数理解析研究所講究録 1263 巻 2002 年 131-150

秘書問題の最近の展開

愛知大学経営学部　玉置 光司 (Mitsushi Tamaki)
Department of Business Administration, Aichi University

1 はじめに

本稿の目的は最適停止問題 (optimal stopping problem) の中で重要な位置を占める秘書問題 (secretary problem) を紹介することにある．1990 年以前の研究に関しては，Ferguson[6], Samuels[39] のサーベイ論文に詳しいので，そちらを参照していただくとして，本稿では基本的事項の他は，それらがカバーしていない 1990 年以降の研究を中心に紹介する．秘書問題に対しては，必ずしも厳密な定義があるわけではないが，Ferguson は「利得 (損失) が観測値に，その相対順位を通してのみ依存する逐次観測と選択の問題」と定義している．この分野の第一人者である Samuels もこの定義に賛意を表明していて，このあたりが妥当な定義と思われる．

2 無情報型問題

最に最も単純なクラスの問題の性質 (特徴) を列挙することから始める．

1　秘書の採用は 1 人である．
2　応募者総数 n は既知である (便宜上，毎時 1 人ずつ出現するものとする)．
3　応募者はランダムな順序で面接に臨む．すなわち，$n!$ 通りの面接順序は等確率で起こる．
4　採用側は応募者を評価することができる．すなわち，応募者を一堂に集めれば，1(最良) から n (最悪) まで順位 (絶対順位) を付けることができる．実際は 1 人ずつ出現するので，採否の決定は応募者の相対順位 (既に面接をすませた人の間での順位) に基づいて行われる．
5　一度断った人を後から採用することは許されない．
6　絶対順位 i の者を採用したときの損失を $q(i)$ とする．採用側の選択基準は期待損失を最小にすることである．

性質 3 より，r 番目の応募者の相対順位 A_r は次の性質

(i) $A_1, \ldots, A_n$ は独立な確率変数列となる．
(ii) $P(A_r = s) = 1/r, \ \ 1 \le s \le r, \ 1 \le r \le n.$

を持つことが分かる．r 番目の者の相対順位が s である状態を (r, s) で表すと，この状態において r 番目の者の真の順位が i である確率は，性質 3 より

$$p_i(r,s) = \binom{i-1}{s-1}\binom{n-i}{r-s}\Big/\binom{n}{r}, \quad s \le i \le n+s-r$$

で与えられる．従って，(r,s) において最適決定を取った時の期待損失を $v(r,s)$ と
式が成立する．

$$v(r,s)=\min\left\{\sum_{i=s}^{n+s-r} q(i)p_i(r,s),\ \frac{1}{r+1}\sum_{t=1}^{r+1} v(r+1,t)\right\},\quad v(n,s)=$$

このクラスの中でも，とりわけ多くの研究者が関心を払ってきた問題は次の 2

(a) 最良選択問題 (best-choice problem) : $q(1)=0,\ q(i)\equiv 1,\ 2\le i\le n$
(b) 順位最小化問題 (rank minimization problem) : $q(i)=i,\ 1\le i\le n$

問題 (a) はベストを選ぶ (このことを成功と呼ぶ．最良選択問題以外においても，
否かを問題にする時，達成されることを成功と呼ぶ) 確率を最大化する問題と等価
問題 (probability maximization problem) とも呼ばれる．この問題は Lindley[20] が
and Mosteller[10] が多方面に拡張した．問題 (b) は Lindley[20] が定式化し，Cho
最良選択問題においては，選択の対象となるのは相対順位が 1 の応募者だけである
補者と呼ぶ．問題 (a),(b) の解は次のように述べられる (利用可能な情報がこのよう
れる問題を，無情報型 (no information) と呼んで，他の情報構造と区別することが

定理 1 (無情報型最良選択問題) $r_n=\min\{1\le r<n : a_r\le 1\}$ と定義する．ただ
される．

$$a_r=\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\cdots+\frac{1}{n-1},\quad 1\le r<n$$

最適政策 σ_n は最初の r_n-1 人を流し (断り)，それ以降の最初の候補者を選ぶこと
しない場合は，最後の人を選ぶ)．この時の成功確率は $\phi_n=(r_n-1)a_{r_n-1}/n$ で与
した時の漸近挙動は次のようになる．

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{n}=e^{-1}\approx 0.3679.$$

定理 2 (無情報型順位最小化問題) r の非減少関数 $s^*(r)$ が存在し，状態 (r,s) にお
$s^*(r)$ の時に限り応募者を選ぶことである．$n\to\infty$ の時，最適政策の下での期待
れる．

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j+2}{j}\right)^{1/(j+1)}\approx 3.8695$$

3 完全情報型問題

秘書問題の研究の端緒となった問題とその結果を最初に紹介したが，これを含め
概観するには Samuels[39] や Ferguson[6] のサーベイ論文が便利である．Samuels は
で，引用文献が豊富で，多岐にわたる問題を手際よく分類整理している．他方，"Who
problem ?" と題した Ferguson の論文は，主要な文献を紹介しながら時間を遡って
探っていく．活字になった最初の文献として，Scientific American 1960 年 2 月号に

