

層の双対概念と積分変換
The Dual Concept of Sheaves and Integral Transforms

東大・数理 杉木 雄一 (Yuichi Sugiki)
Department of Mathematical Sciences,
the University of Tokyo.

1 序

E を n 次元の複素線形空間, P を E の射影コンパクト化, $j: E \hookrightarrow P$ を自然な埋め込みとする. $F \in \mathbf{D}_{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-}^b(\mathrm{Sh}(\mathbb{C}_E))$ に対し,

$$\begin{aligned} \mathrm{THom}(F, \mathcal{O}_E) &:= \mathrm{R}\Gamma(P; \mathrm{THom}(j_!F, \mathcal{O}_P)), \\ F \overset{\mathbb{W}}{\otimes} \mathcal{O}_E &:= \mathrm{R}\Gamma(P; j_!F \overset{\mathbb{W}}{\otimes} \mathcal{O}_P) \end{aligned}$$

と置く. 柏原・Schapira [2] は Laplace 変換の一般化を 2 つの同型

$$L : F \overset{\mathbb{W}}{\otimes} \mathcal{O}_E \simeq F^\wedge[n] \overset{\mathbb{W}}{\otimes} \mathcal{O}_{E^*}, \tag{1.1}$$

$${}^tL : \mathrm{THom}(F, \mathcal{O}_E) \simeq \mathrm{THom}(F^\wedge[n], \mathcal{O}_{E^*}) \tag{1.2}$$

として表現した. 最近の代数解析の研究の 1 つの流れとして, 確定特異点型の微分方程式だけでなく不確定特異点型へも適用出来るように, 構成可能 (constructible) という条件をなくすという動きがある. 上式の Laplace 同型は F に依存して定まるが, 本当は F に依存しない形での表現が欲しい. (1.2) に関しては, 柏原・Schapira [2] によって対象 \mathcal{O}_E^t が定義され, 層の圏内で同型

$$(\mathcal{O}_E^t)^\wedge[n] \simeq \mathcal{O}_{E^*}^t$$

が既に得られていた. 本記事の目的は, (1.1) を F に依存しない形で表現することである. この目的を達成するために, 層の双対概念である余層の理論を用いる. 詳細はプレプリント [5] を参照して欲しい.

余層は古くから多くの専門家によって研究されているが, J-P. Schneiders は [4] で, promodule を基礎にして余層を定義し, ずっと強力な理論にした. 我々も彼による理論を発達させ, 7 節で目的を遂行する. 3 節の開集合に加群ではなく promodule を対応させて余層を定義するというアイデア, 5 節の c -injective object が十分豊富に存在することといった, 6 節の Verdier 双対以外のすべての結果は Schneiders の研究による.

2 準備

余層の一般論を展開するための準備として, promodule について復習しよう. promodule の定義は Grothendieck [3] によるものである. k を単位元を持つ可換環, \mathcal{C} を k 作用を持つアーベル圏とする. \mathcal{C} から $\mathrm{Mod}(k)$ への加法関手全体からなる圏を \mathcal{C}^\vee と書く. \mathcal{C}^\vee の充満部分圏 $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathrm{Pro}(\mathcal{C}) := \{ X \in \mathcal{C}^\vee \mid \text{ある filtrant 集合 } I \text{ および関手 } \alpha: I^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{C} \text{ が存在して,} \\ X \simeq \varprojlim_{i \in I} \alpha(i) \text{ が成り立つ.} \} \end{aligned}$$

ここに " \varinjlim " $\alpha(i)$ は, \mathcal{C} の対象 A に $\text{Mod}(k)$ の対象 $\varinjlim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(i), A)$ を対応させる加法関手である. \mathcal{C} が普遍集合 \mathcal{U} の類ならば, $\text{Pro}(\mathcal{C})$ も \mathcal{U} の類であるが, \mathcal{C}^{\vee} は \mathcal{U} の類になるとは限らないことに注意しよう.

さて, $\text{Mod}(k)$ 自身も k 作用をもつアーベル圏であるから, 特に $\mathcal{C} := \text{Mod}(k)$ と置けば, 圏 $\text{Pro}(\text{Mod}(k))$ を得る. 通常は簡単に $\text{Pro}(k)$ と書き, この圏の対象を promodule と呼ぶ. 次の定理が成り立つ.

定理 2.1. (i) $\text{Pro}(k)$ は k 作用をもつアーベル圏である.

