ma-la igi ug[u] igi-bi di[rig] GAM-ma

“長さ（ここでは *uš* ではなく *igi* で示されている）が幅（ここでは *sag* ではなく *igi-bi* で示されている）を超過した分が深さ（*GAM*、おそらく誤用）である”

(2) *ki-lá* と *kalakku*

シュメール語 *ki-lá*、*ka-lá* よりアッカド語 *kalakku* ができた。意味は“穴掘り、貯蔵庫”であるが、数学文書では、地面に掘られた直方体という意味で使われている。これに関連して、YBC 8588の中に見られる次の未解決の語句を明らかにしておく。

i-na iš-te-en ka-la-ak-ki-im

9 *ka-la-ak-ku* “ある一つの直方体の中に9つの直方体（がある）”

バビロニア人は、このような表現で $V=9v$ を表したのである。同様な表現は、BM 85194にも見られる。

8 *i-na 1,36 še-gur i-ba-ši-i*

“大麦 1,36 gur の中に 8,0,0 (*sila* の大麦) がある” つまり $1,36 \text{ gur} = 8,0,0 \text{ sila}$. 1 *sila* は約 1 $\frac{1}{2}$ で $1 \text{ gur} = 5,0 \text{ sila}$.

(3) *šalāṭum*と*šuppulum*

これらのアッカド語の動詞の意味は、それぞれ“～に切れ目を入れる、～を裂く、～を切る”と“～を深くする、～を掘る”である。数学文書では、前者は運河の側面を削り取って幅を広げるときに使われている。後者は垂直に穴を掘る場合に使われている。

(4) *šalāššerītum* “13分の1”

1/13は、方程式によく出てくる数値であり、しばしば*igi-13-gál*, *13-tu*などと書かれるが、音節文字のみで書かれることもある。スーサ数学文書 No. 24では

13 *šà-la-šé-ra-ti* “13分の1 (という分数の分母の) 13”

という表現で用いられている。今まで読めなかったこの箇所が、私にとって、解説の重要な手掛かりとなった。

§ 3. スーサ数学文書No. 24、裏面、の数学的解釈

次の連立方程式が解かれている。

$$x-y=0;10 \quad z=12(x-y)$$

$$(x^2+y^2)z+xy(z+1)+(1/13)(x^2+y^2)=1;15$$

答は、 $xy=0;10$ を求めることにより正解

$$x=0;30 \quad y=0;20 \text{ を得ている。}$$

計算の過程は次のようである。

計算の過程

$$13(x^2+y^2)z+13xy(z+1)+x^2+y^2=16;15$$

$$(x^2+y^2)=(x-y)^2+2xy$$

$$13(x-y)^2z+13\cdot 3xyz+13xy+2xy=16;15-(x-y)^2 \\ =16;15-0;1,40 \\ =16;13,20$$

$$z=12\cdot(x-y)=12\cdot 0;10=0;5\cdot 6=0;30$$

$$13(x-y)^2+(13\cdot 3+13\cdot 0;30+2\cdot 0;30)xy=8;6,40$$

$$(13\cdot 3+13\cdot 0;30+2\cdot 0;30)xy=8;6,40-13(x-y)^2 \\ =8;6,40-0;21,40 \\ =7;45$$

$$(39+6;30+1)xy=7;45$$

$$46;30xy=7;45$$

$$xy=0;10 \text{ (trial and error)}$$

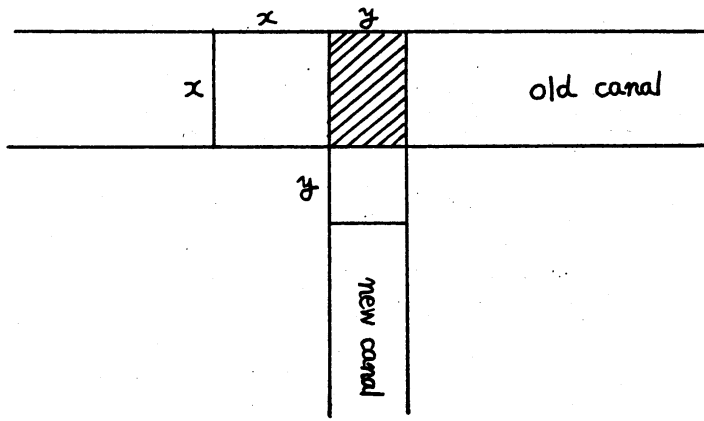
$$xy+(\frac{x-y}{2})^2=(\frac{x+y}{2})^2=0;10+0;0,25=0;10,25$$

