数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 88-121



# リーマンの「一複素変量の関数一般論のための基礎」

東京理科大学理学部　小松彦三郎 (Hikosaburo Komatsu)
山形県立鶴岡工業高校　井上　鉄也 (Tetsuya Inoue)
Department of Mathematics, Science University of Tokyo

東京理科大学大学院理学研究科に３年前理数教育専攻という新しい専攻ができた。今度の学習指導要領で「総合的な学習の時間」という従来の学科とは全く異なる教科が新設されるのを先取りして、これに対応できる理系の教師を養成するのが目的である。私は、はからずも、この専攻の担当となり、数学史を研究する学生を受け入れることにした。数学史の研究は必然的に総合的な学習となるからである。私は、まず、学生に原典を１つ選び、それを始めから終わりまで完全に読むように指導している。私が見た数学史の本の多くは他の数学史家が書いたものを論拠として議論を進めており、数学を作った人たちの真意を正しくとらえているかどうかよくわからない。その上、人が本を読んで知ることができることは、読む前からその人が知っていたことにごくわずかをつけ加えるに過ぎない。重要な文献は、人をかえ、時代をかえて繰り返し読まれるべきものである。

この論文は平成12年3月に修士課程を修了した井上鉄也君の修士論文『原論文にみるリーマンの関数論「一複素変量の関数一般論のための基礎」について』の第３章である Bernhard Riemann の博士論文 Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse の全訳を多少手直ししたものである。テキストとしては H. Weber が編集した全集の Dover 社版を用いた。最近 Springer 社から新しい全集が出版されたが、第15節の後の３つの星印を除いてテキストに異同はないようである。私の知るかぎり、これまで日本語に訳されたものはない。

ドイツ語のテキストを理解することと、それを正しく日本語に書き表わすことは別のことである。このような文章を訳すにはなるべく直訳すべきであろうが、必ずしもそうしなかった。日本語は数学を表現するのに十分な言語であり、ドイツ語の構文は一部日本語に似ている。しかし、どうにもならない差もある。ショーペンハウアが皮肉っているように、１９世紀のドイツ語では形容詞が残っているときには同じ名詞を極端に省略してしまう。また、性数で区別できるからというので代名詞、特に derselbe を多用する。これらは省略された名詞を補うか、あるいはそれが表わす名詞に置換えないかぎり日本語として意味をなさないが、いつも正しく置換えられるかというと難しい。なお、これ以外で補ったところは大括弧の中に入れた。また、能動態と受動態は自由に行き来することにした。数学の術語も当時と今では違っているので、あえて今風に訳した。１つの単語、例えば、endlich が有限と有界の２つの意味に使われているときは適当に判断してどちらかを選んだ。

論文の内容は、巻末にリーマン自身が書いたという要旨があるのでそれをみればわかるが、以下ざっと紹介することにしよう。

初めに実区間上の連続関数について少しばかり論じている。ウェーバーが付けた注１によればリーマンは既に $\epsilon\,\delta$ 式定義を知っていたというが、この論文の立場は明らかに違う。連続関数が微分できるのは当然だとしている。これについては、アンペールの『証明』まであるそうである。注１の beständige Endlichkeit が何を意味するのかよく分からないが、あるいは後にハイネやボルツァーノが導入したコンパクトを意味したのかもしれない。第16節のディリクレ原理の証明は、もし無限次元の試料関数の空間でも有界閉集合上の連続汎関数に常に最小値があるのであれば、ほぼ正しく書かれている。この場合、試料関数全体は有界でないため、遠くに行けば汎関数も大きくなることをいっておかなければならない。第17節が何のためにあるのか理解しにくいが、あるいはその証明なのかもしれない。

リーマンにとって複素変量 $w$ が $z$ の関数であるとは、$w$ の実部 $u$ と虚部 $v$ が $z$ の実部 $x$ と虚部 $y$ の関数としてコーシ・リーマンの方程式の解となっていることである。その結果、$u, v$ 共に調和関数になる。逆に、$u$ が調和関数ならば、今風に書いて

$$\vartheta u = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy \tag{1}$$

の不定積分として得られる共役調和関数 $v$ を虚部に加えた $w$ は $z$ の関数になる。

いうまでもなく、この論文の第一の功績は複素関数の定義域としてリーマン面を導入し、その位相を論じたことである。リーマンの方法は、与えられた面を横断線、すなわちその面の境界の1点から出発し（その線が新たに作るものを含めて）他の境界点に至る単純曲線によって切断し、単連結面に胞体分割するものである。単連結も、任意の横断線によって連結成分が1つ増える面とホモロジー論的に定義している。このようにしてリーマンはリーマン面の位相不変量である連結位数を導入した。これは今日のオイラー標数の符号を逆にしたものである。

解析の手段としては徹底して偏微分方程式論を用いる。コーシの積分公式に相当する積分公式も、第10節に今日では調和関数に対するグリーンの公式として知られている形で与えている。グリーンの仕事は1828年に発表されたが、広く知られるようになるには随分と時間がかかったようである。リーマンは第7節で部分積分に関するグリーンの公式とその証明も与えている。

リーマン面上の関数に対しては、旋回点では微分方程式論を適用することはできない。その意味でリーマンの除ける特異点の定理は重要である。第12節に与えられているこの定理は $z \to z'$ のとき $(z-z')w \to 0$ ならば $z'$ は除ける特異点であるという強い形をしている。反対に $|(z-z')w| \to \infty$ となるときは $z'$ が極になることを、極の主要部を引いたものが $z$ の関数になることによって示した。$z'$ が真性特異点になる場合は論じていない。

有名なディリクレ原理は第16節で積分

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dxdy \tag{2}$$

に関する変分問題として定式化されている。しかし、始めに変分をとるのは与えられた境界値をとる $\alpha$ に関するものであり、それによって実部 $u$ が決まった後（1）の積分によって虚部 $v$ を定めて（2）を 0 にするのであるから、実際上通常のディリクレ積分に関する変分問題と同じである。面が単連結でないときには（1）の積分に多価性が生ずる。リーマンはこの困難を単連結面による胞体分割で切り抜けようとするが、これについてのリーマンの説明もウェーバーの注3もよく判らない。

こうして、少なくとも単連結面に対しては、境界上に任意に与えられた連続関数を実部の境界値とする複素関数の存在と任意の純虚定数差を除く一意性が証明できる。この複素関数を実部の境界値を用いて具体的に表示することをリーマンは拒否し、ウェーバーは注7を付けるのであるが、これも奇妙である。次の第21節で証明されるリーマンの写像定理によれば、問題は単位円板の場合に帰着され、そこではポアソンの公式を用いて $u$、$v$ 共に簡単な積分表示ができる。リーマンがめざしたのは、存在領域を指定した複素関数全体のなす線形空間の基底を決定することであったと思われる。今では、境界値の意味を佐藤超関数の意味にとって、より完全な答えを与えることができる。

最後に、同じ方法でリーマンの写像定理が証明されている。単連結面が具体的に与えられたとき写像関数を計算しようとすれば、ディリクレ問題を解く他ないと思われるが、殆んどの関数論の教科書がケーベの証明を採用し、リーマンのものを無視しているのは残念である。

最後の第22節には、そこに引用されているガウスの2つの論文を参照すれば、写像定理が単連結でない場合にも拡張できると書いてあるように思われる。誰かラテン語の論文を読んで写像定理とガウスの関係を解明する人が現れることを期待する。（小松彦三郎）

# 一複素変量の関数一般論のための基礎

（ゲッティンゲン大学学位論文 1851年；無修正の第2刷 ゲッティンゲン、1867年）

ベルンハルト・リーマン　井上鉄也、小松彦三郎 訳

## 1.

$z$ でもってある変量を考える。これが次々に可能な実数値をとることができ、その値1つ1つに対して不定量 $w$ のただ1つの値が対応するとき、$w$ は $z$ の関数であるという。そして $z$ が2つの固定した値の間にある全ての値をとって連続的に動くとき、同様に $w$ も連続に変化するならば、この関数はこの区間の中で連続であるという。(1)

この定義では明らかに、関数の個々の値を通してなりたつ1つの法則が規定されることはない。すなわち、この関数に対してある特定の区間上である法則が規定されたとしても、この区間の外での関数の接続の様子は全く任意に任せられている。

量 $w$ の $z$ に対する従属性が、数学的な法則によって与えられ、$z$ の各々の値に対して特定の量演算を施すことによって、対応する $w$ が見付けられることがある。ある与えられた区間にあるすべての $z$ の値に対して、同じ従属法則によって特定することができることを、以前はある種の関数類の名前で呼んだ（オイラーの術語では functiones continuae); 近年の研究は、これに対し、与えられた区間上のどのような連続関数に対してもそれを表す解析的表示式があることを示している。それゆえ、量 $w$ の $z$ に対する従属性が任意に与えられるといっても、特定の量演算によって制約され定義されるといっても同じ事である。2つの概念は、今後言及される定理の中で同一の意味を持つ。

しかし、量 $z$ の変化が実数値に制限されず、$x+yi$（ただし、$i=\sqrt{-1}$）という形の複素数値まで許されれば、事情は違ってくる。

$x+yi$ と $x+yi+dx+dyi$ を量 $z$ の無限小だけ異なる2つの値とし、その2つの値に量 $w$ の値 $u+vi$ と $u+vi+du+dvi$ が対応しているとする。このとき、量 $w$ の $z$ に対する従属性が任意であるとするならば、比 $\dfrac{du+dvi}{dx+dyi}$ は一般に $dx$ と $dy$ の値によって変化するであろう。すなわち、$dx+dyi=\varepsilon e^{\varphi i}$ と置くとき、

$$\begin{aligned}
&\frac{du+dvi}{dx+dyi}\\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]\frac{dx-dyi}{dx+dyi}\\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]e^{-2\varphi i}
\end{aligned}$$

となる。しかし、どのようなものであれ、$w$ が $z$ の関数として簡単な量演算で規定されるとき、微

分商 $\dfrac{dw}{dz}$ の値は微分 $dz$ の値に依存しない* 。明らかに、このようにして複素量 $w$ の複素量 $z$ による全く任意とはいえない従属性が表現できる。

何かある量演算で定められる関数のまさしくこのきわだった特徴を、われわれは今後の研究、そこではこのような関数がその表示式と無関係に考察されるべきであるが、その基礎に置く。そして、今はこれが量演算で表現できる従属性の概念として普遍妥当性と十分性をもつかどうか検証することなしに、次の定義から出発する：

複素変量 $w$ が他の複素変量 $z$ の関数であるとは、それらがあい伴って変化するとき、微分商 $\dfrac{dw}{dz}$ の値が微分 $dz$ の値に依存しないことをいう。

## 2.

量 $z$ も $w$ もそれぞれ複素数値をとることのできる変量とみなされる。2次元の連結領域に拡がるこのような量の変化の様子を理解することは、空間的直観と結び付けることによって本質的に易しくなる。

量 $z$ の各々の値 $x+yi$ は、平面 $A$ の直交座標が $x, y$ の点 $O$ によって、量 $w$ の各々の値 $u+vi$ は、平面 $B$ の直交座標が $u, v$ の点 $Q$ によって表わされていると考える。そうすれば、量 $w$ の $z$ によるどのような従属性も、点 $Q$ の位置の $O$ の位置による従属性として表現される。$z$ の各々の値に対して、$z$ と共に連続に変化するある特定の $w$ の値が対応する。言い換えれば、$u$ と $v$ は $x, y$ の連続な関数である。このとき、平面 $A$ の各点には平面 $B$ の点が、各曲線には一般には曲線が、各連結面成分に対しては連結面成分が対応する。こうして量 $w$ の $z$ に対する従属性を平面 $A$ から平面 $B$ への写像として表現することができる。

## 3.

ここで、$w$ が複素変量 $z$ の関数であるとき、すなわち、$\dfrac{dw}{dz}$ が $dz$ と独立であるとき、これらの写像はどのような性質をもつか研究しよう。