(ii) 埋め込み関手 $\text{Mod}(k) \rightarrow \text{Pro}(k)$ は充満忠実かつ完全である.

(iii) $\text{Pro}(k)$ 上の射影極限は完全である.

$\text{Mod}(k)$ 上の射影極限は左完全性しか満たさないことから分かるように, (iii) は $\text{Pro}(k)$ の独特かつ重要な性質である.

3 余層

X を位相空間, $\text{Op}(X)$ をその開集合系とする. $\text{Op}(X)$ は包含順序によって有向集合となる. このとき, $\text{Op}(X)^{\text{op}}$ から $\text{Pro}(k)^{\text{op}}$ への関手を X 上の前余層 (precosheaf) と呼ぶ. 前余層全体は圏になり, それを $\text{PCsh}(k_X)$ と書く. 前余層 F は, 開集合の包含関係 $U \subset V$ に対し $\text{Pro}(k)^{\text{op}}$ 上の射 $F(V) \rightarrow F(U)$ を与えるが, この射を $\text{Pro}(k)$ 上で眺めれば, その向きが前層とは丁度逆になる. この意味で前余層は前層の双対概念と考えられる. $\text{Pro}(k)$ でなく $\text{Pro}(k)^{\text{op}}$ をあえて使う理由は, 射の向きを前層と形式上同じにするためだが, これには幾つかの利点がある. 例えば, 層は貼り合わせの条件を満たす前層と定義されるが, 余層の定義にもこの貼り合わせの条件を持ち込みたい. $\text{Pro}(k)^{\text{op}}$ を使えば, 次のように定義することが出来る.

定義 3.1. X 上の前余層 F が余層 (cosheaf) であるとは, 任意の開集合 U および任意の U の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ に対して, $\text{Pro}(k)^{\text{op}}$ 上の列

$$0 \rightarrow F(U) \rightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \rightarrow \prod_{j, k \in I} F(U_j \cap U_k) \quad (3.1)$$

が完全であるときをいう.

余層全体から成る $\text{PCsh}(k_X)$ の充満部分圏を $\text{Csh}(k_X)$ と書く. さて, 層の理論では層化と呼ばれる前層から層を構成する手続きがあったが, 余層の理論においても同様の結果がある.

定理 3.2. (i) 忘却関手 $\text{Csh}(k_X) \rightarrow \text{PCsh}(k_X)$ は左随伴関手を持つ.

(ii) $\text{Csh}(k_X)$ は k 作用を持つアーベル圏である.

前余層から余層を構成する手続きの存在が, この定理によって保証される. この手続きを余層化 (cosheafification) と呼ぶ. 定理 3.2 の証明には定理 2.1 の (3) が使われるため, 前余層の定義において $\text{Pro}(k)$ を $\text{Mod}(k)$ に置き換えた場合, 定理 3.2 の類似物を得るのは難しいと思われる.

余層の理論は層の理論と多くの部分で並行して議論が行えるが, 幾つか異なる部分もある. 例えば, U を X の開集合とすると, X 上の余層 F を $\text{Op}(U)^{\text{op}}$ 上の関手として制限すれば, U 上の余層になる. これを $F|_U$ と書くとき, 次の命題が成り立つ.

命題 3.3. F と G を X 上の余層とする. このとき,

$$U \mapsto \text{Hom}_{\text{Csh}(k_U)}(F|_U, G|_U)$$

は X 上の層となる.

命題 3.3 で得られた層を $\text{Hom}_{k_X}(F, G)$ と書く. Hom は層の圏で閉じていたが, 余層の圏では閉じていない.

さて, Hom を利用すれば, 環層の作用を持つ余層の定義が出来る. \mathcal{R} を X 上の k_X 代数, F を X 上の余層とすると, $\text{Hom}(F, F)$ は環の構造を持つ層になる. このとき, 環の準同型写像 $\nu_F: \mathcal{R} \rightarrow \text{Hom}(F, F)$ を与えることを, \mathcal{R} の F への作用を与えるという. また, \mathcal{R} 作用を持つ 2 つの余層 $(F, \nu_F), (G, \nu_G)$ が与えられたとき, 余層の準同型写像 $\varphi: F \rightarrow G$ で ν_F と ν_G と可換なものを, (F, ν_F) から (G, ν_G) への射という. これにより, \mathcal{R} 作用を持つ余層の成す圏が定義される. この圏を $\text{Csh}(\mathcal{R})$ と書く. 圏 $\text{Csh}(\mathcal{R})$ は k のとり方に依存するので, 本当は $\text{Csh}(k_X \rightarrow \mathcal{R})$ 等と書くべきであるが, 以下 k は全体を通して 1 つ固定するので, 誤解は生じないだろう.

