

# 陪特性グラフについて

## On bicharacteristic graphs

近畿大学 理工学部 青木貴史

Kinki University AOKI, Takashi

京都大学 数理解析研究所 河合隆裕

Kyoto University, RIMS KAWAI, Takahiro

京都大学 数理解析研究所 竹井義次

Kyoto University, RIMS TAKEI, Yoshitsugu

### §1 序

大きなパラメタを含む高階常微分作用素  $P$  の完全 WKB 解析に於ける Stokes 幾何学の内在的な理解の為に [AKT1] によって導入された仮想的変わり点 (virtual turning point; これは [AKT2] で導入された用語であり, [AKT1] では new turning point と呼んでいる) は, Borel 変換された WKB 解の特異点同士がぶつかる所, 即ち  $P$  の Borel 変換  $P_B$  の陪特性曲線の自己交叉点 (self-intersection point) を用いて定義され, 必然的に大域的かつ超越的な性格を持つ. (その具体的な例については, 例えば [AKT1] を参照されたい.) 併乍 (2つの) 単純変わり点を合流させることによって得られる「2重変わり点を持つ作用素」に対しては, 既に「変わり点の合流」によっていくつかの周期 (period) がつぶれている事実を反映して仮想的変わり点が代数的に記述できる場合が十分沢山存在する. これが [AKT2] の議論の一つのポイントである. 最近 小池達也氏 (京大・理) により開発さ

れたプログラムのお蔭で仮想的変わり点の数値計算は殆んど自動的に為されるようになったけれども、手計算の可能な例が十分沢山あることは、問題の理論的考察を行う際に何と言っても心強い。[AKT2] では、大きなパラメタ  $\eta$  に関して最高次の部分が（実）多項式  $\rho_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) を対角成分に持つ3次の対角行列になる場合に、「Stokes 曲線の交点を通る新種の Stokes 曲線 (new Stokes curve; [BNR] 参照) を産み出す仮想的変わり点の候補」を探す為の補助手段として bicharacteristic diagram なる概念を導入し、さらにそれ等に対する操作, junction と contraction, を定義した。

本稿ではこれ等に加えてさらに、(つぶし切れていない) 周期が仮想的変わり点にどのように関わるかを調べる為に“真空グラフによる改変 (modification)” と云う操作を定義する。グラフの orientation を [AKT2] と違うものにとったこともあり、本稿では“diagram”の代わりに(違いを明示的にする為) “graph” と云う語を用いることとする。尚、本稿の詳細は別途発表予定である。

## §2 陪特性グラフの定義

以下、本稿では  $\rho_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) を多項式とし、 $R_j(t) = \int_0^t \rho_j(s) ds$  と定める。(  $R_j(t)$  の定義式に於ける積分下端はすべての  $j$  に対し共通なら何でも良い。ここで  $1 \leq j \leq 3$  としたのは簡単の為であり、多少の付帯条件の下に一般化することは可能である。又、[AKT2] では  $\rho_j(t)$  を実多項式としているが、これはそこで取扱っている問題に対する物理的要請に由来する条件で本稿の議論には必要ない。)

さて、陪特性グラフは次の2組のデータ  $(K, T)$  によって定められる：

- (2.1)  $K = \{k_0, k_1, \dots, k_n\}$  ( $k_l \in \{1, 2, 3\}$ ,  $k_l \neq k_{l+1}$  ( $0 \leq l \leq n$ ), 但し  $k_{n+1} = k_0$  と規約する)
- (2.2)  $T = \{t^{(0)}, t^{(1)}, \dots, t^{(n-1)}\}$  (但し  $t^{(l)}$  は  $\rho_{k_l}(t^{(l)}) = \rho_{k_{l+1}}(t^{(l)})$  を満たす複素数)

このような“ラベル”  $(K, T)$  に対し対応する陪特性グラフ  $G(K, T)$  とは、

- (2.3) ラベル  $k_l$  ( $1 \leq l \leq n-1$ ) の付いた線分 (内線と呼ぶ),
- (2.4) ラベル  $k_0$  又は  $k_n$  の付いた2本の半直線 (外線と呼ぶ)

及び

- (2.5) ラベル  $t^{(l)}$  を付した  $n$  個の点 (頂点と呼ぶ)