$o$ でもって $O$ の近くにある平面 $A$ の不定な点を、$q$ でもって平面 $B$ にあるこの像を表す。さらに $x+yi+dx+dyi$ と $u+vi+du+dvi$ で量 $z$ と $w$ のこれらの点での値を表す。このとき $dx, dy$ と $du, dv$ は点 $O$ と $Q$ を原点とした点 $o$ と $q$ の直交座標とみなされる。そこで $dx+dyi=\varepsilon e^{\varphi i}$、$du+dvi=\eta e^{\psi i}$ と置くと、量 $\varepsilon$、$\varphi$、$\eta$、$\psi$ はこれらの点の同じ原点をもつ極座標となる。さて、$o'$ と $o''$ を $O$ の無限小の近くにある点 $o$ のある特定の2つの位置とする。これらに付随することを意味するのに上肩に対応する印をつけることとする。そうすれば仮定は

$$\frac{du'+dv'i}{dx'+dy'i}=\frac{du''+dv''i}{dx''+dy''i},$$

したがって、

$$\frac{du'+dv'i}{du''+dv''i}=\frac{\eta'}{\eta''}e^{(\psi'-\psi'')i}=\frac{dx'+dy'i}{dx''+dy''i}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}e^{(\varphi'-\varphi'')i}$$

---

*この主張は、明らかに、$w$ の $z$ による表示式から、微分の規則を用いて $\dfrac{dw}{dz}$ の $z$ による表示式が見付けられるようなすべての場合に正当と認められる；上の主張の厳密に普遍的な妥当性はさしあたりここにあるとしなければならない。

となる。これから、$\dfrac{\eta'}{\eta''}=\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ かつ $\psi'-\psi''=\varphi'-\varphi''$、すなわち、三角形 $o'Oo''$ と $q'Qq''$ において角 $o'Oo''$ と $q'Qq''$ は等しく、それらを挟む辺は互いに比例する。

それゆえ、互いに対応する2つの無限小三角形、したがって、一般に平面 $A$ の極小部分と平面 $B$ の上でのそれらの像は相似になる。この命題の例外は、互いに対応する量 $z$ と $w$ の変化が互いに有限な比をもたない特別な場合に起きる。このことはこの命題を導くとき暗黙のうちに仮定されている*。

## 4.

微分商 $\dfrac{du+dvi}{dx+dyi}$ を

$$\frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}i\right)dx+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}i\right)dyi}{dx+dyi}$$

という形にすれば、$dx$ と $dy$ の2つの値に対してこれが同じ値をとるのは

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

であるとき、かつそのときに限ることがわかる。これらの条件はそれゆえ、$w=u+vi$ が $z=x+yi$ の関数であるために必要十分である。この関数の各々の成分に対してはこれから次が導き出される：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

これらは、このような関数の各成分を個別に考察して、その性質を研究するとき基礎となるものである。われわれは、これらの性質の証明を最重要なものとして、これから取りかかる全関数の考察に先行させるのであるが、更になおその前に、それらの研究の基盤を整えるため、一般の領域に属する一二の点を詳論し明確にしておきたい。

*　*
*

## 5.

以下の考察の中で、われわれは量 $x,y$ の変域を有界領域に制限するのであるが、点 $O$ の位置としては平面 $A$ 自身のみならず、その上に拡げられた面 $T$ をも考察する。このような言い回しを選ぶことによって、点 $O$ の位置が平面の同じ部分に何回も延びてくるという可能性を許して互いに重なる面について論ずるのに支障がなくなる。この際、互いに重なる面部分が1つの曲線にそって連結することはなく、したがって、面の折り返しや重なる部分の分裂が起きることはないと仮定する。

---

*この話題については次を見よ：C.F.ガウス「与えられた面の二つの部分を、極小部分においては相似になるように写像せよという問題の一般解」(コペンハーゲン王立科学協会によって1822年に出された懸賞問題に対する解答として Schumacher 編集天文学雑誌 第3分冊 アルトナ 1825年に出版)(ガウス全集 第IV巻 p.189)

平面の各部分で互いに重なる面部分の個数は、その場所の境界とその意味（どちらが内側か外側か）が与えられれば、完全に決まる。しかしながら、そのつながりは、さまざまであり得る。

実際、この面で覆われている平面の部分に任意の曲線 $l$ を引いてみれば、互いに重なる面部分の個数は[曲線が]境界を越えるときのみ変化する。しかも、外側から内側に越すときは $+1$ だけ、反対の場合には $-1$ だけ変わり、いたるところで定まっている。この曲線の岸に沿って、境界付けられた各面部分は、この曲線が境界に当たらない限り、既定の仕方で接続される。[接続の]不定性はいつもある孤立した点で、したがってこの曲線の1点かまたはこの曲線の有限の消滅点で起きる；それゆえ、もし曲線 $l$ のうち面の内部を動く一部分と、この両側の十分に小さい面の帯に限って考察することにするならば、ある特定の境界付き面部分であって、この面部分の個数が両側で同じであるものについて議論すればよい。曲線に特定の方向を付けて、左側の面部分には $a_1, a_2, \cdots, a_n$、右側のものには $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$ という記号をつける。各面部分 $a$ はもう一つの面部分 $a'$ に接続される；しかもこれは一般に曲線 $l$ の全長で同じであるが、$l$ の特別な場所、その1点で変わることがあり得る。面部分 $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$ には、このような1点 $\sigma$ の上手で（すなわち、$l$ の先行する部分に沿って）この順番に面部分 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が接続し、下手では面部分 $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \cdots, a_{\alpha_n}$ が接続しているとする。このとき、$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ は $1, 2, 3, \cdots, n$ と順序だけが違う。したがって、$\sigma$ の上手で $a_1$ から $a'_1$ の中に入った点が $\sigma$ の下手で左側に戻るなら面部分 $a_{\alpha_1}$ に到着する。そして1点が左側から右側へと点 $\sigma$ を一周すれば (2)、この点が入っている面部分の添え字は順番に

$$1,\ \alpha,\ \alpha_{\alpha_1},\ \cdots,\ \mu,\ \alpha_\mu$$

という数を経由する。この数列は、1 が繰返されない限り、必らず各項が互いに異なる。というのは、任意の中間項 $\alpha_\mu$ には $\mu$ が先行しなければならず、1 までの先行するすべての項が次々にそのとおりの列として先行することになるからである；しかし、何項かの後、項 1 が戻ってきたとき、その数は明らかに $n$ よりも小さく、その数を $=m$ とすれば、その後は、同じ順序で他の項が続くことになる。$\sigma$ の周りを動く点は、このとき $m$ 回まわるごとに同じ面部分に戻り、互いに重なる面のうち $m$ 個のものの外にはでない。しかも $\sigma$ の上ではただ一つの点に合致する。われわれは、この点を面 $T$ の $(m-1)$ 位の旋回点と名づける。同じ処理を残りの $(n-m)$ 個の面部分に適用することにより、これらは、特別なことがないかぎり、$m_1, m_2, \cdots$ 個の面部分の系に分解される。この場合 $(m_1-1), (m_2-1)\cdots$ 位の旋回点も点 $\sigma$ にある。

$T$ の場所および境界の意味、そしてそれらの旋回点の場所が与えられれば、$T$は完全に決まるか、または有限個の異なる形に限られる；後の違いというのは、これらの決定要素が重なる面部分のどの面部分を占めるかという違いだけである。

1つの変量が、一般に面 $T$ の各点 $O$ に対して、というのは孤立した曲線や点の例外を除いて*ということであるが、その点の場所と共に連続に変わるある特定の値を取るとき、これは明らかに $x, y$ の関数とみなされる。そして、今後 $x, y$ の関数というときは常に、関数の概念をこの意味に決めておく。

しかしながら、そのような関数の考察に向かう前に、われわれは面の連結性について更にいくつかの論議を挿入する。その際、ある曲線に沿って裂けていないような面に限定する。

---

*もっとも、この制限は関数の概念そのものに要求されているのではない。しかし、これに対して無限小解析を適用することができるためには必要である：平面のすべての点で不連続な関数、例えば、有理数の $x$ と有理数の $y$ に対しては、1の値を取り、それ以外では2の値を取るような関数は、微分も積分もできない。それゆえ（直接には）無限小解析が一般に適用されない。ここで面 $T$ に対して恣意的に行なった制限は、後に（第15節）正当化される。

## 6.

２つの面部分は、一方の面部分の１点から面の内部を通ってもう一方の面部分まで曲線が引けるとき、連結している、あるいは１つの成分に属するとみなし、これが可能でないとき分裂しているとみなす。

面の連結性の研究は、これを横断線によって分割することによって行う。ここで、横断線というのは、ある境界点から内部を単純に — 多重点なしに — ある境界点まで切断する曲線である。後の境界点は、境界として付け加わった部分、したがって、横断線のそれより前の点であってもよい。

連結面はどんな横断線によっても２つに切り分けられるとき、単連結といい、そうでないとき多重連結という。

定理 I.　単連結面 $A$ はどの横断線 $ab$ によっても２つの単連結な成分に切り分けられる。

これらの成分の１つが横断線 $cd$ によって２つに切断されないと仮定すれば、この横断線のどちらの端点も $ab$ に属さない、あるいは端点 $c$ は属する、あるいは両端ともに属するに応じて、全曲線 $ab$、あるいは曲線 $ab$ の $cb$ の部分あるいは $cd$ の部分に沿って接続を回復すれば明らかに１つの連結面が得られる。しかし、これは１つの横断線によって $A$ から生じたものになり、仮定に反する。

定理 II.　面 $T$ が $n_1$ 個* の横断線系 $q_1$ によって $m_1$ 個の単連結面成分の系 $T_1$ に切り分けられ、$n_2$ 個の横断線系 $q_2$ によって $m_2$ 個の面成分の系 $T_2$ に切り分けられるとき、$n_2 - m_2$ が $> n_1 - m_1$ であることはない。

$q_2$ の各曲線は、それが完全に横断線系 $q_1$ に入らない限り、同時に面 $T_1$ の１つのあるいは複数の横断線系 $q_2'$ をなす。横断線系 $q_2'$ の端点として次のものに注目する：

1) 横断線系 $q_2$ の $2n_2$ 個の端点。ただし、これらの端点のうち曲線系 $q_1$ の一部と一致しているものは除く。
2) $q_2$ の横断線の１つの中間の点で、$q_1$ の１つの曲線の中間の点と重なるもの。ただし、それがすでに $q_1$ の他の１つの曲線の中にあるとき、すなわち、$q_1$ の横断線の１つの端点と一致するものは除く。

今、$\mu$ でもって両方の系の曲線が進行中に何回出会い、離れていくか（したがって、個々の共通点は二重に数えられる）$\nu_1$ でもって何回 $q_2$ の中間部に $q_1$ の端が一致するか、$\nu_2$ でもって何回 $q_1$ の中間部と $q_2$ の端が一致するか、最後に $\nu_3$ でもって何回 $q_1$ の端が $q_2$ の端と重なるかを表す。そうすれば横断線 $q_2'$ はそれぞれ　Nr. 1　$2n_2 - \nu_2 - \nu_3$,　Nr. 2　$\mu - \nu_1$　個の端点を生ずる；両方の場合を一緒にして、全体の端点を総計し、それぞれを１度だけ数えれば、横断線の数は、それゆえ、

$$\frac{2n_2 - \nu_2 - \nu_3 + \mu - \nu_1}{2} = n_2 + s$$

となる。全く同様の論法で曲線 $q_1$ で作られる面 $T_2$ の横断線 $q_1'$ の数は

$$= \frac{2n_1 - \nu_1 - \nu_3 + \mu - \nu_2}{2}.$$

これは $= n_1 + s$。ここで、面 $T_1$ は $n_2 + s$ 個の横断線 $q_2'$ によって、明らかに $T_2$ が $n_1 + s$ 個の横断線系 $q_1'$ によって分割されたのと同じ面に変化する。ここで、$T_1$ は $m_1$ 個の単連結成分からなりたっているから、定理 I により $n_2 + s$ 個の横断線により $m_1 + n_2 + s$ 個の面成分に分離す

---

*多くの横断線による分割とは、常に逐次分割と理解する。すなわち、１つの横断線によって生じた面を、新しい横断線でまた分割したものをいう。

る。それゆえ、もし $m_2 < m_1 + n_2 - n_1$ ということがあるならば、面 $T_2$ の成分の数は $n_1 + s$ 個の横断線により $n_1 + s$ より多く増えることになる。これは不合理である。