4 関手

層の上の関手として順像や逆像, Hom や \otimes があつたが, 余層の圏上でも類似の関手が定義される. まず, 順像と逆像について考えよう. $f: Y \rightarrow X$ を位相空間 Y から X への連続写像とする.

定義 4.1. Y 上の余層 G に対し, X 上の余層 f_*G を

$$U \mapsto G(f^{-1}(U))$$

で定める. この余層を G の f による順像という.

F を X 上の余層とする. V を Y 上の開集合とすると, 関手

$$V \mapsto \varinjlim_{f(U) \subset V} G(U)$$

は Y 上の前余層を定める. この余層化を F の f による逆像と呼び, $f^{-1}F$ で書き表す.

順像や逆像は, 環 \mathcal{R} の作用を持つ余層にも拡張される. 即ち, 次の関手が存在する.

$$\begin{aligned} f_* &: \text{Csh}(f^{-1}\mathcal{R}) \rightarrow \text{Csh}(\mathcal{R}), \\ f^{-1} &: \text{Csh}(\mathcal{R}) \rightarrow \text{Csh}(f^{-1}\mathcal{R}). \end{aligned}$$

また, これらの関手は互いに随伴である. すなわち,

$$\text{Hom}_{\text{Csh}(f^{-1}\mathcal{R})}(f^{-1}F, G) \simeq \text{Hom}_{\text{Csh}(\mathcal{R})}(F, f_*G)$$

が成り立つ. 以上を振り返ると分かるように, 順像と逆像に関しては層の場合と形式上まったく同じである. また, Γ_Z や $(\cdot)_Z$ といった関手も順像と逆像を組み合わせて, 同様に定義が出来る.

次に, 多重関手について考えよう. 層の理論では Hom と \otimes の 2 つがあつたが, 余層の理論では $\text{Hom}, \otimes, \text{Chom}$ の 3 種類が存在する. 即ち, 次の定理が成り立つ.

定理 4.2. 関手

$$\begin{aligned} \cdot \otimes_{k_X} \cdot &: \text{Sh}(k_X) \times \text{Csh}(k_X) \rightarrow \text{Csh}(k_X), \\ \text{Chom}_{k_X}(\cdot, \cdot) &: \text{Sh}(k_X) \times \text{Csh}(k_X) \rightarrow \text{Csh}(k_X) \end{aligned}$$

が存在して、次の同型が成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Sh}(k_X)}(A, \text{Hom}_{k_X}(F, G)) &\simeq \text{Hom}_{\text{Csh}(k_X)}(A \otimes_{k_X} F, G) \\ &\simeq \text{Hom}_{\text{Csh}(k_X)}(F, \text{Chom}_{k_X}(A, G)) \end{aligned}$$

ここで、 A は層、 F と G は余層である.

層の理論では1つだった関手 Hom が、余層の圏では Hom と Chom の2つに分かれ、ここが層と余層の理論の大きな違いである. 詳細は省略するが、環 \mathcal{R} の作用を含めた多重関手 $\otimes_{\mathcal{R}}$ や $\text{Chom}_{\mathcal{R}}$ の定義も出来る.

5 導来圏

ここでは、余層の圏上の導来関手について考える. 層の圏は単射的对象 (injective object) を十分に持つことを使って、 $R\text{Hom}$ 等の導来関手が簡単に得られる. 余層の圏においても単射的对象の定義は出来るが、十分に持つことは証明されていない (おそらく十分に持たないと思われる) ため、導来関手の定義は難しくなる. まず、injective より弱い概念である c -injective object を導入して、この問題を解決する. $\text{CHom}(\cdot, \cdot) := \Gamma(X; \text{Chom}_{k_X}(\cdot, \cdot))$ と置く.

定義 5.1. $I \in \text{Csh}(k_X)$ が c -injective であるとは、関手 $\text{CHom}_{k_X}(\cdot, I)$ が完全であるときをいう.

c -injective object が十分に存在するかどうかについては、次の結果が知られている.

