数理解析研究所講究録 1259 巻 2002 年 173-178

Young 型作用素不等式の評価と Specht ratio

大阪教育大学・教育　藤井　正俊　(Masatoshi Fujii)
Department of Mathematics,
Osaka Kyoiku University
新潟大学・自然科学　富永　雅　(Masaru Tominaga)
Department of Mathematical Science,
Graduate School of Science and Technology,
Niigata University

1. はじめに

よく知られている古典的な不等式の 1 つに，Young の不等式がある．それは，簡単な変数変換を施すことにより下記の加重 λ の算術-幾何平均とみなせる．ここではそれを Young の不等式と呼ぶ:

Young の不等式. 2 数 $a, b > 0$ に対して，不等式

(1.1) $$\lambda a+(1-\lambda)b \geq a^{\lambda}b^{1-\lambda}$$

は，すべての $\lambda \in [0,1]$ に対して成り立つ．

以下，作用素は，ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素を意味するものとする．先の不等式 (1.1) は，次の二つの平均を用いることにより作用素不等式に拡張することができる．A と B を（可逆な）正作用素とする．任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して，加重 λ の算術平均 $\triangledown_{\lambda}$ を次のように定める:

(1.2) $$B \triangledown_{\lambda} A := \lambda A+(1-\lambda)B.$$

また，加重 λ の幾何平均 $\sharp_{\lambda}$ を次のように定める:

(1.3) $$B \sharp_{\lambda} A := B^{\frac{1}{2}}(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})^{\lambda}B^{\frac{1}{2}}.$$

上記の加重 λ の幾何平均は，F.Kubo & T.Ando [3] によるものである．次の算術-幾何平均の不等式は，Young の不等式の作用素への拡張である:

Young の作用素不等式. A と B を可逆な正作用素とする．このとき，不等式

(1.4) $$B \triangledown_{\lambda} A \geq B \sharp_{\lambda} A$$

は，すべての $\lambda \in [0,1]$ に対して成り立つ．

Young の作用素不等式 (1.4) は，算術平均と幾何平均との間に順序（order）が付くということである．このことを，逆不等式の立場からもう少し調べるために，2 つの定数を用意する．まず，m と M は，$0 < m < M$ を満たす実数とする．このとき，対数平均 $L(m,M)$ (cf. [2]) は，次のように定められる:

$$L(m,M) := \frac{M-m}{\log M-\log m} \quad (L(x,x)=x).$$

次に，定数 $S(h)$ を次のように定める:

$$S(h) := \frac{h^{\frac{1}{h-1}}}{e \log h^{\frac{1}{h-1}}} \quad (h > 0, h \neq 1).$$

この定数は，Specht ratio [1], [4] と呼ばれ，正数に対して，幾何平均による算術平均の最適な上界を表している．つまり，$M > m > 0$ を満たす 2 つの正数 m, M に対して，$x_i \in [m, M]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ をとると，不等式

$$\text{(1.5)} \qquad S(h)\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ (\geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}) \quad \left(h = \frac{M}{m}\right)$$

が成り立つ．ここで，定数 h は，Turing [7] の意味で condition number の一般化である．

本稿では，Young の 作用素不等式 (1.4) の 逆不等式について考察する．まず，我々は，次のように不等式 (1.4) で，変数 $\lambda \in [0, 1]$ に依存しない「比」に関する逆作用素不等式を示す: $0 < m \leq A, B \leq M$ を満たす可逆な正作用素 A, B に対して，

$$S(h) B \sharp_\lambda A \geq B \nabla_\lambda A \ (\geq B \sharp_\lambda A) \qquad \left(h = \frac{M}{m} > 1\right)$$

が成り立つ．さらに，同じ条件の下，我々は，不等式 (1.4) の「差」に関する逆作用素不等式を示す:

$$hL(m, M) \log S(h) \geq B \nabla_\lambda A - B \sharp_\lambda A (\geq 0).$$

2. Specht ratio の性質

「差」と「比」に関する 2 つの Young の逆作用素不等式では，Specht ratio が重要な役割を果たしている．そこで，この Specht ratio 自身の性質についてまず考察する．