この定理の帰結は、横断線の個数を一般に $n$ 、できた成分の個数を $m$ と表わすならば、$n - m$ はある面をどのように単連結成分に分割したときも一定であることである；なぜなら、何か特定の2つの分割で、$n_1$ 個の横断線によって $m_1$ 個の成分に、$n_2$ 個の横断線によって $m_2$ 個の成分に分割されたものを考えるとき、前者が単連結ならば $n_2 - m_2 \leq n_1 - m_1$ でなければならず、後者が単連結ならば $n_1 - m_1 \leq n_2 - m_2$、故に両方がそうなら、$n_2 - m_2 = n_1 - m_1$ でなければならないからである。

この数は正当に面の「連結位数」という名前をつけることができる。これは、

どんな横断線によっても 1 だけ下がり — 定義による —

1つの内点から内部を単純に境界点あるいは以前の横断点にまでいたる断線によって不変であり、

内部にあって、いたるところ単純かつ2点で終わる切断によって 1 だけ上がる。

というのは、前者は1つの横断線により、後者は2つの横断線により1つの横断線に変えることができるからである。

最後にいくつかの成分から成り立っている面の連結位数は、各成分の連結位数を互いに加えることによって得られる。

しかし、以下ではたいてい1つの成分から成り立つ面に限って考察し、その連結性に対して単連結、二重連結などの素朴な名称を用いる。ここで、$n$ 重連結面とは $(n-1)$ 個の横断線によって単連結面に分割できるものと理解する。

境界の連結性が面の連結性にどのように依存するかについては、次のことが容易にわかる：

1) 単連結面の境界は必ず1本の一回りする曲線からなる。

仮に境界が分離した成分から成り立っているとすれば、1つの成分 $a$ の1点を別の成分 $b$ の1点と結ぶ横断線 $q$ が2つの連結面部分に互いに分離することになる。ところが、面の内部で $a$ にそってある曲線は横断線 $q$ の片側から反対側まで達する；したがって、$q$ は面を分割しない。これは仮定に反する。

2) 各横断線によって境界成分の数は1だけ減るか1だけ増える。

1つの横断線 $q$ は、境界成分 $a$ の1点を別の成分 $b$ の1点と結ぶか — この場合、これらの曲線を、$a$、$q$、$b$、$q$ の順につないだものは、境界の1つの閉じた部分となる —

あるいは、境界の1つの成分の2つの点を結ぶか — この場合は、この成分は両方の端点によって2つの部分に分離され、その各々は横断線とともに1つの閉じた境界成分をなす —

あるいは、最後に、横断線の前の点に戻って終わり、1つの閉曲線 $o$ と $o$ の1点と境界成分 $a$ を結ぶ別の曲線 $l$ からなるとみなせるとき、— そのときは、$o$ を1つの部分、そして $a$、$l$、$o$、$b$ を別の部分としてそれぞれが1つの閉じた境界成分をなす。

したがって、— はじめの場合は — 2つの境界成分の代わりに1つ、あるいは — 2番目と最後の場合は — 1つの境界成分の代わりに2つが生じる。これからわれわれの命題が従う。

$n$ 重連結面成分の境界がなす成分の数は、したがって $= n$ であるか、それより偶数個少ない。

これから、さらに[次の]系が導かれる。

$n$ 重連結面の境界部分の数が $= n$ ならば、これは内部でいたるところ単純で閉じた切断によって2つの分離した成分に分かれる。

というのは、このとき連結位数は変わらないが、境界成分の数は2だけ増加する；もし面が連結のままであるとすると、$n$ 重連結で $n + 2$ 個の境界成分を持つことになるが、これは不可能である。

7.

$X$ および $Y$ を $A$ の上に拡げられた面 $T$ のすべての点で連続な $x, y$ の2つの関数とする。このとき、この面すべての要素 $dT$ にわたる積分

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dT=-\int(X\cos\xi+Y\cos\eta)ds.$$

ここで、境界の各点でそこから内部に引かれた法線の $x$ 軸に対してなす傾きを $\xi$、$y$ 軸に対してなす傾きを $\eta$ と表し、[右の]積分は、境界線のすべての要素 $ds$ に及ぶ。

積分 $\int\frac{\partial X}{\partial x}dT$ を変形するために、平面 $A$ の面 $T$ によって覆われた部分を $x$ 軸に平行な直線の系によって帯要素に分割し、面 $T$ の各旋回点もこれらの直線の一つに落ちるようにする。この仮定の下で、同じ所に落ちる $T$ の部分はそれぞれ1つまたは隔離されて動くいくつかの短冊状の成分から成り立っている。このような面の帯の不定の1つが $y$ 軸から要素 $dy$ を切り出すとき、それが $\int\frac{\partial X}{\partial x}dT$ の値に与える寄与は明らかに $dy\int\frac{\partial X}{\partial x}dx$ に等しい。ただし、この積分は、$dy$ の1点を通る法線に落ちる $T$ の1つあるいはいくつかの直線についてとったものである。さて、これらの直線の下の端点（すなわち、$x$ の最小値に対応する）を $O_{\prime}, O_{\prime\prime}, O_{\prime\prime\prime}, \cdots$ 、上の端点を $O', O'', O''', \cdots$ とし、$X_{\prime}, X_{\prime\prime}, X_{\prime\prime\prime}, \cdots, X', X'', X''', \cdots$ でもってこれらの点での $X$ の値、$ds_{\prime}, ds_{\prime\prime}, ds_{\prime\prime\prime}, \cdots, ds', ds'', ds''', \cdots$ でもって対応する面の帯が境界から分離する要素、$\xi_{\prime}, \xi_{\prime\prime}, \xi_{\prime\prime\prime}, \cdots, \xi', \xi'', \xi''', \cdots$ でもってこの要素での $\xi$ の値を表せば、

$$\begin{aligned}\int\frac{\partial X}{\partial x}dx=&-X_{\prime}-X_{\prime\prime}-X_{\prime\prime\prime}\cdots\\&+X'+X''+X'''\cdots\end{aligned}$$

となる。角 $\xi$ は明らかに下の端点で鋭角になり、上の端点で鈍角になる。それゆえ、

$$\begin{array}{rclcl} dy &=& \cos\xi_{\prime}ds_{\prime} &=& \cos\xi_{\prime\prime}ds_{\prime\prime}\ \cdots\\ &=& -\cos\xi'ds' &=& -\cos\xi''ds''\ \cdots. \end{array}$$

これらの値を代入すれば、

$$dy\int\frac{\partial X}{\partial x}dx=-\sum X\cos\xi ds$$

が得られる。ただし、この和は $y$ 軸において $dy$ に射影をもつすべての境界要素について取る。

考えられるすべての $dy$ について積分することにより、明らかに、面 $T$ のすべての要素と境界のすべての要素は尽くされる。以上を総合して

$$\int\frac{\partial X}{\partial x}dT=-\int X\cos\xi ds$$

を得る。全く同様の推論により

$$\int\frac{\partial Y}{\partial x}dT=-\int Y\cos\eta ds.$$

したがって

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dT = -\int (X\cos\xi + Y\cos\eta) ds.$$

証明終

## 8.

境界線上、ある固定した始点から、後で定める方向づけをした方向に測った不定点 $O_0$ までの境界線の長さを $s$ で表し、この点 $O_0$ に立てられた法線上これから不定点 $O$ までの距離であって、内部へ向かう方を正としたものを $p$ とすれば、点 $O$ での $x$ と $y$ の値は明らかに $s$ と $p$ の関数とみなし得る。このとき境界線の点での偏微分商は

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \cos\xi\ ,\ \frac{\partial y}{\partial p} = \cos\eta\ ,\ \frac{\partial x}{\partial s} = \pm\cos\eta\ ,\ \frac{\partial y}{\partial s} = \mp\cos\xi$$

となる。ここで、上の符号があてはまるのは、量 $s$ が増加する方向と $p$ ［が増加する方向］が、$x$ 軸と $y$ 軸が囲む角と同じ角を囲むときであり、反対の角を囲むときは、下の符号があてはまる。われわれは、境界のあらゆる部分でこの方向を

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial p},\quad \text{したがって}\quad \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial p}$$

となるように取る。これがわれわれの結果の普遍性を本質的に傷つけることはない。

明らかにこの取り決めは $T$ の内部にある曲線にまで拡張することができる；ただ、ここで $dp$ と $ds$ の符号の取り決めにあたって、それらの相互関係は上のように定められるとすると、符号を定めるのが $dp$ の符号かまたは $ds$ の符号かの指示を付け加えればよいだけである；閉曲線が問題になっているときは、その閉曲線を、それによって切り分けられたどちらの面部分の境界とみなすべきかであって、それによって $dp$ の符号が決まる。閉曲線でないときはその始点、すなわち、$s$ が最小の値を取る端点[を決めればよい]。

$\cos\xi$ と $\cos\eta$ に対して得られた値を前節で証明された方程式の中に代入すれば、そこと同じ状況の下で

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dT = -\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}\right) ds = \int \left(X\frac{\partial y}{\partial s} - Y\frac{\partial x}{\partial s}\right) ds$$

が成り立つ。

## 9.

前節の最後の命題をすべての面部分で

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

である場合に適用して、次の命題を得る：

I. $X$ および $Y$ が $T$ のすべての点で有界、連続かつ方程式

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

を満たす 2 つの関数ならば、$T$ の全境界に及ぶ[積分]

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds=0.$$

$A$ の上に拡げられた任意の面 $T_1$ が 2 つの面 $T_2$ と $T_3$ に任意の仕方で分割されているとする。このとき、$T_2$ の境界に関する積分

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

は $T_1$ の境界に関する積分と $T_3$ の境界に関する積分の差とみなすことができる。というのは、$T_3$ [の境界]が $T_1$ の境界に及んでいるところでは、両者の積分は相殺し、残りの要素はすべて $T_2$ の境界要素に対応するからである。

この変形を使って I. から[次を]得る：

II. $A$ の上に拡げられた面の全境界にわたる積分

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

の値は、任意に面を増加あるいは減少させても一定である。ただし、加えたり、引いたりする面で命題 I. の仮定が満たされていないものはないとする。

関数 $X, Y$ が面 $T$ のどの部分でも上に述べた微分方程式を満たしながら、孤立した曲線あるいは点で不連続性がある場合、このような曲線および点の各々をいくらでも小さな面部分で包み込み、その上で命題 II. を適用することによって[次を]得る：

III. $T$ の全境界に関する積分

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

は、すべての不連続個所を取り囲む境界に関する積分

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

の和に等しい。しかも、それぞれの個所をどのように狭い境界で囲んでもその場所に関する積分は同じ値を持つ。

孤立不連続点に関するこの値は、もし点 $O$ の不連続点からの距離 $\varrho$ とともに、$\varrho X$、$\varrho Y$ が無限小になるならば、必然的に 0 に等しい；というのは、このような点を原点とし、任意の原方向をも

つ極座標 $\varrho$、$\varphi$ を導入し、不連続点の周りを半径 $\rho$ で描いた円を境界に選ぶならば、この境界に関する積分は

$$\int_0^{2\pi}\left(X\frac{\partial X}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\varrho d\varphi$$

と表され、したがって、0 と異なる値 $\chi$ を持つことはできない。というのは、[符号を無視して] $\chi$ が何であれ、$\varrho$ をますます小さくとれば、符号を別にして $\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\varrho$ が、$\varphi$ のすべての値に対し、$\frac{\chi}{2\pi}$ より小さくなるようにすることができ、したがって、

$$\int_0^{2\pi}\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\varrho d\varphi<\chi$$