定理 5.2. k を体と仮定する. このとき、 $\text{Csh}(k_X)$ には c -injective object が十分豊富に存在する.

k が幾つかの具体的な可換環の場合にも、上の定理が成り立つことを確認しているが、任意の可換環の場合は未解決である. 簡単のため、以下、 k は体と仮定する. k_X 代数 \mathcal{R} の作用を持つ余層の導来圏を $\text{D}(\text{Csh}(\mathcal{R}))$ と書く. 下に (上に) 有界な複体からなる $\text{D}(\text{Csh}(\mathcal{R}))$ の充満部分圏を $\text{D}^+(\text{Csh}(\mathcal{R}))$ ($\text{D}^-(\text{Csh}(\mathcal{R}))$) と書く. 定理 5.2 より次を得る.

定理 5.3. k を体、 \mathcal{R} を k_X 代数とする. このとき、導来関手

$$R\text{Chom}_{\mathcal{R}}(\cdot, \cdot) : \text{D}^-(\text{Sh}(\mathcal{R}))^{\text{op}} \times \text{D}^+(\text{Csh}(\mathcal{R})) \rightarrow \text{D}^+(\text{Csh}(k_X))$$

が存在し、次が成り立つ.

$$\text{Hom}_{\text{D}^+(\text{Csh}(\mathcal{R}))}(A \otimes_{k_X} F, G) \simeq \text{Hom}_{\text{D}^+(\text{Csh}(k_X))}(F, R\text{Chom}_{\mathcal{R}}(A, G)).$$

$\otimes_{\mathcal{R}}$ の左導来関手 $\otimes_{\mathcal{R}}^L$ についても、層の圏が十分に平坦な対象を持つことを使えば定義が出来る. c -injectivity は injectivity より弱い概念だから、余層上の $R\text{Hom}$ は定義されない. しかし、順像 f_* や逆像 f^{-1} から誘導される導来関手

$$\begin{aligned} Rf_* &: \text{D}^+(\text{Csh}(f^{-1}\mathcal{R})) \rightarrow \text{D}^+(\text{Csh}(\mathcal{R})), \\ f^{-1} &: \text{D}^+(\text{Csh}(\mathcal{R})) \rightarrow \text{D}^+(\text{Csh}(f^{-1}\mathcal{R})) \end{aligned}$$

は層の場合と同様に得られ、随伴公式等がそのまま成立する.

6 Verdier 双対

k を体, X および Y を局所コンパクト・ハウスドルフ空間, $f: Y \rightarrow X$ を連続写像とする. このとき, $F \in \text{Csh}(f^{-1}\mathcal{R})$ の f による固有的順像 $f_!F \in \text{Csh}(\mathcal{R})$ を

$$U \mapsto \varinjlim_L \Gamma_L(f^{-1}(U); F)$$

で定義する. ただし, L は $f^{-1}(U)$ の中で閉集合で $f: L \rightarrow U$ が固有写像になるようなもの全体を動く. 定理 5.2 より関手 $f_!$ の右導来関手

$$Rf_! : \mathbf{D}^+(\text{Csh}(f^{-1}\mathcal{R})) \rightarrow \mathbf{D}^+(\text{Csh}(\mathcal{R}))$$

が得られる. 以下, X および Y は有限の柔軟次元 (soft dimension) を持つと仮定する. このとき, 余層に関する Verdier 双対定理は次のようになる.

定理 6.1. 導来関手 $Rf_! : \mathbf{D}^+(\text{Csh}(k_Y)) \rightarrow \mathbf{D}^+(\text{Csh}(k_X))$ は右随伴関手 $f^!$ を持つ. 即ち, 次が成り立つ.

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}^+(\text{Csh}(k_X))}(Rf_!F, G) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(\text{Csh}(k_Y))}(F, f^!G).$$

さらに, 今まで述べた導来関手を組み合わせることにより, もう 1 つの Verdier 双対とも言うべき公式が得られる. $A \in \mathbf{D}^b(\text{Sh}(k_Y))$, $F \in \mathbf{D}^+(\text{Csh}(k_X))$ とすると,

$$R\text{Chom}_{k_X}(Rf_!A, F) \simeq Rf_*R\text{Chom}_{k_Y}(A, f^!F)$$

が成り立つというものである.

7 応用

以下, k は複素数体 \mathbb{C} と仮定する. E, P, j といった記号は 1 節のものをそのまま使うことにする. E 上の (原点を頂点とする) 解析的開錐 U に対し, $\text{CWHom}(\mathbb{C}_U, \mathcal{C}_E^\infty) := \Gamma(P; j_!\mathbb{C}_U \otimes^{\mathbb{W}} \mathcal{C}_P^\infty)^{\text{op}}$ と置けば, 関手

$$U \mapsto \text{CWHom}(\mathbb{C}_U, \mathcal{C}_E^\infty)$$

は E 上の錐的な前余層となる. この余層化を $\mathcal{C}_E^{\infty\text{cw}}$ と書く. \bar{E} を E の共役複素線形空間とすると, $\mathcal{C}_E^{\infty\text{cw}}$ は \bar{E} 上の共役複素 Weyl 代数 $D(\bar{E})$ の右からの作用を持つ.

