

閉作用素から誘導される 2 × 2 作用素行列について

2 × 2 operator matrices induced by closed operators

九州芸術工科大学 太田 昇一 (Schôichi Ôta)
Department of Art and Information Design,
Kyushu Institute of Design

1. T をヒルベルト空間 \mathcal{H} 上稠密な定義域を持つ閉作用素とする。このとき、空間 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上の作用素 Θ_T を

$$\Theta_T = \begin{pmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する: すなわち

$$\mathcal{D}(\Theta_T) = \{ \xi \oplus \eta : \xi \in \mathcal{D}(T), \eta \in \mathcal{D}(T^*) \}$$

かつ,

$$\Theta_T(\xi \oplus \eta) = T^*\eta \oplus T\xi .$$

この作用素 Θ_T は必ず自己共役になることが示せる。特に、 T が対称の時、この Θ_T は Naimark の意味で、第 2 種の自己共役拡張になる (Naimark 自身による第 2 種の自己共役拡張の存在の証明は単純ではない) ことが示せる。この講演では、閉作用素 T から誘導される 2×2 作用素行列 Θ_T が常に自己共役になる事に注目して、いわゆる自己共役作用素の強可換性 (spectral projection が互いに可換) の概念を対称作用素に拡張することの可能性や、作用素 Θ_T 自身のもついくつかの性質等について報告します。

2. 閉作用素 T に対して、 $\rho(T)$ を T のレゾルベント集合とする。このとき、

$$\rho(\Theta_T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \rho(S^*S) \cap \rho(SS^*) \}.$$

$\lambda \in \rho(T)$ に対して, T のレゾルベントを $R(\lambda, T)$ と書くことにする;
 $R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$.

このとき, 各 $\lambda \in \rho(\Theta_T)$ に対して,

$$R(\lambda, \Theta_T) = \begin{pmatrix} \lambda R(\lambda^2, T^*T) & T^*R(\lambda^2, TT^*) \\ TR(\lambda^2, T^*T) & \lambda R(\lambda^2, TT^*) \end{pmatrix}$$

なることが簡単な計算で分かる.

3.

自己共役作用素 S と T が強可換の時, 任意の $\lambda, \nu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ に対して, $R(\lambda, T)$ と $R(\nu, S)$ が可換になる. これと上記の $R(\lambda, \Theta_T)$ の表現を考えると, Θ_S と Θ_T が強可換になることが分かる. この逆も成り立つことが示せて;

定理 1. S と T を \mathcal{H} 上の自己共役作用素とする. このとき S と T が強可換であることと, それらから誘導された Θ_S と Θ_T が強可換であることは同値である.

次に, T を \mathcal{H} 上の閉対称作用素とし, S を \mathcal{H} 上への自己共役拡大とすると

$$\begin{pmatrix} 0 & S \\ T & 0 \end{pmatrix}$$

は空間 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上の閉対称作用素で, Θ_T と Θ_S はその拡張になっている. この事から次の定理を得る: ;

定理 2. T を \mathcal{H} 上の閉対称作用素とし, S を \mathcal{H} 上への自己共役拡大とする. もしも Θ_S と Θ_T が強可換ならば, T は自己共役で $S = T$ である.

4.

命題 3. T を \mathcal{H} 上の閉作用素とし, $\mathcal{D}(T^n)$ が \mathcal{H} で稠密とする. $p(z)$ を次数が n の (複素) 多項式とする. さらに作用素多項式 $p(T)$ は閉作用素と仮定する. もしも Θ_T と $\Theta_{p(T)}$ が強可換ならば,

$$T(1 + T^*T)^{-1}p(T)^* \subseteq p(T)T^*(1 + TT^*)^{-1},$$

$$(1 + T^*T)^{-1}p(T)^* \subseteq p(T)^*(1 + TT^*)^{-1}.$$

が成り立つ.

参考. 上記の命題において, T のレゾルベント集合が空でなければ, 作用素多項式 $p(T)$ は稠密な定義域を持つ閉作用素になる. もしも, T が対称作用素ならば, 常に $p(T)$ は閉作用素. また, 対称作用素 T の不足指数のいずれかが有限なら, 稠密な定義域を持つ.

命題 3 を利用すると, 以下のことが示せる:

定理 4. n を 2 以上の整数とし, T を \mathcal{H} 上の閉対称作用素で, $\mathcal{D}(T^n)$ が \mathcal{H} で稠密とする. さらに, n 次多項式 $p(z)$ が実係数をもつとする. このとき Θ_T と $\Theta_{p(T)}$ が強可換ならば, T は自己共役になる.

参考. $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ が複素係数の多項式の場合,

$\bar{p}(z)$ を $\bar{p}(z) = \overline{a_n} z^n + \overline{a_{n-1}} z^{n-1} + \cdots + \overline{a_1} z + \overline{a_0}$ とする. このとき,

$$p(0) = 0$$

または,

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ such that } \operatorname{Im} \lambda \neq 0 \text{ and } \bar{p}(\lambda) = p(\lambda).$$

ならば, 上記の定理の仮定の下, Θ_T と $\Theta_{p(T)}$ が強可換ならば, T は自己共役になる.

参考文献

- [1] V. Hardt, A. Konstantinov and R. Mennicken, On the spectrum of the product of closed operators, *Math. Nachr.*, **215**(2000), 91–102.
- [2] S. Ôta and K. Schmüdgen, Some self-adjoint 2×2 operator matrices associated with closed operators, preprint (2001)