から成り立つグラフであり、 $l$  番目の線 (即ちラベル  $k_l$  の付いた外線又は内線) と  $(l+1)$  番目の線は頂点  $t^{(l)}$  で結ばれているものとする。尚  $G(K, T)$  は2次元グラフとは見做さない、即ち、例えば  $l$  番の線と  $l'$  番目の線 ( $l \neq l'$ ) が交わっても構わないものとする。又、内線、外線はまっすぐでなくても (つまり、例えば半“直線”でなくても) 半直線と同相なら良い。事実 [AKT2] では bicharacteristic curve の雰囲気を多少なりとも残す為に、内線は皆“曲線分”としている。( [AKT2] で考えている作用素の場合、bicharacteristic curves は変わり点に対応する点で2次の接触をしている。 )

さらに、以下の便宜の為、 $G(K, T)$  の各線は一様に向き付けられているものとする。(即ち (A)  $l$  番目の線が頂点  $t^{(l)}$  に入り ( $0 \leq l \leq n-1$ ), 外線  $k_n$  は頂点  $t^{(n-1)}$  から出る, 或いは (B)  $l$  番目の線は頂点  $t^{(l)}$  から出 ( $0 \leq l \leq n-1$ ), 外線  $k_n$  は頂点  $t^{(n-1)}$  に入る, のいずれかの状況になっ

ているとする。必要があれば  $G(K, T)$  の各線が (A) のように向き付けされている時  $G(K, T; +)$ , (B) の状況の時  $G(K, T; -)$  と記すことにする。)

以下では  $\{\rho_j\}$  が一組与えられたものとして,  $G(K, T)$  に対し代数方程式  $E(K, T)$  を次のように定める。

$$\begin{aligned} E(K, T) : & R_{k_0}(t) - R_{k_0}(t^{(0)}) \\ & + \sum_{l=1}^{n-1} \left( R_{k_l}(t^{(l-1)}) - R_{k_l}(t^{(l)}) \right) \\ & + R_{k_n}(t^{(n-1)}) - R_{k_n}(t) = 0. \end{aligned}$$

**注意 2.1.** [AKT2] では  $E(K, T)$  の表示法として  $R_{k_0}(t) - R_{k_0}(t^{(0)})$  以外の項をすべて右辺に移項した形を用いている ([AKT2, (3.3) $_{K,T}$ ] 参照)。本項では第4節で論じる“改変操作”を解析的な式に翻訳する際符号の誤まりを起こしにくくする為, 上の形を用いる。“= 0”と書くか“0 =”と書くかは気分の問題だが, 記憶の便の為として言えば上の表示は  $G(K, T; -)$  に対するもの, と感じる人が多いのではなかろうか。

### §3 接合 (junction) と縮約 (contraction)

2つの陪特性グラフの接合及び陪特性グラフの縮約はいずれも [AKT2] で用いたものと同じとする。即ち  $G(K, T)$  と  $G(K', T')$  の接合

$$(3.1) \quad G(K, T) \# G(K', T')$$

は,  $K = \{k_0, \dots, k_n\}$ ,  $K' = \{k'_0, \dots, k'_m\}$  として

$$(3.2) \quad \{k_0, k_n, k'_0, k'_m\} \text{ が集合として } \{1, 2, 3\} \text{ と一致する}$$

時に定義される。仮定より  $k_0 \neq k_n$ ,  $k'_0 \neq k'_m$  故,  $k_0 = 1, k_n = k'_0 = 3, k'_m = 2$  と仮定しても一般性は失われない。又, この時,  $G(K, T; +), G(K', T'; +)$

と線の向き付けは与えられているとしても構わない。接合を定義する為に

$$(3.3) \quad k_{n+l} = k'_l \quad (l = 1, \dots, m),$$

$$(3.4) \quad t^{(n+l)} = t^{(l)} \quad (l = 0, \dots, m-1)$$

と定める。(ここで、 $T' = \{t^{(0)}, \dots, t^{(m-1)}\}$ とした。) この時  $G(K, T) \# G(K', T')$  は  $t^{(n-1)}$  と  $t^{(n)}$  を内線  $k_n (= 3)$  で結んで得られるグラフとして定める。陪特性グラフの接合の概念の重要性は次の命題に由来する。

**命題 3.1.**  $E(K_j, T_j)$  ( $j = 1, 2$ ) の解 (定義により仮想的又は通常の変わり点) から出る Stokes 曲線  $\sigma_j$  ( $j = 1, 2$ ) が点  $a$  で交わったとする。この時条件 (3.2) は満たされているから、 $G(K, T) = G(K_1, T_1) \# G(K_2, T_2)$  を考えることができる。 $E(K, T)$  の解から出る  $(k_0, k_n)$  ( $= (1, 2)$ ) 型の Stokes 曲線の全体を考えれば点  $a$  はその中に含まれる。