定義 7.1. Whitney 正則関数の余層を

$$\mathcal{O}_E^{\text{cw}} := \mathcal{C}_E^{\infty\text{cw}} \otimes_{D(\bar{E})}^L \mathcal{O}(\bar{E})$$

で定義する. ただし, $\mathcal{O}(\bar{E})$ は \bar{E} 上の共役複素多項式環である.

6 節の結果を使えば, 余層の圏における Fourier・佐藤変換の定義が可能になる. E^* を E の双対空間, その標準複素内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E^* \rightarrow \mathbb{C}$ とし, さらに

$$\begin{aligned} A &:= \{(z, w) \in E \times E^* \mid \Re \langle z, w \rangle \leq 0\}, \\ A' &:= \{(z, w) \in E \times E^* \mid \Re \langle z, w \rangle \geq 0\} \end{aligned}$$

と置く. このとき, $F \in \mathbf{D}_{\mathbf{R}^+}^b(\text{Csh}(E))$ および $G \in \mathbf{D}_{\mathbf{R}^+}^b(\text{Csh}(E^*))$ に対し, F の Fourier · 佐藤変換および G の Fourier · 佐藤逆変換を

$$\begin{aligned} F^\wedge &:= R p_{2!}(p_1^{-1} F)_A, \\ G^\vee &:= R p_{1!}(p_2^! G)_{A'} \end{aligned}$$

で定める. ただし, p_1 および p_2 は射影 $E \xrightarrow{p_1} E \times E^* \xrightarrow{p_2} E^*$ である. これら Fourier · 佐藤変換は層の場合とほぼ同様の性質を満たす. 以上のもとで, 次の主定理を得る.

定理 7.2. $D(E^*)$ 加群としての同型

$$(\mathcal{O}_E^{\text{cw}})^\wedge[n] \simeq \mathcal{O}_{E^*}^{\text{cw}}$$

が存在する.

この定理は (1.1) と Fourier · 佐藤変換の一般論を組み合わることによって証明される. 余層の理論を Schneiders 自身はボレル · ムーアのホモロジーに応用したが, 定理 7.2 のように代数解析に応用した例はこれが初めてであろう.

最後に, 注意を1つ述べておこう. 今, $F \in \mathbf{D}_{\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-}^b(\text{Sh}(\mathbf{C}_E))$ とする. $\text{CWHom}(F, \mathcal{O}_E) := \text{CWHom}(F, \mathcal{C}_E^\infty) \otimes_{D(\overline{E})}^L \mathcal{O}(\overline{E})$ と置くと, 次の自然な射

$$\text{CWHom}(F, \mathcal{O}_E) \rightarrow \text{RCHom}(F, \mathcal{O}_E^{\text{cw}})$$

があるが同型ではないので, ここで述べた $\mathcal{O}_E^{\text{cw}}$ の定義は CWHom の拡張にはなっていない. CWHom の拡張を得るためには, 最近, 柏原 · Schapira が [1] で展開している Indization の考えを余層の理論に組み込めばよいと思われるが, まだ完成していない.

参考文献

- [1] M. Kashiwara and P. Schapira, Ind-Sheaves, *Astérisque* **271** (2001).
- [2] M. Kashiwara and P. Schapira, Integral transforms with exponential kernels and Laplace transform, *Journal of the AMS* **10** (1997), 939–972.
- [3] S-G-A 4, Sémin. Algébrique (1963–64) by M. Artin, A. Grothendieck and J-L. Verdier, Théorie des topos et cohomologie étale de schémas, *Lecture Notes in Math.* 260, 270, 305 (1972–73).
- [4] J-P. Schneiders, Cosheaf homology, *Bull. Soc. Math. Belgique* **39** (1987), 1–31.
- [5] Y. Sugiki, The category of cosheaves and Laplace transforms, *Preprint Series UTMS*, 2001–33.

Yuichi SUGIKI

Department of Mathematical Sciences, the University of Tokyo,
3-8-1, Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, JAPAN
sugiki@ms.u-tokyo.ac.jp