補題 2.1. (J.I. Fujii) $S(t)$ は，$0 < t < 1$ に対して単調に減少し，$t > 1$ に対して単調に増加する．さらに，次が成り立つ：

$$S(1) = 1 \quad \text{and} \quad S(t) = S(\frac{1}{t}) \ \text{ for all } t > 0.$$

証明. $S(1) = 1$ は，L'Hospital の定理を用いた次のことから成り立つことがわかる:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1} \log S(t) = \lim_{t\to 1} \log \frac{t^{\frac{1}{t-1}}}{e \log t^{\frac{1}{t-1}}} &= \lim_{t\to 1}\left(\frac{\log t}{t-1} - 1 - \log \frac{\log t}{t-1}\right) \\ &= \lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{t} - 1 - \log \frac{1}{t}\right) = 0.\end{aligned}$$

また，等式 $(\frac{1}{t})^{\frac{1}{\frac{1}{t}-1}} = t^{\frac{t}{t-1}} = t \cdot t^{\frac{1}{t-1}}$ により次の等式が成り立つ:

$$S(\frac{1}{t}) = \frac{(\frac{1}{t})^{\frac{1}{\frac{1}{t}-1}}}{e \log (\frac{1}{t})^{\frac{1}{\frac{1}{t}-1}}} = \frac{t \cdot t^{\frac{1}{t-1}}}{e \log t^{\frac{t}{t-1}}} = \frac{t^{\frac{1}{t-1}}}{e \log t^{\frac{1}{t-1}}} = S(t).$$

さらに，$\log S(t)$ の微分は，

$$\frac{d}{dt}\log S(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\log t}{t-1} - 1 - \log\frac{\log t}{t-1}\right) = \frac{\frac{1}{t}(t-1)-\log t}{(t-1)^2} - \frac{t-1}{\log t}\cdot\frac{\frac{1}{t}(t-1)-\log t}{(t-1)^2}$$
$$= \frac{(\log t - t + 1)(1-\frac{1}{t}-\log t)}{(t-1)^2\log t}.$$

で与えられるので，Klein の不等式 ($t > 0$ に対して $1-\frac{1}{t} \leq \log t \leq t-1$) より任意の $t > 1$ に対して $\frac{d}{dt}\log S(t) > 0$，つまり，$S(t)$ は，$[1,\infty)$ で単調に増加する．他方，同様にして，$S(t)$ は，$(0,1)$ で単調減少であることがわかる． □

次の補題は，Specht ratio と 対数平均の関係を表している:

補題 2.2. $a \geq 1$ に対して，次の不等式が成り立つ:

$$L(1,a) \geq S(a) \ \left(= S(\frac{1}{a}) \geq 1 \geq L(1,\frac{1}{a})\right). \tag{2.1}$$

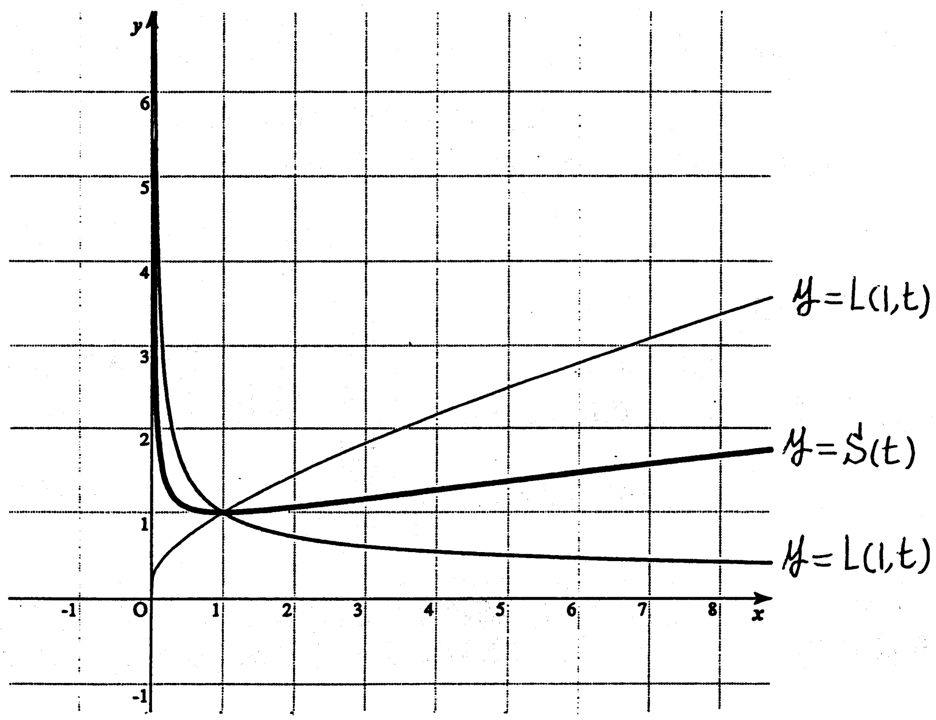
証明. $a=1$ のとき，$L(1,1) = S(1) = 1$ より (2.1) は成り立つ．