次に陪特性グラフ  $G(K, T)$  の縮約を復習しておく。これは  $T$  に於て  $t^{(l)} = t^{(l+1)}$  かつ  $k_l = k_{l+2}$  となっている場合、 $\frac{t^{(l)} \quad t^{(l+1)}}{k_l \quad k_{l+1} \quad k_{l+2}}$  と云う部分を  $\frac{\quad}{k_l}$  で置き換える操作のことである。これは、 $E(K, T)$  の方で見れば

$$\int_{t^{(l)}}^{t^{(l+1)}} \rho_{k_{l+1}} ds = 0$$

となっていることに対応する。尚、2つの通常の変わり点が重なることはない、と仮定しておけば、今の場合、 $k_l = k_{l+2}$  は  $t^{(l)} = t^{(l+1)}$  から自明に従うから、実際には  $t^{(l)} = t^{(l+1)}$  の時縮約操作が可能であると思ってよい。

## § 4 改変操作 (modification)

「単純変わり点の合流」の後にも残っている周期構造を調べることは完全 WKB 解析の立場からは極めて重要である。この方向の研究は、Borel 変

換された WKB 解を考えるのに適した Riemann 面は？と云う基本的問題とも表裏一体であるが，残念乍ら今の所“全く判らない”としか言い様がない．そこでこの方向の研究の手掛りを作るべく，ここでは方程式  $E(K, T)$  に現われるある種の周期構造を陪特性グラフの観点から考える材料を提供して見たい．その“材料”が本節の表題に言う“改変操作”である．この操作を定義する為にまず“真空グラフ”を定義しよう．（名前は，外線を持たない (Feynman) グラフを“真空グラフ”と呼ぶことに由来する．）

**定義 4.1.** ラベル  $K = \{k_0, k_1, \dots, k_{n-1}\}$  ( $k_l \in \{1, 2, 3\}$ ,  $k_l \neq k_{l+1}$  ( $l = 0, \dots, n-1$ ; 但し  $k_n = k_0$  と規約)) 及び  $T = \{t^{(0)}, t^{(1)}, \dots, t^{(n-1)}\}$  ( $t^{(l)} \in \mathbb{C}$ ,  $\rho_{k_l}(t^{(l)}) = \rho_{k_{l+1}}(t^{(l)})$  ( $l = 0, 1, \dots, n-1$ )) に対し，内線  $k_l$  と内線  $k_{l+1}$  が頂点  $t^{(l)}$  で結ばれた（円周と同相な）グラフを真空グラフ  $\Phi(K, T)$  と呼ぶ．尚，各内線は一様に向き付けられているものとする；即ち (A) 内線  $k_l$  は頂点  $t^{(l)}$  に入る ( $0 \leq l \leq n-1$ )，或いは (B) 内線  $k_l$  は頂点  $t^{(l)}$  から出る ( $0 \leq l \leq n-1$ )，のいずれかが成り立っているものとする．必要があれば (A) の状況を  $\Phi(K, T; +)$ ，(B) の状況を  $\Phi(K, T; -)$  と記すこととする．

さて，陪特性グラフ  $G(K', T')$  と真空グラフ  $\Phi(K, T)$  に於いて  $T'$  のある元  $t^{(p)}$  と  $T$  の元  $t^{(n-1)}$  が同一の変わり点であるとしよう．この時  $t^{(p)}$ ,  $t^{(n-1)}$  に対する仮定，即ち相異なる対  $(\rho_k, \rho_l)$ ,  $(\rho_{k'}, \rho_{l'})$  により定まる変わり点が一致することはないという仮定により，集合として  $\{k'_p, k'_{p+1}\} = \{k_0, k_{n-1}\}$  が成り立つ．従って一般性を失うことなく

$$(4.1) \quad k'_p = k_0, \quad k'_{p+1} = k_{n-1}$$

と仮定してよい．又，この時  $\Phi(K, T)$  の内線の向き付けは  $G(K', T')$  と同じに取ることとする．（即ち  $G(K', T'; \pm)$  なら  $\Phi(K, T; \pm)$  (複号同順) となるように向き付けする．）この状況の下で，「陪特性グラフ  $G(K', T')$  の，