となるからである。

**IV.** $A$ の上に拡げられた単連結面で、各面部分に対しその全境界に及ぶ積分

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

すなわち

$$=\int\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds=0$$

ならば、どの 2 つの固定点 $O_0$ と $O$ に対しても、$O_0$ からこの面の中で $O$ に向かうすべての曲線に関して上の積分は同じ値を取る。

点 $O_0$ と $O$ を結ぶどの 2 曲線 $s_1$ と $s_2$ も一緒に閉曲線 $s_3$ を形作る。この[閉]曲線はそれ自体多重に交わらないという性質をもつか、あるいは、いくつかのいたるところ単純な閉曲線に分解することができる。すなわち、任意の点から出発してこの閉曲線をたどって、以前に通った点へ帰れば、いつもその間に通った部分を分離し、その後の部分を直接の続きとみなす。このような[単純閉]曲線はいずれも[はじめの単連結]面を 1 つの単連結面と 1 つの二重連結面に分解する；それゆえ、それは必然的にこのうちの 1 つの成分の全境界をなし、その上に及ぶ積分

$$\int\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds$$

は、仮定に従い 0 になる。したがって、同じことが全曲線 $s_3$ に及ぶ積分に対しても成り立つ。ただし、このとき量 $s$ は常に同一方向に大きくなるとみなされなければならない。それゆえ、曲線 $s_1$ と $s_2$ に及ぶ積分は、この方向がそのままのとき、すなわち、1 つの曲線では $O_0$ から $O$ へ向かい、別の曲線では $O$ から $O_0$ へ向かうとき、互いに相殺される。したがって、後者の向きを変えれば等しくなる。

今、任意の面 $T$ があり、そこで一般に[すなわち、孤立した曲線や点の例外を除いて]

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

であるとする。はじめ必要な場合には不連続個所を取り除けば、残りの面成分ではあらゆる面部分に対して

$$\int \left( Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds = 0$$

となる。次いで、この面成分を横断線によって単連結面 $T^*$ に分解する。このとき $T^*$ の内部では1点 $O_0$ から別の点 $O$ へ向かうどんな曲線に対しても、われわれの積分は同じ値を持つ；この値に対して簡単のため記号

$$\int_{O_0}^{O} \left( Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

が許されよう。$O_0$ を固定、$O$ を可動と考えるなら、この値は、連結線の進路と関係なく $O$ の各位置に対して確定し、したがって、$x, y$ の関数とみなすことができる。この関数の変分は、任意の曲線要素 $ds$ に沿う $O$ の移動に対し

$$\left( Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

と表され、$T^*$ 上いたるところで連続で $T$ の横断線に沿ってもその両側で等しい。

V. 積分

$$Z = \int_{O_0}^{O} \left( Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

は、したがって、$O_0$ を固定して考えると、$x, y$ の関数となる。この関数は、$T^*$ 上いたるところで連続であるが、$T$ の横断線を越える際にはその横断線にそって1つの枝点から別の枝点へ定数値だけ変化する。そして、この関数の偏微分商は

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = Y \ , \ \frac{\partial Z}{\partial y} = -X$$

である。

$T$ の横断線を超えるときの変化は、横断線の数に等しい個数の独立な量に従属する；なぜならば、横断線系を逆向きに、— 後の部分を最初に — 動いて行くとき、この変化はその値が各横断線の始点で与えられれば、いたるところで確定する；そして、始点での値は互いに独立であるからである。(3)

## 10.

これまで $X$ と表してきた関数に

$$u\frac{\partial u'}{\partial x} - u'\frac{\partial u}{\partial x} \text{ を、} Y \text{ に } u\frac{\partial u'}{\partial y} - u'\frac{\partial u}{\partial y}$$

を代入すれば、

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = u\left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) - u'\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

となる。ここで、関数 $u$ と $u'$ が方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ ,\ \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} = 0$$

を満たすならば、

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

が成り立ち、式

$$\int \left( X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p} \right) ds,$$

すなわち、

$$= \int \left( u\frac{\partial u'}{\partial p} - u'\frac{\partial u}{\partial p} \right) ds$$

に対して、前節の命題が適用できる。

さて、われわれは関数 $u$ に関して以下のことを仮定する： $u$ もその一次微分商も不連続性をもったとしても決して曲線に沿ってではない。また、どの不連続点でもそれから点 $O$ までの距離 $\varrho$ と共に $\varrho\frac{\partial u}{\partial x}$ も $\varrho\frac{\partial u}{\partial y}$ も無限小になる。したがって、前節 III. の注意により、$u$ の不連続性は全く無視してよい。

というのは、このときある不連続点から出発する各直線において $\varrho$ の値 $R$ を［$\varrho$ が］この値以下では

$$\varrho\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varrho}$$

が常に有界であるように取ることができ、$u$ の $\varrho = R$ での値を $U$ で、この区間での関数 $\varrho\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ の符号を無視した最大値を $M$ で表せば、同じ意味にとって、常に $u - U < M(\log\varrho - \log R)$ であり、したがって、$\varrho(u-U)$、そして、$\varrho u$ も $\varrho$ と共に無限小になる；同じことが仮定に従い $\varrho\frac{\partial u}{\partial x}$ と $\varrho\frac{\partial u}{\partial y}$ に対しても成り立ち、したがって、もし $u'$ に不連続がなければ、同様に

$$\varrho\left( u\frac{\partial u'}{\partial x} - u'\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad と \quad \varrho\left( u\frac{\partial u'}{\partial y} - u'\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

に対しても成り立つ；こうして前節で論じた場合になるからである。

さて、更に、点 $O$ の場所である面 $T$ は $A$ の上にいたるところ一重に拡がっていると仮定し、この面に任意に固定した点 $O_0$ を考え、$u, x, y$ は、そこで、$u_0, x_0, y_0$ という値をとるとする。量

$$\frac{1}{2}\log((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) = \log r$$

は、これを $x, y$ の関数とみなせば、

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} = 0$$

という性質を持つ。そして、$x = x_0$ , $y = y_0$ に対してのみ、したがってこの場合、面 $T$ の一点でのみ不連続性を示す。

それゆえ、第9節の III. により、$u$ が[上の] $u'$ に $\log r$ を代入すれば、$T$ の全境界に関する[積分]

$$\int \left( u\frac{\partial \log r}{\partial p} - \log r \frac{\partial u}{\partial p} \right) ds$$

は点 $O_0$ の任意の周囲に関するこの積分に等しいことがわかる。このため、$r$ が定数値をとる円周を選び、任意に固定した方向にあるこの円周の点から[別の]半径にある[円周の点] $O$ までの弧を $\varphi$ で表せば、これは

$$-\int_0^{2\pi} u\frac{\partial \log r}{\partial r} r d\varphi - \log r \int \frac{\partial u}{\partial p} ds$$

に等しく、

$$\int \frac{\partial u}{\partial p} ds = 0 \quad ゆえ(^4), \quad = -\int_0^{2\pi} u d\varphi.$$

この値は、$u$ が点 $O_0$ で連続ならば、無限小の $r$ に対して $-u_0 2\pi$ になる。

それゆえ、$u$ と $T$ についてのこれまでの仮定の下で、面の内部の任意の点 $O_0$ に対して、そこで $u$ が連続ならば、この面の全境界に関する[積分として]

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int \left( \log r \frac{\partial u}{\partial p} - u \frac{\partial \log r}{\partial p} \right) ds$$

が成り立ち、$O_0$ のまわりに描いた円に関する[積分としても]

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\varphi.$$

この第一式から、次[の定理]を得る。

定理　関数 $u$ が、平面 $A$ をいたるところ一重に覆う面 $T$ の内部で、一般に、微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

を満たし、しかも、

1) この微分方程式を満たさないような点は面部分を[充たさない]、
2) $u$、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$ が不連続である点は曲線を連続して充たさない、
3) どの不連続点に対しても、それから点 $O$ までの距離 $\varrho$ と共に量 $\varrho\frac{\partial u}{\partial x}$、$\varrho\frac{\partial u}{\partial y}$ は無限小になり、
4) $u$ には孤立点でその値を変えることによって除去可能な不連続性はない、

とすれば、この関数は必然的にそのすべての微分商と共に面の内部のすべての点において有限かつ連続である。

実際、$O_0$ を動く点とみなせば、式

$$\int\left(\log r\frac{\partial u}{\partial p}-u\frac{\partial \log r}{\partial p}\right)ds$$

の中で変化するのは、$\log r, \dfrac{\partial \log r}{\partial x}, \dfrac{\partial \log r}{\partial y}$ の値だけである。しかし、これらの量は、どの境界要素に対しても、$O_0$ が $T$ の内部に留まる限り、そのすべての微分商と共に $x_0, y_0$ の有界かつ連続な関数になる。これら微分商は、これらの量の、$r$ の冪だけを分子にもつ有理分数関数として表わされるからである。それゆえ、同じことがわれわれの積分の値に対して、したがって、関数 $u_0$ に対して成り立つ。というのは、上の仮定の下で、この関数は不連続になるかもしれない孤立点でのみこれとは異なる値を持ち得るが、この可能性は定理の仮定4）によって排除されているからである。

11.

$u$ と $T$ に関する前節最後と同じ仮定の下で次の命題が成立する。

I. もし1つの曲線に沿って $u=0$ かつ $\dfrac{\partial u}{\partial p}=0$ ならば、$u$ はいたるところで $0$ である。

まず、$u=0$ かつ $\dfrac{\partial u}{\partial p}=0$ である曲線 $\lambda$ は、$u$ が正となる面部分 $a$ の境界になることはできないことを証明する。

もしこういうことが起こったとすれば、$a$ から面分を切り出し、一部分は $\lambda$ によって、他の部分は円周によって囲まれ、しかもこの円の中心点 $O_0$ は切り出した部分に含まれないようにする。この作図はいつでも可能である。$O_0$ に関する $O$ の極座標を $r, \varphi$ で表すならば、この面分の全境界にわたる[積分]は

$$\int \log r\frac{\partial u}{\partial p}ds-\int u\frac{\partial \log r}{\partial p}ds=0$$

となる。故に、仮定によって、境界に属する円弧に対する[積分]もまた

$$\int ud\varphi+\log r\int\frac{\partial u}{\partial p}ds=0$$

となることがわかる。ここで、

$$\int\frac{\partial u}{\partial p}ds=0$$

ゆえ、

$$\int ud\varphi=0.$$

これは、$u$ が $a$ の内部で正であるという仮定と合わない。

同様に、等式 $u=0, \dfrac{\partial u}{\partial p}=0$ は $u$ が負である面部分 $b$ の境界の部分で成り立つことはできないことが証明される。

さて、面 $T$ の中である曲線上 $u=0, \dfrac{\partial u}{\partial p}=0$ となり、かつ $T$ の1部分で $u$ が0と異なるとするならば、その面部分は明らかにこの曲線自身によってか、または $u=0$ である面部分によってか、いずれにせよ $u$ と $\dfrac{\partial u}{\partial p}=0$ となる曲線によって限られなければならない。これは必然的にさきに否定した仮定へと導く。

II. $u$ と $\dfrac{\partial u}{\partial p}$ の値が1つの曲線に沿って与えられるならば、$u$ はこれによって $T$ のすべての部分で決定される。

$u_1$ と $u_2$ を、関数 $u$ に課せられた条件を満たす何かある2つの関数とすれば、この条件の代入によってすぐにわかるように、その差 $u_1-u_2$ についても条件が成り立つ。今、$u_1$ と $u_2$ がある曲線に沿ってその $p$ についての一次微分商とともに一致するが、別の面部分では一致しないとするならば、この線に沿って $u_1-u_2=0$ かつ $\dfrac{\partial(u_1-u_2)}{\partial p}=0$ であり、しかも、いたるところで $=0$ ではない。これは命題 I. に反する。

III. $T$ の内部にあり、$u$ が一定の値を持つ点全体は、$u$ がいたるところで定数でなければ、必然的に曲線をなす。そしてこの曲線は $u$ がより大きい面部分と $u$ がより小さい面部分とに分離する。

この命題は以下のもので構成されている：

$u$ は $T$ の内部にある1点で、最小値あるいは最大値をとらない；

$u$ は面の1部分でのみ定数であることはできない；

$u=a$ である曲線は、$u-a$ が同じ符号をもつ両側の面部分の境界となることはできない。

これと反対の命題は、簡単にわかるように、常に前節で証明した等式

$$u_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ud\varphi$$

または

$$\int_0^{2\pi}(u-u_0)d\varphi=0$$

に反する結果を引き起こし、したがって、あり得ない。

## 12.

ここで複素変量 $w=u+vi$ の考察に戻ろう。この変量は、一般には（すなわち、孤立した曲線や点での例外を除くことなく［= はあり得るとして］）、面 $T$ の各点に対して確定した値を持ち、この値は点の位置と共に連続に、しかも方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