$a > 1$ のとき，Klein の不等式より $\log\frac{a^{\frac{1}{a-1}}}{e} = \frac{\log a-(a-1)}{a-1} < 0$ であるから，

$$S(a) = \frac{a^{\frac{1}{a-1}}}{e}\frac{a-1}{\log a} < \frac{a-1}{\log a} = L(1,a)$$

となり，よって (2.1) が得られる． □

右図は，Specht ratio $S(t)$，対数平均 $L(1,t)$, $L(1,\frac{1}{t})$ をそれぞれグラフにしたものである．このグラフは，補題 2.1, 2.2 での性質を確かめさせるものになっている．



3. Young の逆作用素不等式

本節では，Young の逆作用素不等式，つまり，$B \sharp_\lambda A$ による $B \nabla_\lambda A$ の評価について考察する．

3.1. 「比」に関する Young の逆作用素不等式. まず，Young の作用素不等式 (1.4) の「比」に関する逆不等式を次のように与える:

定理 3.1. A と B は，$0 < m \le A, B \le M$ を満たす正作用素とし，$h = \frac{M}{m} > 1$ とおく．このとき，不等式

$$S(h) B \sharp_\lambda A \ge B \nabla_\lambda A \ (\ge B \sharp_\lambda A) \tag{3.1}$$

は，すべての $\lambda \in [0,1]$ に対して成り立つ．

定理 3.1 を導くために，我々は，次の補題を必要とする．これは，Young の不等式 (1.1) の「比」に関する逆不等式である:

補題 3.2. $a > 0$ とするとき，不等式

$$S(a) a^\lambda \ge \lambda a + (1-\lambda) \ (\ge a^\lambda) \tag{3.2}$$

は，すべての $\lambda \in [0,1]$ に対して成り立つ．

この結果，$a, b > 0$ に対して，不等式

$$S(\frac{a}{b}) a^\lambda b^{1-\lambda} \ge \lambda a + (1-\lambda) b \ (\ge a^{1-\lambda} b^\lambda) \tag{3.3}$$

が，すべての $\lambda \in [0,1]$ に対して成り立つ．

証明. $a \ne 1$ とする．$b = 1$ のときの Young の不等式 (1.1) から考えられる $f_a(\lambda)$ を次のように定める:

$$f_a(\lambda) := \frac{\lambda a + (1-\lambda)}{a^\lambda} = \frac{(a-1)\lambda + 1}{a^\lambda} = \{(a-1)\lambda + 1\} a^{-\lambda} \quad (\lambda \in [0,1]).$$

このとき，$\lambda \in [0,1]$ に対する $f_a(\lambda)$ の最大値は，定数 $S(a) = \frac{a^{\frac{1}{a-1}}}{e \log a^{\frac{1}{a-1}}}$ となる．実際に，

$$f_a'(\lambda) = [(a-1) - \{(a-1)\lambda + 1\} \log a] a^{-\lambda}.$$

なので，等式 $f_a'(\lambda) = 0$ は，唯一解 $\lambda = \lambda_a$ を持つ:

$$\lambda_a = \frac{1}{a-1}\left(\frac{a-1}{\log a} - 1\right) = \frac{1}{\log a} - \frac{1}{a-1} \ (\in [0,1]).$$