$$\frac{x+y}{2}=0;25$$

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=0;25+0;5=0;30$$

$$y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=0;25-0;5=0;20.$$

わずかに残された問題文より、この方程式は、運河とその拡張に関係していると思われる。実際、“私は、穴を掘った” “2回…” “大きな穴の面積” “古い運河の深さ” “小さい(穴)”などが確認できる。それは、どのようなものなのか？私は次の図のように推定する。



The shadowed area is deeper by 1 küš than the bottom of the canal.

Susa mathematical text No. 24

Transliteration

Obverse

(The beginning of the tablet is lost.)

1. [... ..]-*ma* 9, 22, 30 [... ..] *i-ší*
2. [... .. 2]4(?) ù 2 *ma-na-at*
3. [... ..] *sag*(?) 2 *zi a-šà*
4. [... ..]-*ma* uš 15 *wa-ší-ib* uš
5. [... .. 3]0 [*a*]-*na* 9, 22, 30 *i-ší-ma*
6. [4, 41, 15 *ta-ma*] *r tu-úr-ma* 45 uš *a-na* 2 *sag*
7. [*i-ší-na* 1, 30] *a-na* [9, 2]2, 30 *i-ší-ma* 14:3, 45 *ta-mar*
8. [14:3, 45 *a-šà sà-a*] *r-ru* [14:]3, 45 [*a-n*] *a* 4, [4]1, 15 *a-šà*
9. [*i-ší-ma* 1, 5, 55], 4, 41, 15 *ta-mar re-[i-š-k] a li-ki-il*
10. [15 *wa-ší-ib* uš *a-na* 2] *sag i-ší-ma* 30 *t[a-mar 30 n]a-sí-iḫ sag*
11. [30 *a-na* 3 *i-š*] *í-ma* [1], 30 *ta-mar* [3]0 *i-na* 1, [30] *zi*
12. 1 *ta-mar* 1 *a-[na]* 9, 22, 30 *i-ší-ma* 9, 2[2, 30] *ta-mar*
13. *aš-šum* <1> *ki-ma* uš *qa-bu-ku* 1 *a-rá* [*a-na* 9], 22, [30 *dah*]
14. 1, 9, 22, 30 *ta-mar* 1[2] 1, [9, 2]2, 30 *he-pe* 34, 41, 15 *ta-mar*
15. 34, 41, 15 *nigin* 20:3, [13, 21, 3]3, 45 *ta-mar*
16. *a-na* 20:3, 13, 21, 33, [45] 1, 5, 55, 4, 41, 15 *dah*

17. 21:9, 8, 26, 15 [ta-mar] m[i-n] a íb-si 35, 37, 30 íb-si
18. 34, 41, 15 ta-ki-i[l-ta]-ka [a-na 3]5, 37, 30 dah
19. 1, 10:18, 45 ta-m[ar] m[i-na a-na] 14:3, 45
20. a-šà sà-ar-ri gar šà [1, 10:1]8, 45 i-na-ad-di-na
21. 5 gar 5 dagal an-ta 1/2 [5 he-pe 2, 30 ta-mar 2, 30 a-na]
22. 30 dirig dah 3 ta-mar 3 dagal ki-ta [igi 12 šà dagal an-ta]
23. ugu dagal ki-ta i-te-ru le-q[é] 10 ta-mar [30 ù 10 ul-gar]
24. 40 a-na 12 šu-up-li i-ší 8 ta-mar [5 dagal an-ta]

Bottom

25. ù 3 dagal ki-ta ul-gar 8 ta-mar [1/2 8 he-pe]
26. 4 ta-mar 4 a-na 8 šu-up-li i-ší-[ma]
27. 32 ta-mar igi 32 pu-tú-úr 1, 5 [2, 30 ta-mar]
28. 1, 52, 30 a-na 24 sahar i-š[í] 45 ta-mar 45 uš]