に応じて変化する。$w$ のこの性質を、これまでに確立されたことに従って、$w$ を $z=x+yi$ の関数と呼ぶことによって示す。以下の議論を簡単にするために、この際 $z$ の関数について孤立点での値の変更により除かれる不連続性は決して現れないと前もって仮定しておく。

面 $T$ は、さしあたり、単連結、かつ平面 $A$ の上のいたるところ一重の被覆面とする。

定理　$z$ の関数 $w$ が、1つの曲線に沿って不連続になることはなく、さらに、面の任意の点 $O'$ に対して、そこを $z = z'$ としたとき, $w(z - z')$ が点 $O$ の無限小変化と共に無限小になるならば、この関数は必然的にすべての微分商と共に面の内部の全ての点で有限かつ連続である。

量 $w$ の変化についての仮定は、$z - z' = \varrho e^{\varphi i}$とおくとき、$u$ と $v$ に対する以下のものに分かれる：

面 $T$ の各部分に対して

$$1)\quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$2)\quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

3)　関数 $u$ と $v$ が1つの曲線に沿って不連続になることはない；

4)　各点 $O'$ に対してその点から点 $O$ までの距離 $\varrho$ と共に $\varrho u$ と $\varrho v$ は無限小になる；

5)　関数 $u, v$ に対して孤立点での値の変更によって除かれる不連続性はない。

仮定 2), 3), 4) によって面 $T$ の各部分に対してその全境界にわたる積分

$$\int \left( u\frac{\partial x}{\partial s} - v\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

は、第9節の III. により、$= 0$ で、積分

$$\int_{O_0}^{O} \left( u\frac{\partial x}{\partial s} - v\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

は（第9節 IV. により）$O_0$ から $O$ に向かうどの曲線に及ぶものも同じ値を保ち、$O_0$ を固定点とみなせば、必然的に孤立点を除いて連続な $x, y$ の関数 $U$ をなし、その微分商は（しかも5）により各点で）$\dfrac{\partial U}{\partial x} = u$ , $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -v$ となる。これらの値を $u$ と $v$ に代入することによって仮定 1), 3), 4) は第10節最後の定理の条件に変わる。関数 $U$ は、それゆえ、そのすべての微分商と共に $T$ の全ての点で有限かつ連続で、したがって、同じことが複素関数 $w = \dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}i$, および $z$ に関してとったその微分商に対しても成り立つ。

## 13.

ここで、第12節の他の仮定は守られているとして、面の内部にある定点 $O'$ に点 $O$ が無限に近づくとき $(z - z')w = \varrho e^{\varphi i}w$ がもはや無限小とはならないと仮定すれば、何が起きるか研究しよう。この場合、$w$ は、$O$ が $O'$ へ無限に近づけば、無限に大きくなることになる。そこで、われわれは量 $w$ が $\dfrac{1}{\varrho}$ と同じ位数に留まる、すなわち、2つの量の商が有限な極限に近づくことがないときにも、少なくとも2つの量の位数は、互いに有限な比にあり、$\varrho$ のある冪を決めることができて、$w$ とその冪の積は、無限小の $\varrho$ に対し無限小になるか、有限のままでいると仮定する。$\mu$ がその冪

指数であり、$n$ が次に大きな整数であるなら、量 $(z-z')^n w = \varrho^n e^{n\varphi i} w$ は $\varrho$ と共に無限小になり、それゆえ、$(z-z')^{n-1}w$ は $z$ の関数である（$\dfrac{d(z-z')^{n-1}w}{dz}$ が $dz$ によらないから）。この関数は、この面部分で第12節の仮定を満たし、したがって点 $O'$ で有限かつ連続である。点 $O'$ での値を $a_{n-1}$ と表すならば、$(z-z')^{n-1}w - a_{n-1}$ はこの点で連続で $=0$ であり、したがって、$\varrho$ とともに無限小になる関数である。これから第12節によって $(z-z')^{n-2}w - \dfrac{a_{n-1}}{z-z'}$ は点 $O'$ で連続な関数であると結論づけられる。この処理を続けることによって $w$ は明らかに

$$\frac{a_1}{z-z'} + \frac{a_2}{(z-z')^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{(z-z')^{n-1}}$$

の形の式を引き算して点 $O'$ で有限かつ連続になる関数に変えられる。

したがって、第12節の仮定の下で、面 $T$ の内部で $O$ が $O'$ に無限に近づくとき、関数 $w$ が無限に大きくなるという変更があれば、この無限大の位数は（距離の逆比で増加する量を1位の無限大とみなして）、それが有限であるならば、必然的に整数であり、そして、この数が $=m$ であれば、関数 $w$ は、$2m$ 個の任意定数を含む関数を付け加えることによって、この点 $O'$ で連続な関数に変えられる。

注. ある関数が1つの任意定数を含むとは、それを決定する可能なあり方が1次元の連続領域となることをいう。

## 14.

第12節と第13節で面 $T$ についてした制約は、得られた結果がなりたつためには本質的でない。明らかに、任意の面の内部にある各点は前節で仮定した性質をもつ成分で取り囲むことができる。ただ一つの例外はこの点が面の旋回点である場合である。

この場合を調べるために、$(n-1)$ 位の旋回点 $O'$ を含む面 $T$、またはその任意の成分を考え、そこでは $z=z'=x'+y'i$ とし、関数 $\zeta=(z-z')^{\frac{1}{n}}$ を用いて別の面 $\Lambda$ の上に写像する。すなわち、われわれは関数 $\zeta=\xi+\eta i$ の、点 $O$ での値をこの平面で直交座標 $\xi$, $\eta$ をもつ点 $\Theta$ と考え、$\Theta$ を点 $O$ の像とみなす。このようにして、面 $T$ のこの部分の像として $\Lambda$ の上に拡げられた連結面を得る。すぐ後で示すように、この面は点 $O'$ の像である点 $\Theta'$ に旋回点をもたない。

表現を固定するために、平面 $A$ の点 $O^{[I]}$ のまわりに描いた半径 $R$ の円と、$x$-軸と平行に引かれ、そこでは $z-z'$ が実数値を取る直径を考える。$R$ が十分小さく選ばれているならば、この円によって区切られた旋回点を囲む面 $T$ の部分は、このとき、直径の両側で $n$ 個の分離して広がる半円形の面部分に分解される。$y-y'>0$ となる直径の側にあるこの面部分を $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\cdots a_n$ と表し、反対側では $a'_1$, $a'_2$, $a'_3$, $\cdots a'_n$ と表す。そして $z-z'$ の負の値に対し $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\cdots a_n$ はこの順に $a'_1$, $a'_2$, $a'_3$, $\cdots a'_{n-1}$ と結ばれ、正の値に対しては、これとは違って、$a'_n$, $a'_1$, $a'_2$, $\cdots a'_{n-1}$ と結ばれていると仮定し、点 $O'$ の周囲を（決った向きに）回る点は順番に面 $a_1$, $a'_1$, $a_2$, $a'_2$, $\cdots a_n$, $a'_n$ を走り抜け、$a'_n$ からは再び $a_1$ に戻ってくるとする。この仮定は明らかに許される。今、2つの平面に極座標を導入し、$z-z'=\varrho e^{\varphi i}$ , $\zeta=\sigma e^{\psi i}$ と置く。面部分 $a_1$ の像として $(z-z')^{\frac{1}{n}}=\varrho^{\frac{1}{n}}e^{\frac{\varphi}{n}i}$ の後の式で $0\le\varphi\le\pi$ をとる値を選ぶならば、$a_1$ のすべての点に対して $\sigma\le R^{\frac{1}{n}}$ かつ $0\le\psi\le\frac{\pi}{n}$ となる。面 $\Lambda$ でのこの像は $\Theta'$ の周りの半径 $R^{\frac{1}{n}}$ で描かれた円の $\psi=0$ から $\psi=\frac{\pi}{n}$ まで拡がる扇形全体と一致する。しかも、$a_1$ の各点にはこれと同時に連続に動く扇形の一点が対応し、逆もなりたつ。これから、面 $a_1$ の像がこの扇形の上に単連結に拡げられた面であることがわかる。同じように面 $a'_1$ には像として $\psi=\frac{\pi}{n}$ から

$\psi = \frac{2\pi}{n}$ まで、$a'_2$ には $\psi = \frac{2\pi}{n}$ から $\psi = \frac{3\pi}{n}$ まで、最後に $a'_n$ には $\psi = \frac{2n-1}{n}\pi$ から $\psi = 2\pi$ まで拡がった扇形を得る。$\varphi$ をこの面のすべての点に対して順番に $\pi$ と $2\pi$ の間、$2\pi$ と $3\pi$ の間、$\cdots$、$(2n-1)\pi$ と $2n\pi$ の間に選ぶ。これは、つねに一通りの方法でのみ可能である。これらの扇形は、面 $a$ と $a'$ と同じ順番に互いにつながっていて、しかも、こちらで接合する点はむこうでも接合する点と対応するようになっている。それゆえ、これらの扇形は、面 $T$ の点 $O'$ を囲む成分の連結した像に結合され、そしてその像は、明らかに平面 $\Lambda$ の上に一重に拡げられた面になる。

各点 $O$ に対して特定の値を持つ変量は、各点 $\Theta$ に対しても特定の値をもち、逆もなりたつ。各 $O$ にはただ一つの $\Theta$、そして各 $\Theta$ にもただ一つの $O$ が対応するからである；さらに、これが $z$ の関数ならば、それは $\zeta$ の関数でもある。というのは、$\dfrac{dw}{dz}$ が $dz$ に依存しないならば、$\dfrac{dw}{d\zeta}$ も $d\zeta$ に依存せず、逆も成り立つからである。これから、$z$ の関数 $w$ にはすべて、旋回点 $O'$ でも、これを $(z-z')^{\frac{1}{n}}$ の関数とみなせば、第12節と13節の命題を適用できることがわかる。こうして次の命題が得られる：

$z$ の関数 $w$ が、$O$ の $(n-1)$ 位の旋回点 $O'$ への無限接近の際、無限になれば、その無限大は必然的に距離の冪に等しい位数のものであり、その指数は $\dfrac{1}{n}$ の倍数である。この指数が $-\dfrac{m}{n}$ であれば、

$$\frac{a_1}{(z-z')^{\frac{1}{n}}} + \frac{a_2}{(z-z')^{\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{a_m}{(z-z')^{\frac{m}{n}}}$$

の形の式を付け加えることによって点 $O'$ で連続な関数に変えることができる。ここで、$a_1$, $a_2$, $\cdots a_m$ は任意の複素量である。

この命題は、その系として、関数 $w$ について点 $O$ が $O'$ へ限りなく近づくとき $(z-z')^{\frac{1}{n}}w$ が無限に小さくなるならば、$w$ は $O'$ で連続であることを含んでいる。

## 15.

ここでわれわれは $A$ の上に拡げられた任意の面 $T$ の各点 $O$ に対しある特定の値を持ち、いたるところで定数ではないような $z$ の関数を考える。幾何学的に表現すれば、点 $O$ での値 $w = u + vi$ は平面 $B$ の直交座標が $u$, $v$ である点 $Q$ によって表される。このとき、次が得られる：

I.　点 $Q$ の全体は面 $S$ を形成するとみなし得る。その中の各点にはそれと共に $T$ の中を連続に動く点 $O$ が対応する。

これを証明するには、明らかに点 $Q$ の位置が点 $O$ の位置と共に必ず（しかも、一般には、連続に）変化するという証明のみが必要である。これは以下の命題に含まれる。

$z$ の関数 $w = u + vi$ は、それがいたるところで定数でなければ、1つの曲線にそって定数ではあり得ない。

証明: $w$ が1つの曲線にそって定数値 $a + bi$ をもつとすれば、$u - a$ と $\dfrac{\partial(u-a)}{\partial p}\left(= -\dfrac{\partial v}{\partial s}\right)$ はこの曲線に対して、そして

$$\frac{\partial^2(u-a)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u-a)}{\partial y^2}$$

はいたるところで $=0$ となる。それゆえ、第11節の I. により $u-a$、そして

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ゆえ $v-b$ もいたるところで $=0$ でなければならないが、これは仮定に反する。