$\lambda_a \in [0,1]$ は，Klein の不等式よりわかる．さらに，

$$f_a'(\lambda) > 0 \text{ for } \lambda < \lambda_a \quad \text{and} \quad f_a'(\lambda) < 0 \text{ for } \lambda > \lambda_a$$

より，$f_a(\lambda)$ は，$\lambda = \lambda_a$ で最大値をとることがわかり，その最大値は，

$$\max_{0 \le \lambda \le 1} f_a(\lambda) = f_a(\lambda_a) = \frac{\frac{a-1}{\log a}}{a^{-\frac{1}{a-1} + \frac{1}{\log a}}} = \frac{a^{\frac{1}{a-1}}}{e \log a^{\frac{1}{a-1}}} = S(a)$$

となる．

$a = 1$ の場合，不等式 (3.2) は，補題 2.1 ($S(1) = 1$) より得られる．

不等式 (3.3) は，不等式 (3.2) において a を $\frac{a}{b}$ に置き換えることにより得られる． □

補題 3.2 より，次のように定理 3.1 を証明することが出来る:

定理 3.1 の証明. C が，$0 < m \leq C \leq M$ を満たす正作用素であるとする．このとき，不等式 (3.2) より，不等式

$$\max_{m \leq t \leq M} S(t)\, C^{\lambda} \geq \lambda C + (1-\lambda)$$

は，すべての $\lambda \in [0,1]$ に対して成り立つ．さらに，$[m, M]$ における $S(t)$ の最大値は，補題 2.1 から $\max\{S(m), S(M)\}$ により与えられるので，次の不等式が成り立つ:

$$\max\{S(m), S(M)\}\, C^{\lambda} \geq \lambda C + (1-\lambda). \tag{3.4}$$

ここで，不等式 (3.4) において，$C := B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}$ と置き，$\frac{m}{M} \leq B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{M}{m}$, i.e., $\frac{1}{h} \leq B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \leq h$ となることに注意すると

$$S(h)(B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}})^{\lambda} \geq \lambda B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} + (1-\lambda)$$

が，補題 2.1 の $S(h) = S(\frac{1}{h})$ により得られる．さらに，両辺に $B^{\frac{1}{2}}$ を左右から作用させることにより，不等式

$$S(h) B^{\frac{1}{2}} (B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}})^{\lambda} B^{\frac{1}{2}} \geq \lambda A + (1-\lambda) B,$$

つまり，不等式 (3.1) を得る． □

3.2. 「差」に関する Young の逆作用素不等式. 次に，Young の作用素不等式 (1.4) の「差」に関する逆不等式，つまり，$B \nabla_{\lambda} A - B \sharp_{\lambda} A\ (\geq 0)$ の上界を与える:

定理 3.3. A と B は，$0 < m \leq A, B \leq M$ を満たす正作用素とし，$h = \frac{M}{m} > 1$ とおく．このとき，不等式

$$hL(m, M) \log S(h) \geq B \nabla_{\lambda} A - B \sharp_{\lambda} A\ (\geq 0) \tag{3.5}$$

は，すべての $\lambda \in [0,1]$ の対して成り立つ．

定理 3.3 を示すため，Young の不等式 (1.1) の「差」に関する逆不等式を示す:

補題 3.4. $a > 0$ とするとき，不等式

$$L(1, a) \log S(a) \geq \lambda a + (1-\lambda) - a^{\lambda}\ (\geq 0) \tag{3.6}$$

は，すべての $\lambda \in [0,1]$ に対して成り立つ．結果として，$a, b > 0$ に対して，不等式

$$L(a, b) \log S(\frac{a}{b}) \geq \lambda a + (1-\lambda) b - a^{\lambda} b^{1-\lambda}\ (\geq 0) \tag{3.7}$$

が，すべての $\lambda \in [0,1]$ に対して成り立つ．

証明. $a \neq 1$ を仮定する．我々は，$b = 1$ のときの Young の不等式 (1.1) から考えられる $g_a(\lambda)$ を次のように定める:

$$g_a(\lambda) := \lambda a + (1-\lambda) - a^{\lambda} = (a-1)\lambda + 1 - a^{\lambda}.$$