Reverse

30. za-e(?) ... [...
31. ú-šà-pí-i[l] i(?)-[na(?) k]a-la-ak-[ki-im] ...
32. 2-kam ta-a[d]-di-in 2-tu [... ...
33. a-šà ka-la-ak-ki gal ul-[gar] ...
34. a-na tùn šà a-ta-ap pa-[n]a-n[im] da[h] ...
35. a-na tur aš-l[u-u]t ul-gar sahar ... [... ... 1, 15]

36. za-e 1, 15 ul-gar a-na 13 šà-[la-šé-ra-t]i i-ší-ma 16, [15]
37. 10 šà ka-la-ak-ku ugu ka-la-a[k-ki i-t]e-ru nigin 1, 40 ta-mar
38. 1, 40 i-na 16, 15 zi 16, [13, 20] ta-mar igi 10 dirig pu-ťú-úr
39. 6 ta-mar igi 12 šu-up-li pu-ťú-úr 5 ta-mar 5 a-na 6 i-ší
40. 30 ta-mar 30 ta-lu-ku 30 ta-lu-ka a-na 16, 13, 20 i-ší-ma
41. 8, 6, 40 ta-mar 10 [dir]ig nigin 1, 40 ta-mar 1, 40 a-na 13 šà-la-šé-ra-ti
42. i-ší-ma 21, [40 ta-mar] 21, 40 i-na 8, 6, 40 zi
43. 7, 45 ta-[mar re-iš-k]a li-ki-il 3[0 ta-lu-k]a
44. a-na 13 [šà-la-šé-ra-ti] i-ší 6, 30 t[a-mar 30 t]a-lu-ka
45. a-na ka-aiia-ma-[ni] 2 tab-ba 1 ta-mar 1 a-na 6, 30 dah
46. [7], 30 ta-mar 1[3 šà-l]a-aš-šé-ra-ti a-na 3-šu a-na ka-aiia-ma-ni
47. a-li-ik-ma 3[9] ta-mar 7, 30 a-na 39 dah 46, 30 ta-mar
48. mi-na a-na 46, 30 gar šà 7, 45 šà r[e-iš]-ka ú-ki-il-lu
49. [i-n]a-ad-di-na [10] gar re-iš-ka li-ki-il 1/2 10 dirig he-pe
50. [5 ta]-mar [5(?) gar(?)] 5 nigin 25 ta-mar 25 a-na 10
51. [šà re-iš-ka ú-ki-il-lu] dah 10, 25 ta-mar mi-na íb-si
52. [25 íb-si 25(?) gar(?)] 5 a-na 25 iš-te-en dah 30 ta-mar
53. [i-na 25 2-kam zi 20 t]a-mar 30 gal 20 tur
54. [... ..] 2-kam šà 1 pa₅ IG(?)
55. [... ..] ... MA

Translation

Obverse

1. [... ..], and 9;22,30. Multiply [... ..]
2. [... ..]4,0 (is the volume(?)), and 0;2 is the ratio (of the width to the length).
3. [... ..] width(?), subtract 0;2(?), and the area.
4. [... ..] ..., and the length. 15, the one which is to be added to the length.
5. [... ..]. Multiply [0;3]0 [b]y 9;22,30, and
- 6,7. [you see 4;41,15]. Return, and [multiply] 45, the length, by 0;2 of (the ratio of) the width (to the length), [and (you see) 1;30]. Multiply (1;30) by [9;2]2,30, and you see 14;3,45.
- 8,9. [14;3,45 is the false [area]. [Multiply 14];3,45 [b]y 4;[4]1,15, the area, [and] you see [1,5;55],4,41,15. Let you[r he]ad hold (it).
10. MUltiply [15, the one which is to be added to the length, by 0;2] of (the ratio of) the width (to the length), and y[ou see] 0;30. [0;30] is the one which is subtracted from the width.
11. [Multi]ply [0;30 by 3], and you see[1];30. Subtract [0;3]0 from 1;[30], (and)
12. you see 1. Multiply 1 b[y] 9;22,30, and you see 9;2[2,30].