II. I. での仮定の結論として、$S$ の部分の間では対応する $T$ の部分が連結しなければ連結することはない；逆に、$T$ で連結していて、$w$ が連続ならば、面 $S$ での対応する連結はいつも保存される。

これを仮定すれば、$S$ の境界は、一部は $T$ の境界に、他は不連続個所に対応する；その内部は、孤立点を除いて、いたるところ $B$ の上に単一に拡げられている。すなわち、重なり合う部分の分裂はどこにも起きず、折り返しもどこにも起きない。

前者が起こり得るのは、$T$ には常に対応する連結性があるため、$T$ に分裂が起きる — これは仮定に反する — ときに限られることになる；後者はこの後に証明する。

最初に、$\dfrac{dw}{dz}$ が有限である点 $Q'$ は面 $S$ の折り目にあり得ないことを証明する。

実際、$Q'$ に対応する点 $O'$ を任意の形と不定の大きさの面 $T$ の部分で囲む。(第3節により）対応する $S$ の部分の形は任意に少ししか違わないように、この大きさをいくらでも小さく取れるので、これをごく小さくして、その部分の境界が平面 $B$ から $Q'$ を取り囲む成分を分離するようにすることができる。しかし、これは $Q'$ が面 $S$ の折り目にあるならば不可能である。

さて、I. によれば、$\dfrac{dw}{dz}$ は、$z$ の関数として、孤立点でだけ $=0$ となり得る。そして、$w$ は考慮している $T$ の点で連続であるので、この面の旋回点でだけ無限大になる；したがって、等々。証明終

III. 面 $S$ は、したがって、第5節で $T$ に対してしたような仮定が成り立つ面である；この面では各点 $Q'$ に対し不定量 $z$ が1つの特定の値を持つ。この値は、$Q$ の位置と共に連続に、かつ $\dfrac{dz}{dw}$ が位置変化の方向と独立であるように変化する。それ故、$z$ は以前に確定した意味で、$S$ によって表される領域の複素変量 $w$ の連続な関数となる。

ここから、さらに[次が]従う：

$O'$ と $Q'$ を面 $T$ と $S$ の対応する2つの内点とし、そこでは $z=z'$、$w=w'$ とする。このときどちらも旋回点でなければ、$O$ が $O'$ に無限に近づくとき $\dfrac{w-w'}{z-z'}$ は有限な極限に近づき、その写像はそこの極小部分で相似である。しかし、$Q'$ が $(n-1)$ 位の旋回点、$O'$ が $(m-1)$ 位の旋回点であれば、$\dfrac{(w-w')^{\frac{1}{n}}}{(z-z')^{\frac{1}{m}}}$ が $O$ の $O'$ への無限接近に際して有限な極限に近づく。接合した面部分に対しては第14節から容易にわかるある写像の形が起きる。

* * *

### 16. (5)

定理　$\alpha$, $\beta$ を $x$, $y$ の任意の2つの関数であって、$A$ の上に拡げられた任意の面 $T$ のすべての部分にわたる積分

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$$

が有限な値をもつものならば、この積分は、$\alpha$ を連続または孤立点でのみ不連続な関数で境界で $=0$ であるものだけ変えるとき、常にこのような関数の中の1つに対して最小値をとる。しかも、孤立点での変更によって除き得る不連続性を除外するならば、ただ1つの関数に対してのみとる。

$\lambda$ でもって連続または孤立点でのみ不連続な不定の関数であって、境界で $=0$、かつ面全体にわたる積分

$$L=\int\left(\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right)dT$$

が有限な値を取るものを表し、$\omega$ でもって関数 $\alpha+\lambda$ の不定の1つを、最後に面全体に及ぶ積分

$$\int\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$$

を $\Omega$ で表す。関数 $\lambda$ 全体は連結閉領域を形作る。すなわち、この関数のどれもは他のどの関数にも連続に移って行ける。しかし $L$ が無限になることなしに曲線にそって不連続な関数に無限に近づくことはできない（第17節）。さて、各 $\lambda$ に対して $\omega=\alpha+\lambda$ と置くと $\Omega$ は有限な値をとる。この値は $L$ と同時に無限になり、$\lambda$ の形と共に連続に変化するが、決して0以下に下がることはできない。したがって、$\Omega$ は少なくともある形の関数 $\omega$ に対して最小値をとる。

定理の第2の部分を証明するために、$u$ を $\Omega$ に最小値を与える関数 $\omega$ の1つであるとし、$h$ を面全体で定数の不定量とする。このとき、$u+h\lambda$ は関数 $\omega$ を規定する条件をみたす。$\omega=u+h\lambda$ に対する $\Omega$ の値は

$$\begin{aligned}&=\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT\\&+2h\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right]dT\\&+h^2\int\left(\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right)dT=M+2Nh+Lh^2\end{aligned}$$

になるが、これはどの $\lambda$ に対しても（最小の意味するところより）、$h$ を十分に小さくとる限り、$M$ より大きくならなければならない。したがって、どの $\lambda$ に対しても $N=0$ であることが必要となる。なぜなら、そうでない場合には

$$2Nh+Lh^2=Lh^2\left(1+\frac{2N}{Lh}\right)$$

は、$h$ を $N$ と反対の符号をとり、符号を無視して $<\dfrac{2N}{L}$ とすれば、負になるからである。$\omega=u+\lambda$ に対する $\Omega$ の値は、可能なすべての $\omega$ の値は明らかにこの形に含まれるのであるが、それゆえ、$=M+L$ になり、$L$ は本質的に正ゆえ、$\Omega$ は、したがって、どのような形の関数 $\omega$ に対しても $w=u$ に対する値より小さい値を取ることができない。

さて、関数 $\omega$ として別の $u'$ に対して $\Omega$ の極小値 $M'$ が実現されたとすれば、明らかにこれについても同じことが成り立たなくてはならない。故に $M'\leq M$、$M\leq M'$、したがって、$M=M'$ が成り立つ。そこで、$u'$ を $u+\lambda'$ の形にすれば、$M'$ として式 $M+L'$ を得る。ここ

で、$L'$ は $\lambda = \lambda'$ に対する $L$ の値を表す。等式 $M = M'$ から $L' = 0$ が得られる。これが可能なのはすべての面部分で

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \lambda'}{\partial y} = 0$$

であるときのみである。故に、$\lambda'$ が連続である限り、この関数は必然的に定数となり、したがって、境界で $= 0$ かつ曲線にそっては不連続でないので、たかだか孤立点でのみ 0 と異なる値を持つ。$\Omega$ に極小値を与える 2 つの関数 $\omega$ は、それゆえ、孤立点でのみ互いに異なり、孤立点での変更によって除去可能な不連続が排除されている関数 $u$ の中では完全に一致する。

## 17.

ここで、$\lambda$ が、$L$ を有界にしたまま、ある曲線にそって不連続な関数 $\gamma$ に無限に近づくことはできないという証明を付け加えておこう。すなわち、関数 $\lambda$ は、不連続性曲線を囲んでいる面部分 $T'$ の外で $\gamma$ と一致するという条件に従わせ、$T'$ をいくらでも小さくとれば、$L$ を任意に与えられた量 $C$ より大きくすることができる。

$s$ と $p$ を不連続性曲線に関してこれまでの意味にとったものとし、不定の $s$ に対して、$p$ の正の側に凸な曲線の曲率を正とみなす曲率を $\kappa$ によって、$T'$ の境界で正の側での $p$ の値を $p_1$ によって、負の側での値を $p_2$ によって表し、$\gamma$ の対応する値を $\gamma_1$、$\gamma_2$ によって表す。今、この曲線の連続に曲がった部分を 1 つ考えるならば、端点での法線の間に含まれる $T'$ の部分は、それが曲率中心まで延びていないとき、$L$ について

$$\int ds \int_{p_2}^{p_1} dp(1-\kappa p)\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right)^2 \frac{1}{(1-\kappa p)^2}\right];$$

という寄与を与える；式

$$\int_{p_2}^{p_1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)^2 (1-\kappa p)dp$$

の最小値は、$\lambda$ の境界値 $\gamma_1$ と $\gamma_2$ を固定したとき、既知の法則により

$$= \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \kappa}{\log(1-\kappa p_2) - \log(1-\kappa p_1)}$$

となることがわかる。したがって、$\lambda$ が $T$ の内部でどのようにとられようとも、

$$> \int \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \kappa ds}{\log(1-\kappa p_2) - \log(1-\kappa p_1)}$$

という寄与は必然になる。もし $(\gamma_1 - \gamma_2)^2$ が $\pi_1 > p_1 > 0$ と $\pi_2 > p_2 > 0$ に対して取ることのできる最大値が $\pi_1 - \pi_2$ と共に限りなく小さくなるとするならば、関数 $\gamma$ は $p = 0$ で連続になることになる；したがって、$s$ のどのような値に対しても有限な量 $m$ をとって、$\pi_1 - \pi_2$ がどのように小さくとられたとしても、$\pi_1 > p_1 \geq 0$ と $\pi_2 < p_2 \leq 0$（ここで等号は共に除く）で表される限界内に $(\gamma_1 - \gamma_2)^2 > m$ となる $p_1$ と $p_2$ の値が得られるようにすることができる。更に、前の制

限の下に $T'$ の形を任意にとり、$p_1$ と $p_2$ に特定の値 $P_1$ と $P_2$ を与え、そして、不連続性曲線の問題としている部分にわたる積分

$$\int \frac{m\kappa ds}{\log(1-\kappa P_2)-\log(1-\kappa P_1)}$$

の値を $a$ によって表せば、明らかに

$$\int \frac{m\kappa ds}{\log(1-\kappa p_2)-\log(1-\kappa p_1)} > C$$

とすることができる。ただし、ここで $p_1$ と $p_2$ を $s$ のすべての値に対して不等式

$$p_1 < \frac{1-(1-\kappa P_1)^{\frac{a}{C}}}{\kappa}\ ,\ p_2 > \frac{1-(1-\kappa P_2)^{\frac{a}{C}}}{\kappa} \quad \text{かつ} \quad (\gamma_1-\gamma_2)^2 > m$$

を満たすようにとる。これより結論として、$\lambda$ が $T'$ の内部でどうであっても、問題の $T'$ の部分に基づく $L$ の部分は、したがって、$L$ 自体は当然 $> C$ となる。　証明終(6)

18.

第16節により、そこで確定した関数 $u$ と関数 $\lambda$ の勝手な1つに対して面 $T$ の全体にわたる[積分]

$$N = \int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right]dT$$

は $=0$ となる。この等式からその他の結論を導き出そう。

面 $T$ から $u$、$\beta$、$\lambda$ の不連続個所を囲んでいる部分 $T'$ を切り離し、残りの部分 $T''$ に由来する $N$ の部分[を考えると]、$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\lambda$ を $X$、$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\lambda$ を $Y$ と置いて第7節、第8節の助けを借りれば、

$$= -\int \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dT - \int\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)\lambda ds$$

であることがわかる。関数 $\lambda$ に課せられた境界条件により[積分]

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)ds$$

の $T$ と共通の $T''$ の境界成分に関わる部分は 0 に等しいから、$N$ は $T''$ に関する積分

$$-\int \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dT$$

と $T'$ に関する[積分]

$$\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right]dT+\int\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)\lambda ds$$

からなるとみなされる。

今、$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ が面 $T$ のどこかある部分で 0 と異なっていたとするなら、明らかに $N$ もまた 0 と異なる値を持つことになる。$\lambda$ は任意ゆえ、$T'$ の内部で $=0$ で、$T''$ の内部では $\lambda\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ がいたるところ同符号を持つように選べるからである。ところで、$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ が $T$ のすべての部分で $=0$ なら、$T''$ に由来する $N$ の構成成分はすべての $\lambda$ に対して消え、条件 $N=0$ は不連続部分に関する構成成分が 0 になることになる。

それゆえ、関数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial \beta}{\partial y}$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial \beta}{\partial x}$ に対して、前者を $=X$、後者を $=Y$ と置けば、単に一般に等式

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

が成り立つというだけでなく、$T$ の部分が何であってもその境界全体に及ぶ[積分]

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds=0$$

となる。ただし、この式が一般に確定値を持つとする限りであるが。

それゆえ、面 $T$ が多重連結であるとき、(第9節 V. により) $T$ を横断線によって単連結面 $T^*$ に分解すれば、積分

$$-\int_{O_0}^{O}\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)ds$$

は $T^*$ の内部で $O_0$ から $O$ へ向かうどの曲線に対しても同じ値を持ち、$O_0$ を固定して考えれば、$x,\ y$ の関数となる。この関数は $T^*$ でいたるところ連続であり、1つの横断線に沿ってその両側で同じ変化を受ける。この関数 $\nu$ を $\beta$ を加えた $v=\beta+\nu$ は、微分商が

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

となる関数を与える。

それゆえ、次が成り立つ。

定理　横断線によって単連結面 $T^*$ に分解されている連結面 $T$ の上に $x,\ y$ の複素関数 $\alpha+\beta i$ が与えられており、面全体にわたる[積分]

$$\int\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$$

が有限の値を持つならば、常にただ一通りに、$x, y$ の関数 $\mu+\nu i$ を加えて、次の条件を満たす $z$ の関数に変えることができる：

1) $\mu$ は境界で $=0$ であるかまたは孤立点でのみそれと異なっていて、$\nu$ は1つの点で任意に与えられる；

2) $T$ における $\mu$ の変更、$T^*$ における $\nu$ の変更は孤立点でのみ、不連続は面全体に及ぶ［積分］

$$\int\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right]dT \quad と \quad \int\left[\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)^2\right]dT$$

が有限にとどまる程度であり、後者 [$=\nu$ の不連続] は[各]横断線に沿って両側で等しい。

この条件が $\mu+\nu i$ を決定するのに十分であることは、$\mu$ が常に積分 $\Omega$ の最小値を与え、したがって、$u=\alpha+\mu$ と置けばどの $\lambda$ に対しても $N=0$ となることから従う。これは第16節によりただ1つの関数に対してのみなりたつ性質である。[他方] $\nu$ は $\mu$ から加算する定数の差を除いて決まる。

19.