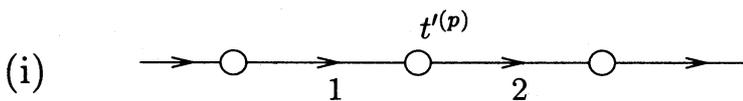
頂点  $t^{(p)}$  に於ける, 真空グラフ  $\Phi(K, T)$  による改変  $G(\tilde{K}, \tilde{T}) = G \leftarrow_{t^{(p)}} \Phi$  とは以下の手続きに拠り得られる陪特性グラフを謂う. 但し, 記号を定める為,  $K' = \{k'_0, \dots, k'_p, k'_{p+1}, \dots, k'_m\}$ ,  $T' = \{t^{(0)}, \dots, t^{(p)}, \dots, t^{(m-1)}\}$  とする.

$$(4.2) \quad \tilde{k}_l = \begin{cases} k'_l & (0 \leq l \leq p) \\ k_{l-p} & (p+1 \leq l \leq p+n-2) \\ k'_{l-n+2} & (p+n-1 \leq l \leq m+n-2) \end{cases}$$

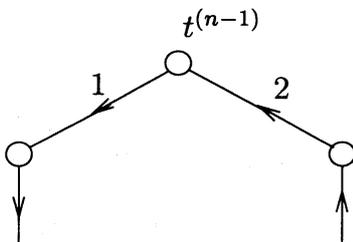
$$(4.3) \quad \tilde{t}^{(l)} = \begin{cases} t^{(l)} & (0 \leq l \leq p-1) \\ t^{(l-p)} & (p \leq l \leq p+n-2) \\ t^{(l-n+2)} & (p+n-1 \leq l \leq m+n-3) \end{cases}$$

と定め,  $\tilde{K} = \{\tilde{k}_0, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{m+n-2}\}$ ,  $\tilde{T} = \{\tilde{t}^{(0)}, \tilde{t}^{(1)}, \dots, \tilde{t}^{(m+n-3)}\}$  としてラベル  $(\tilde{K}, \tilde{T})$  を持つ陪特性グラフ  $G(\tilde{K}, \tilde{T})$  を作る.

注意 4.1. 上の手続きは図式的に説明した方が分り易いであろう: 頂点は白丸で表わすこととし,  $k'_{p-1} = k_0 = 1$ ,  $k'_p = k_{n-1} = 2$  としておこう.



及び

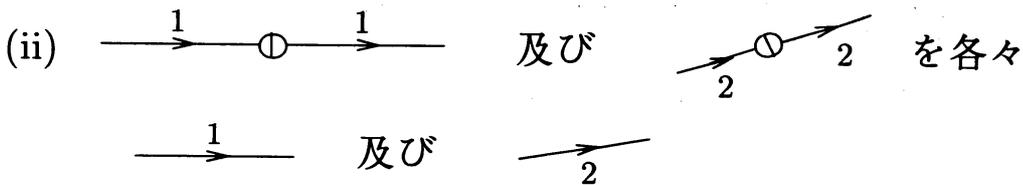


に於いて白丸  $t^{(p)}$ ,  $t^{(n-1)}$  を各々半分に切り分け と と

及び



のようにつける。



と見做す。(自明な縮約と思ってもよい。)

このようにして線の数, 頂点の数, 各々が単純な和より2つずつ減った  $(\tilde{K}, \tilde{T})$  が得られることになる。上のプロセスは,  $E(\tilde{K}, \tilde{T})$  で考えれば,

$$\begin{aligned} R_1(t^{(p-1)}) - R_1(t^{(p)}) + R_1(t^{(n-1)}) - R_1(t^{(0)}) \\ = R_1(t^{(p-1)}) - R_1(t^{(0)}) \end{aligned}$$

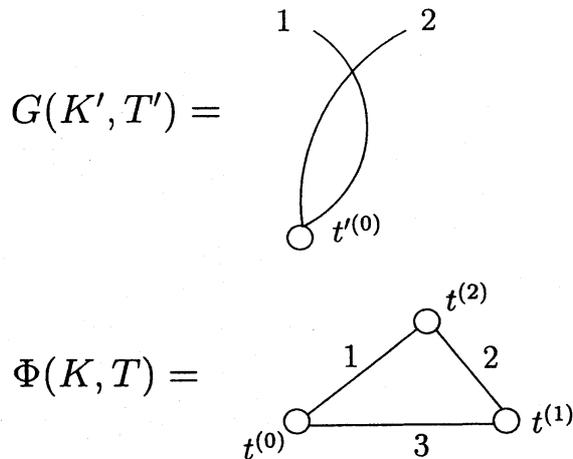
及び

$$\begin{aligned} R_2(t^{(n-2)}) - R_2(t^{(n-1)}) + R_2(t^{(p)}) - R_2(t^{(p+1)}) \\ = R_2(t^{(n-2)}) - R_2(t^{(p+1)}) \end{aligned}$$