$g_a(\lambda)$ の最大値を求める．

$$g'_a(\lambda) = (a-1) - a^{\lambda} \log a \tag{3.8}$$

より，等式 $g_a'(\lambda)=0$ は，唯一解 $\lambda=\lambda_a$ を持つ:

$$\lambda_a=\log_a\frac{a-1}{\log a}=\frac{\log\frac{a-1}{\log a}}{\log a}.$$

$\lambda_a\in[0,1]$ は，Klein の不等式より明らか．さらに，不等式 (3.8) より，$g_a''(\lambda)=-a^\lambda(\log a)^2<0$ となり，$g_a(\lambda)$ は $\lambda=\lambda_a$ で最大値をとることがわかる．またその最大値は，

$$\begin{aligned}\max_{0\le\lambda\le1}g_a(\lambda)&=g_a(\lambda_a)\\&=(a-1)\frac{\log\frac{a-1}{\log a}}{\log a}+1-\frac{a-1}{\log a}=\frac{a-1}{\log a}\left(\log\frac{a-1}{\log a}+\frac{\log a}{a-1}-1\right)\\&=\frac{a-1}{\log a}\log\frac{a^{\frac{1}{a-1}}}{e\log a^{\frac{1}{a-1}}}=L(1,a)\log S(a).\end{aligned}$$

となる．

$a=1$ の場合，不等式 (3.6) は，補題 2.1 ($S(1)=1$) よりわかる．

不等式 (3.7) は，不等式 (3.6) において，a を $\frac{a}{b}$ で置き換えることにより得られる． □

補題 3.4 の作用素への拡張を考えることにより，次のように定理 3.3 を示す:

定理 3.3 の証明. C が，$0<m\le C\le M$ を満たす正作用素であるとする．このとき，不等式 (3.6) より，不等式

$$\max_{m\le t\le M}L(1,t)\log S(t)\ge\lambda C+(1-\lambda)-C^\lambda\ (\ge 0) \tag{3.9}$$

は，すべての $\lambda\in[0,1]$ の対して成り立つ．ここで，不等式 (3.9) において C を $B^{-\frac12}AB^{-\frac12}$ に置き換える．このとき，$\frac{m}{M}\le B^{-\frac12}AB^{-\frac12}\le\frac{M}{m}$，つまり，$\frac1h\le B^{-\frac12}AB^{-\frac12}\le h$ を得る．これゆえに，補題 2.1 より任意の $\lambda\in[0,1]$ に対して

$$L(1,h)\log S(h)\ge\lambda B^{-\frac12}AB^{-\frac12}+(1-\lambda)-(B^{-\frac12}AB^{-\frac12})^\lambda$$

を得る．さらに，両辺に $B^{\frac12}$ を左右から作用させることにより，不等式

$$L(1,h)\log S(h)B\ge\lambda A+(1-\lambda)B-B^{\frac12}(B^{-\frac12}AB^{-\frac12})^\lambda B^{\frac12}$$

が成り立ち，左辺の最大値を考えることにより，求めたい不等式 (3.5) を得る． □

なお，本稿は，主に，[5], [6] によることを追記する．

References

[1] J.I. Fujii, S. Izumino and Y. Seo, *Determinant for positive operators and Specht's theorem*, Sci. Math. Japon., **1**(1998), 307-310.

[2] F. Kubo, *On logarithmic operator means*, Tenth Symposium on Applied Functional Analysis, 1987, 47-61.

[3] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive operators*, Math. Ann., **264**(1980), 205-224.

[4] W. Specht, *Zur Theorie der elementaren Mittel*, Math. Z., **74**(1960), 91-98.

[5] M. Tominaga, *Specht's ratio in the Young inequality*, Sci. Math. Japon., to appear.

[6] M. Tominaga, *Specht's ratio and logarithmic mean in the Young inequality*, preprint.

[7] A.M. Turing, *Rounding off-errors in matrix processes*, Quart.J.Mech.Appl.Math., **1**(1948), 287-308.