前節最後の定理を基礎とする原理は、特定の複素変量の関数を（この関数の表示式に依存することなく）研究する道を開く。

この分野への方向づけのために、与えられた量領域の中でそのような関数を決定するのに必要な条件の範囲についての見積もりが役に立つであろう。

始めに、これらの量領域を表現するための $A$ の上に拡げられた面が単連結であるという特別の場合に制限すれば、$z$ の関数 $w=u+vi$ は次の条件に応じて定められる:

1) $u$ に対してはあらゆる境界点で1つの値が与えられて、その値は無限小の位置変化に対して同じ位数の無限小量だけ、しかし、それ以外は任意に、変化する*；

2) $v$ の値はある1つの点で任意に与えられる；

3) この関数はあらゆる点で有限かつ連続でなければならない。

これらの条件によってこの関数は完全に決まる。

実際、常に可能であるように、$\alpha+\beta i$ を $\alpha$ は境界で与えられた値に等しく、面全体で無限小の位置変化に対して、$\alpha+\beta i$ の変化が同じ位数の無限小であるように決めれば、これは前節の定理から従う。

このように、一般に、$u$ は境界で $s$ の全く任意の関数として与えることができ、これによって $v$ はいたるところで決まる；しかし、逆に $v$ もあらゆる境界点で任意に取ることができ、それから $u$ の値が従う。境界での $w$ の値の選択の場所は、それゆえ、各境界点に対して1次元の多様体をなし、完全な決定には、各境界点に対して1つの方程式を必要とする。この際、これらの方程式の各々が1つの境界点での1項の値とのみ関連していることは本質的でない。この決定が、各境界点に対して点の位置と共にその形が連続に変化するような両方の項を含む方程式によって与えられることも、あるいは、同時に境界のいくつかの部分に対して、これらの部分の1つの各点に対して他の部分の各々から1つの、特定の $(n-1)$ 個の点が仲間となり、このような $n$ 点ごとに共通の、位置とともに連続に変わる $n$ 個の方程式が与えられることもあり得る。これらの条件、この全体は1

*本来、この値の変化は、境界の一部分にそって不連続でないという制限にのみ従えばよい：それ以上の制約はここでは不必要な冗長さを避けるためだけになされる。

つの連続な多様体を作り、任意関数の間の方程式として表現できるのであるが、これが、量領域の内部でいたるところ連続[かつ極小部分で相似な]関数を決定するために許容されかつ十分であるためには、一般にはなおある制限、すなわち2，3の条件方程式 — 任意定数に対する方程式 — による補足を必要とする。われわれの見積もりの正確さは明らかにそこまでは及ばない。

量 $z$ の変化する領域が多重連結面で表される場合に対してもこれらの考察は本質的な変更をうけない。すなわち、第18節の定理を適用することによって、横断線を超えるときの変化を除けば、そこで得たのと全く同様の関数が得られる。— この変化は、境界条件が横断線の数と同じ個数の自由にできる定数を持っているときは $=0$ とすることができる。

内部で1つの曲線に沿って連続性が放棄される場合は、この曲線を面の横断とみなせば、前の場合に帰着できる。

最後にある孤立点で連続性がなりたたないとき、したがって第12節により関数が無限になることが許されるときは、われわれが初めにこの点についてなしたその他の仮定がそのまま成り立つとすれば、$z$ の関数であって、決定すべき関数からこれを引き算すれば連続になるようなものを任意に与えることができる；ところが、これによって求める関数は完全に決まる。なぜなら、量 $\alpha+\beta i$ を、不連続点のまわりで描かれた任意の小さな円ではこの与えられた関数と等しくとり、それ外では前の処方に従ってとれば、この円上に拡げられた積分

$$\int\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right)dT$$

は $=0$ になり、残りの部分の上に拡げられたものは有限量に等しくなる。故に、前節の定理を適用することができ、こうして求める性質をもつ関数を得る。第13節の定理によれば、これから一般に、孤立不連続点で関数が位数 $n$ の無限大になることが許されれば、$2n$ 個の定数を自由に規定できることが推論できる。

（第15節に従って）幾何学的に表現すれば、2次元の与えられた量領域の内部を動く複素変量 $z$ の関数 $w$ は与えられた $A$ を覆うある面 $T$ から、孤立点を除外して極小部分でこれと相似の、$B$ を覆う像 $S$ を与える。ちょうど関数の決定に必要十分であることが示された条件は境界点あるいは不連続点での関数の値に関連している；それゆえ、これらの条件はすべて $S$ の境界の位置に対する条件として現われ（第15節)、各境界点に対して1つの条件方程式を与える。それらの各々が1つの境界点のみと関連しているならば、それらは、各境界点に対してその1つ[の曲線]が幾何学的な場所を形作るような曲線群によって表現される。互いに連続に移る2つの境界点が共通に2つの条件方程式に従うならば、これによって2つの境界部分の間に、一方の位置が任意に取られるとき他方の位置がそれによって定まるという従属がおこる。同様に別の形の条件方程式に対しては[また別の]幾何学的な意味が生ずるが、われわれはこれ以上追求しない。

## 20.

数学における複素量導入の起源と直接の目標は、量演算によって表された変量間の簡単な* 従属法則の理論にある。すなわち、この従属法則をより広い範囲に適用し、これに関連する変量に複素数値を与えるならば、それまで隠されていた調和と規則性が現れる。これが実行された場合は、確かに今のところようやく小さな領域をなすにすぎない — ほとんどは2変量間の従属法則で、1つの

*ここで、加減乗除と微分積分とを基本演算とみなす。従属性を表す基本演算が少なければ少ないほど、その従属法則は単純なものとみなす。事実、これらの演算を有限回行なうことで、これまで解析学に用いられてきたあらゆる関数が定義される。

変量が他の変量の代数[1] 関数であるか、あるいは微分商が代数関数になる関数であるものに還元できる — しかし、ここでなされたほとんどどの進歩も、単に複素量の助けなしに得られた結果をより簡単で完結した形を与えたというに止まらず、更に新しい発見への道を拓いてきた。代数関数、円関数あるいは指数関数、楕円関数およびアーベル関数の研究の歴史がその証拠を提供する。

われわれの研究によってそのような関数の理論について何が得られるかを簡潔に予告しておこう。

これらの関数を取り扱う従来の方法は、常に定義として変数の各々の値に対してその値を与える表示式を基礎としていた；われわれの研究では、1複素変量の関数の一般的性質の結果として、この種の定義で一部の決定要素は他の部分から導かれ、決定要素の範囲が決定のために必要な部分に還元されることが示される。これはこれらの関数の取り扱いを本質的に単純化する。例えば、同じ関数の2つの表示式の同一性を証明するには1つの式をもう1つの式に変形しなければならなかった。すなわち、両者が変量のあらゆる値について一致することを示されなければならなかったが、今では、はるかに小さい範囲で一致することを示せば十分である。

ここに与えられた基礎の上に立つこれらの関数の理論は関数の形（すなわち、変数の各々の値に対するその値）を、量演算によって関数値を決めることとは独立に規定することになるだろう。すなわち、1複素変量関数の一般の概念と合わせて、関数の決定に必要な特徴だけが付け加えられる。そうして初めてその関数が取りうる異なる表示式に移る。同じように量演算によって表現される関数属の共通の性質はそれらに課される境界条件や不連続条件の形に表現される。例えば、量 $z$ の変域が全無限平面 $A$ の上に一重にまたは多重に拡げられており、この中で関数は孤立点でのみ不連続性をもち、しかも、有限位数の無限大だけが許されるとすれば、（このとき、無限大の $z$ に対しては、この量自身が、有限の値 $z'$ に対しては $\dfrac{1}{z-z'}$ が1位の無限量となる）この関数は必然的に代数的であり、逆にどの代数関数もこの条件をみたす。

この理論を仕上げることは、これはすでに注意したように量演算によって条件付けられた簡単な従属法則を明らさまに特定することになるのであるが、今はしない。われわれは現在、関数の表示式の考察には関与していないからである。

同じ理由から、ここでは、われわれの命題[=主張]がこの従属法則の一般理論の基礎として有用であることを示すことにも関わらない。それには、ここで基礎とした複素一変量関数の概念が量演算によって表現される従属性[2] の概念と完全に一致することの証明が必要になるだろう。(7)

## 21.

われわれの一般的な命題[=主張]を明確にするには、しかしながら、これを実行した適用例が役立つであろう。

前節で示したこの命題[=主張]の適用は、これを提出して最初に企てられたものであるとはいうものの、まだ特殊なものにすぎない。というのは、従属性が、そこで基本演算とみなした有限個の量演算に制限されていれば、その関数は有限個のパラメーターしかもたず、その決定について十分な条件は、互いに独立な境界条件と不連続条件の系とするときその形が何であれ、ある曲線にそって各点で任意に決められる条件ということには決してならないという結果になる。それゆえ、現在のわれわれの目的のためには、そこで引用してきた例より、むしろ複素変数関数が任意の関数に依存するものを選ぶ方がより適切と思われる。

---

[1]すなわち、2つの変量間に代数方程式が成り立つ。

[2]これを4つの単純な算術的演算、加法、減法、乗法、除法を有限回あるいは無限回用いて表すことのできる従属性と理解する。量演算という表現は（数演算とは対照的に）このような演算を意味する。この際、量の通約性は考慮されない。

実物教示とより良い理解のためにわれわれはこれに第19節の最後で用いた幾何学的表現法を与える。そうすれば、これは、与えられた面から連結して[=連続に]、極小部分では相似に、かつ与えられた形の像に写す可能性に関する研究になる。そこでは、前述の形に表現すれば、像の各境界点に場所[を示す]曲線が、その曲線に対してはその上、境界の意味（第5節）が、そして像の旋回点が与えられているとする。われわれはこの問題の解決を面の各点に他の面の1点だけが対応し、面が単連結である場合に限って行う。この場合、これは次の定理に含まれる。

与えられた2つの平らな単連結面は常に互いに関連付けて、これにより1つの面の各点に対してそれと共に連続に動くもう1つの面の1点を対応させ、かつ対応する極小部分が相似であるようにすることができる；しかも、1つの内点と1つの境界点に対して、対応する点を任意に与えることができる；そして、これによってすべての点に対し関連する点が決定される。