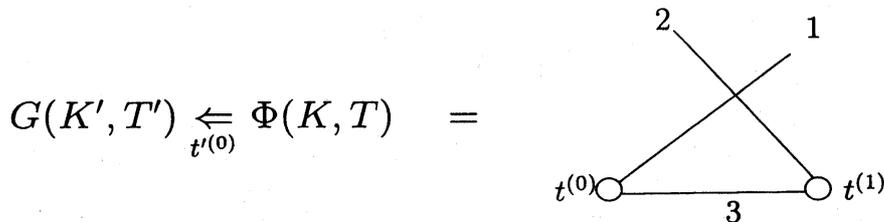
と云う自明な相殺に対応している。

ここで定義した改変操作は, 仮想的変わり点と「周期」との関係を探る際極めて有用に思われる。但し, 我々はまだ「周期」の本質をよく理解してはいない。寧ろ, この改変操作により実例をよく見つめてみたい, と思っている段階である。ここでは一例を紹介するにとどめたい。

例 4.1.



として,  $t^{(0)} = t^{(2)}$  であるとしよう. この時



となり, 最も基本的な仮想的変わり点に対応する陪特性グラフが得られる. これを  $E(K', T')$ ,  $E(\tilde{K}, \tilde{T})$  の言葉で言えば次のようになる.

通常の変わり点  $t^{(0)}$  を,

$$(4.4) \quad -R_1(t) + R_1(t^{(0)}) - R_2(t^{(0)}) + R_2(t) = 0$$

の2重零点と理解し, これに  $\Phi(K, T)$  に対応する「周期積分」

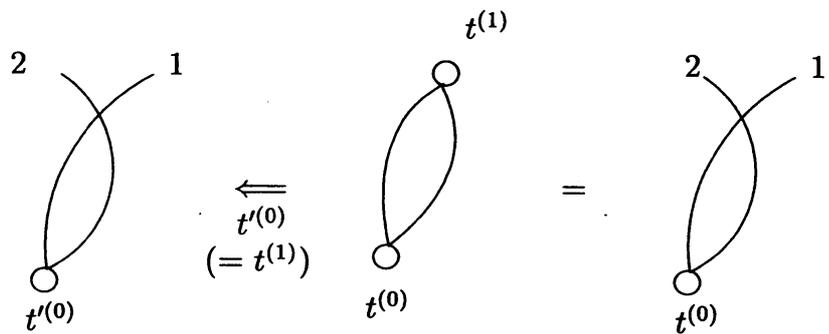
$$(4.5) \quad R_1(t^{(0)}) - R_1(t^{(2)}) + R_3(t^{(1)}) - R_3(t^{(0)}) + R_2(t^{(2)}) - R_2(t^{(1)})$$

を加えることにより, 仮想的変わり点の方程式

$$(4.6) \quad -R_1(t) + R_1(t^{(0)}) + R_3(t^{(1)}) - R_3(t^{(0)}) + R_2(t) - R_2(t^{(1)}) = 0$$

が得られることになる. ( $t^{(0)} = t^{(2)}$  に注意.)

注意 4.2. 上に用いた通常の変わり点の定義式の (規約的) 理解を用いれば



と云う改変操作は通常の変わり点  $t^{(0)}$  を他の通常の変わり点  $t^{(0)}$  に移す操作と理解される.

## 文献

- [AKT1] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: New turning points in the exact WKB analysis for higher order ordinary differential equations. *Analyse algébrique des perturbations singulières*, I, Hermann, 1994, pp.69–84.
- [AKT2] ———: Exact WKB analysis of non-adiabatic transition probabilities for three levels. To appear in *J. Phys.*, **A** (2002).
- [BNR] H.L. Berk, W.M. Nevins and K.V. Roberts: New Stokes' line in WKB theory. *J. Math. Phys.*, **23** (1982), 988–1002.