13. Since $\langle 1, 0 \rangle$ as the length is said to you, [add] 1, 0, the factor, [to 9];22, [30], (and)
14. you see 1, 9;22, 30. Halve 1, [9;2]2, 30, (and) you see 34;41, 15.
15. Square 34;41;15, (and) you see 20, 3;[13, 21, 3]3, 45.
16. Add 1, 5;55, 4, 41, 15 to 20, 3;13, 21, 33, 45, (and)
17. [you see] 21, 9;8, 26, 15. W[ha]t is the square root ? 35;37, 30 is the square root.
18. Add 34;41, 15 which was used in your squaring [to 3]5;37, 30, (and)
- 19, 20. you s[ee] 1, 10;18, 45. W[hat] should I put down [to] 14;3, 45, the false area, which will give me [1, 10;1]8, 45 ?
21. Put down 5. 5 is the upper breadth. [Halve 5, (and) you see 2;30].
22. Add [2;30 to] 0;30, the excess, (and) you see 3. 3 is the lower breadth.
23. Tak[e $1/12$ of the amount by which the upper breadth] exceeded the lower breadth, (and) you see 0;10. [Add 0;30 and 0;10 together].
24. Multiply 0;40 by 12 of the (constant of the) depth, (and) you see 8.
25. Add together [5, the upper breadth], and 3, the lower breadth, (and) you see 8. [Halve 8, (and)]
26. you see 4. Multiply 4 by 8 of the depth, [and]
27. you see 32. Make the reciprocal of 32, (and) [you see] 0;1, 5[2, 30].
28. Multi[ply] 0;1, 52, 30 by 24, 0, the volume, [(and) you see 45. 45 is the

length].

Reverse

30. You(?). ...[...]
31. [... ...] I excavated. I[n(?)] the hol[e]
32. you gave the second [... ...]. A second time [... ...]
33. I ad[ded and] the area of the large hole together [... ...]
34. I add[ed] to the depth of the for[mer] canal [... ...]
35. I cut [off] for the small. The sum of the volume [and is 1;15].
36. You. Multiply 1;15, the sum, by 13 of one thir[teenth], and (you see)
16;[15].
37. Square 0;10, the amount by which (the length of) the (large) ho[le ex]ceeded
(the length of) the (small) hole, (and) you see 0;1,40.
38. Subtract 0;1,40 from 16;15, (and) you see 16;[13,20]. Make the reciprocal
of 0;10, the excess,
39. (and) you see 6. Make the reciprocal of 12 of the depth, (and) you see
0;5. Multiply 0;5 by 6,
40. (and) you see 0;30. 0;30 is the product. Multiply 0;30, the product, by
16;13,20, and
41. you see 8;6,40. Square 0;10, [the ex]cess, (and) you see 0;1,40. Multiply
0;1,40 by 13 of one thirteenth,

42. and [you see] $0;21, [40]$. Subtract $0;21, 40$ from $8;6, 40$, (and)
43. you [see] $7;45$. Let yo[ur head] hold (it).
44. Multiply $0;3[0, \text{the produc}]t$, by 13 [of one thirteenth], (and) yo[u see] $6;30$.
45. Multiply $[0;30, \text{th]e product}$, by norm[al] (number) 2, (and) you see 1. Add 1 to $6;30$, (and)
46. you see $[7];30$. Multiply 1[3 of one th]irteenth, by 3, by normal (number three),
47. and you see $3[9]$. Add $7;30$ to 39, (and) you see $46;30$.
48. What should I put to $46;30$ which gives me $7;45$ that your h[ead] held ?
49. Put down $[0;10]$. Let your head hold (it). Halve $0;10$, the excess, (and)
50. [you] see $[0;5$. Put down $0;5(?)$.] Square $0;5$, (and) you see $0;0, 25$.
51. Add $0;0, 25$ to $0;10$ [that your head held], (and) you see $0;10, 25$. What is the square root ?
52. $[0;25$ is the square root. Put down $0;25(?)$.] On the one hand add $0;5$ to $0;25$, (and) you see $0;30$,
53. [on the other hand subtract $(0;5)$ from $0;25$, (and) y]ou see $[0;20]$. $0;30$ is the large, (and) $0;20$ is the small.
54. [... ..] the second ... that of one canal ...
55. [... ..]