2つの面 $T$ と $R$ が対応する極小部分で相似性が成り立つように第3の面 $S$ と関連付けられるならば、これから面 $T$ と $R$ の間の関連ができ、これに対しても明らかに同じ事が成り立つ。任意の2つの面を極小部分で相似性が成り立つように関連付ける問題は、こうして任意の面を1つの固定した面に極小部分で相似に写す問題に帰結される。したがって、定理を証明するには、平面 $B$ の中で $w=0$ である点のまわりに半径1の円 $K$ を描いて、$A$ を覆う任意の単連結面 $T$ が円 $K$ の上に連結して[=連続に]、かつ極小部分で相似なように写像されること、しかも、任意に与えられた内点 $O_0$ を中心に、面 $T$ の任意に与えられた境界点 $O'$ を円周上の任意に与えられた点に対応させるようにただ一通りの仕方でできることを示せば十分である。

われわれは、$z, Q$ の点 $O_0, O'$ での特別の意味を対応する添字で表し、$T$ に $O_0$ を中心として勝手な円 $\Theta$ を描く。これは $T$ の境界まで拡がっていないとし、また旋回点を含んでいないとする。極座標を導入し、$z-z_0=re^{\varphi i}$ と置くと、関数 $\log(z-z_0)=\log r+\varphi i$ となる。この関数の実数値は、それが無限大になる $O_0$ を除く全円上で連続に変化する。一方、虚数値は、いたるところで $\varphi$ の可能な値のうちで最小の正の値が選ばれるとするならば、$z-z_0$ が正の実数値を取る半径にそって、片側では値 0 を、もう一方の側では値 $2\pi$ をとる。しかし、その他の点では連続に変化する。明らかに、この半径は、中心から円周に向かって引かれた任意の曲線 $l$ に取り替えることができ、そのとき関数 $\log(z-z_0)$ は点 $O$ がこの曲線の負の側（すなわち、第8節によれば $p<0$ のところ）から正の側に越えるときに $2\pi i$ だけ突然に減少する。しかし、その他のところでは全円 $\Theta$ でその位置と共に連続に変化する。さて、$x, y$ の複素関数 $\alpha+\beta i$ を円 $\Theta$ 上では $\log(z-z_0)$ に等しく、この円の外では、次の条件を満たすように取る；ただし、$l$ は任意に境界まで延長しておく：

1) $\Theta$ の周上では $=\log(z-z_0)$、$T$ の境界上では純虚になる、
2) 曲線 $l$ を負の側から正の側に越えたときに $-2\pi i$ だけ変化する。それ以外はどのような無限小の位置変化に際しても同じ位数の無限小量だけ変化する。

これはつねに可能である。そこで積分

$$\int\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right)dT$$

は $\Theta$ 上にわたるときは 0 の値をとり、その他の部分上では有限の値をとる。したがって、[18、19節の命題により、] 純虚の定数の差を除いて定まる境界上で純虚となる $x, y$ の連続関数を加えて、もとの関数は $z$ の関数 $t=m+ni$ に変えられる。この関数の実部 $m$ は境界で $=0$、点 $O_0$ では $=-\infty$ で、$T$ の他の点では連続に変化する。したがって、0 と $-\infty$ の間にある $m$ の値 $a$ に対し

て、$T$ は $m=a$ となる曲線によって、一方では $m<a$ となる $O_0$ を内部に含む部分と、$m>a$ となる他方の部分に分割される。後の部分の境界は、$T$ の境界と $m=a$ となる曲線によってつくられている。面 $T$ の連結位数はこの分割により変わらないか、あるいは下がる。この位数は $=-1$ なので、面は、したがって、連結位数 0 と $-1$ の 2 つの成分に分かれるか、または 2 つより多くの成分に分かれる。しかし、後のようなことはあり得ない。というのは、もしそうであれば、このような成分の少なくとも 1 つにおいて $m$ はいたるところ有界、連続で、しかも境界のあらゆる部分で定数でなければならない。したがって、面の一部で定数値を取るか、どこかで — 1 点または曲線にそって — 極大値または極小値を取らなくてはならない。これは第11節の III. に反する。故に $m$ が定数である点は、いたるところで単純な閉曲線を形作る。そしてこの曲線は点 $O_0$ を囲む成分の境界となる。しかも、$m$ はこの内部へ向かうとき減少する。これから、この曲線上で正の向きにまわるとき(第 8 節によれば $s$ が増加するとき)、$n$ は、連続である限り、常に増加することがわかる。また、$n$ は、線 $l$ を負から正の側に越えるときのみ $-2\pi$ だけ* の急な変化をうけるのであるから、0 と $2\pi$ の間のどの値とも、$2\pi$ の倍数を無視すれば、一度だけ等しくなる。さて $e^t=w$ とおけば、$e^m$ と $n$ は点 $Q$ の円 $K$ の中心に関する極座標である。点 $Q$ 全体はそのとき明らかに $K$ の上でいたるところ単一に拡げられた面 $S$ をなす；点 $Q_0$ は円の中心上に来る。また、点 $Q'$ はなお $n$ に残された自由な定数を用いて円周の任意に与えられた点に移すことができる。　証明終

点 $O_0$ が $(n-1)$ 位の旋回点である場合には $\log(z-z_0)$ を $\frac{1}{n}\log(z-z_0)$ におきかえれば、まったく同様の手続きによって目標に達する。これ以上詳しくは第14節をみれば容易に補える。

## 22.

前節の研究を、ある面の 1 つの点を他の面の多くの点に対応させる、あるいは面の単連結性を仮定しない一般の場合に完全に遂行することはここではしない。なぜなら、特に幾何学的観点から把握するとき、われわれの全研究はより一般的な形で行われるべきであるからである。平面上の、1 点を除いた、単葉な面に制限することは、この観点からは本質的でない；むしろ、任意に与えられた面を他の任意に与えられた面に極小部分では相似に写像するという問題に対し、全く類似の取り扱いをすることができる。これについては、ガウスの 2 つの論文、すなわち第 3 節で引用したものと「曲面についての一般論」の第13節を参照するように指示することで満足する。

*曲線 $l$ は、成分の内部にある点から外部にある点へ進むから、それがこの成分の境界を何度も切るときは、外から内より中から外へ進む方が一度多く、$n$ の突然の変化の総和は正の向きにまわるときにつねに $-2\pi$ である。

# 要　旨*



---

*この内容概要はほぼ完全にリーマンに由来する。

# 注　釈

(1) (1 ページ) リーマンの原稿の中にこの個所に関する次の補遺がある：

「境界 $z=a$ と $z=b$ の間で、量 $w$ が $z$ と共に連続に変化するという表現をわれわれは[次のように]理解する：この区間の中では $z$ のどのような無限小の変化にも、$w$ の無限小の変化が対応する。より分かりやすく表現すれば、任意に与えられた量 $\varepsilon$ に対して常に量 $\alpha$ を取って、$\alpha$ より小さい $z$ の区間の中では $w$ の2つの値の差が $\varepsilon$ より大きくなることはないようにすることができる。関数の連続性は、これによって、特にそのことが強調されていなくても、その関数の持続的有界性 (beständige Endlichkeit) を伴う。」

(2) (4 ページ) ここでは見落としがあったのでなければ、『左側から右側に』という表現が、普通とは反対の意味に使われている。静止点のまわりの回転の向きは、普通、中心点に立って回転する点を目で追う観察者の立場で判断される。

(3) (11ページ) (略)

(4) (13ページ) 公式

$$\int \frac{\partial u}{\partial p} ds = 0$$

は、積分

$$\int \left( u\frac{\partial u'}{\partial p} - u'\frac{\partial u}{\partial p} \right) ds$$

で $u'=1$ とすれば得られる。ここで、$u[, u']$ は第10節の仮定を満たしており、面成分の境界にわたるこの積分は消えるからである。

(5) (19ページ) 第16節の証明法は、リーマンによって後に (Theorie der Abel'schen Funktionen　本書第 VI 論文第3，第4の第1節) ディリクレの原理と名付けられた (ディリクレの講義に基づく)。ガウスも同様の推論を用いている (距離の2乗の逆比で作用する引力と斥力に関する一般定理、全集第5巻)。後にこの論法の有効性が攻撃された。特に、積分 $\Omega$ に対する最小値の存在の明白性に、正当にも、異議が唱えられた。この推論が証明に必要であった定理そのもの、これはリーマンの関数論的な仕事に彼特有の簡潔かつ一般的な特質を与えるものであるが、それ自体の正当性は新しい研究によって別の基礎の上に証明されている。(特に、H. A. Schwarz の包括的な労作、Monatsberichte der Berliner Akademie, 1870年10月、Journal f. Mathematik 74巻および全集と C. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential, Leipzig 1877; Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, 2. Auflage, Leipzig 1884 を参照せよ。)

(6) (22ページ) 以下の註はリーマンの手書きの遺品の中にあった第17節への草案をほとんど言葉通り借りてきたもので、半ばこの研究の解明に、半ば補足として役立つ。

$T'$ が有限の幅をもちさえすれば、値 $P_1$ と $P_2$ の内の1つはいつも $=0$ と取ることができる。それゆえ、われわれの証明は、不連続が境界の一部に沿って生じるとき、あるいは $\gamma$ を変えることによって内部の曲線に沿って生じるときに適用できる。そのため $m$ に必ずしも $p_1$ と $p_2$ の与えられた区間での $(\gamma_1-\gamma_2)^2$ の最小値そのものを代入することはない。

それゆえ、この証明は $\gamma$ が、例えば、不連続線の近くでの $\sin\frac{1}{p}$ の値のように、無限に多くの極大、極小を持つ場合にも適用できる。

同様に、$\lambda$ が関数 $\gamma$ に限りなく近づくとき、$L$ は全境界上で増加することが示される。ただし、関数 $\gamma$ は1点 $O'$ で、$O'$ のまわりの半径 $\varrho$ の円周の一部分で無限に小さい $\rho$ に対して $\varrho\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}$、$\varrho\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}$ が有限な極限に近づくか、あるいは無限大になる程度に不連続であるとする。

この場合、$\varrho$ の値 $R$ を、これ以下では

$$\varrho^2\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2\right]d\varphi$$

が 0 にならないように取れる。この区間でのこの量の最小値を $a$ によって表せば、$\varrho=R$ と $\varrho=r$ の間 (ここで $r<R$) に含まれる円環の $L$ への寄与は

$$\int_r^R d\varrho\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2\right]\varrho d\varphi>\int_r^R\frac{a}{\varrho}d\varrho>a(\log R-\log r).$$

したがって、$r=Re^{-\frac{C}{a}}$ を取れば、これは $>C$ となる。故に、$T'$ の境界として $\varrho<Re^{-\frac{C}{a}}$ となる円を選んだとすれば、残りの $T$ に由来する $L$ の部分、したがって $L$ 自体は、$\gamma$ が円の内部でどのように取られようとも、$>C$ となる。

(この研究ははじめ旋回点でも境界点でもない点に関わってきたが、[これらに拡張するときの]本質的な変化は、面が尖点を持つ、すなわち境界が逆行点を持つ[ためにできる]境界点に対してのみ受ける。しかし、$\gamma$ が到達できない不連続の程度の決定をすることは今と同じ原理に基づいている。したがって、この場合はスケッチだけで満足する。)

さて、$\lambda$ と $\gamma$ が異なっている面部分が無限に小さくなれば、不連続線の場合は $T'$ 自身が、不連続点の場合は $T$ の残りの部分が $L$ に対して無限の寄与を生じ、したがって、われわれの主張は、不連続性がここで仮定した程度に達していれば正当化される。この範囲でこれが成り立つことがわれわれにとって十分であり、実際上、これはより弱い不連続性、例えば、$\gamma$ が不連続点から $O$ までの距離 $\varrho$ について $=\left(\log\dfrac{1}{\varrho}\right)^{\mu}$ であり、$\mu<\frac{1}{2}$ であるときのような場合には成り立たないことがある。それゆえ、われわれは、第16節の命題の最初の部分に次の制限を加える：$\omega=\alpha+\lambda$ と置いた積分 $\Omega$ は関数 $\lambda$ の1つに対して最小を持つか、または $\Omega$ が最小の極限値に近づく間に $\lambda$ は 孤立点でのみ不連続点を取り、そのそばで $\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}$、$\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}$ が無限大になるときもその位数は単位に達しない。

関数 $\omega$ の1点での値の変化によって除かれる不連続も、例えば、面のどこかに点の穴、したがって孤立境界点があり、そこで $\lambda=0$ としなければならないようなときには、許さなければならない。

(7) (26ページ) (略)