よる Mathematical games のコラム [9] を挙げている．このコラムには秘書問題とい
グーゴル (Googol) と呼ばれる数当てゲームとして紹介されている．グーゴルにはも．
いは天文学的な大きな数という意味があり，次のように述べられている．

(Googol) 誰かに好きな枚数だけカードを取らせて，それぞれのカードの表に１つす
字を書かせなさい．数字は０に近い小さな数でもよいし，グーゴルのような大きな数
上の数であってもかまいません．数を書き終えたら，カードを重ねてよくシャッフル
テーブルの上に置きます．あなたは上から１枚ずつカードをめくり，そこに書かれて
きます．あなたの目的は全体の中で１番大きな数字が出たと思ったら，そこでストッ
す．既に流したカードに戻ることは許されません．また，すべてのカードをめくって
のカードを選ばなければなりません．

Scientific American １９６０年３月号に，早速グーゴルの解が紹介されているが，
を無情報型最良選択問題と見なしたものであった．このように見なすことはもちろん可
ゴルではカードに具体的な数字を記入するので，この特性を反映したモデル化として
質４を次の $4'$ で置き換えたモデルが適切かもしれない．

$4'$　r 番目の応募者の評価値 (観測値) を X_r で表す．$X_1,\ldots,X_n$ は独立同分布に従
列で，既知の (共通の) 分布関数 F を持つ．面接によって応募者の評価値が観測され，
否の決定が行われる．

一般に，応募者についての利用可能な情報が $4'$ で与えられる問題を完全情報型 (ful
題と呼ぶ．グーゴルを完全情報型最良選択問題と見なして解いたのは，Gilbert and
る．その後，この問題は，Sakaguchi[31] や Samuels[37] によって詳しく調べられた．
般性を失うことなく，区間 $(0,1)$ 上の一様分布を仮定することができる．これについ
とめると次のようになる．

定理 3 (完全情報型最良選択問題) r 番目の応募者が候補者で，その観測値が x である
数列 $\nu_r, r=1,2,\ldots$ を $\sum_{j=1}^{r}(x^{-j}-1)/j=1$ の根 x として定義すると，状態 (r,x) は
$x\geq\nu_{n-r}$ の時に限って，r 番目の応募者を選ぶことである．成功確率は $v_n=\Big[1+\sum_{r=1}^{n-1}$
で与えられ，$n\to\infty$ の時，

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}v_n=e^{-c}+(e^c-c-1)\int_1^\infty x^{-1}e^{-cx}dx\approx 0.580164$$

となる．ただし，$c\approx 0.80435$ で，これは $\sum_{j=1}^{\infty}c^j/j!j=1$ の根として求められる．ま
$\nu_n)=c$ も成立する．

順位最小化問題についても完全情報型の研究が最近になって Bruss and Ferguson[4]
Cahn[2] によって報告されているが，まだ完全には解明されていない．この問題の
が過去の観測値すべてに依存するところにある．すなわち，r 番目を選ぶか否かの決
なく，$X_1,\ldots,X_{r-1}$ にも依存する．知られている主要な結果は次のようなところで
として，$(0,1)$ 上の一様分布を仮定することができる)．

定理 4 (完全情報型順位最小化問題) $X_1,\ldots,X_n$ の中の最小を絶対順位 1 に，2 番目に小さいものを絶対順位 2 に，...のように対応させる．n 個の与えられた定数 $a_1,\ldots,a_n$(ただし，$0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n = 1$) に対して，$t_n = \min\{r : X_r \le a_r\}$ で定義される停止ルールをしきい値ルールと呼ぶ (停止か否かが現時点の評価値のみによって決まるルール)．t_n の下で達成される期待順位は

$$w_n(t_n) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1}(1-a_i)\right)\left[(n-k)a_k^2 + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{(a_k-a_j)^2}{1-a_j}\right]$$

で計算される．さらに，$w_n = \inf_{t_n \in T_n} w_n(t_n)$ (T_n は可能なしきい値ルール t_n の集合を表す) とし，$w = \lim_{n\to\infty} w_n$ とすると，次のことが示される．

$$2.295 < w < 2.327.$$

注 (1) e^{-1} と α, $\prod(\frac{j+2}{j})^{1/(j+1)}$ と w の比較.

(2) n が有限の場合，最適政策 t_n^* は関数列 $h_r^{(n)}(x_1,\ldots,x_{r-1})$ が存在して $t_n^* = \min\{r : X_r \le h_r^{(n)}(X_1,\ldots,X_{r-1})\}$ と表される．すなわち，定理 4 は政策をしきい値ルールの範囲に限定しても期待順位を 2.327 以下におさえられることを意味している．$n \to \infty$ の時，しきい値ルールの中に最適政策が存在するか否かは未解決である．

4 秘書問題の単純な拡張

代表的な確率最大化問題として 1 節では最良選択問題を紹介したが，この一般化として初期の段階からよく研究されてきた問題で，損失関数が $q(i) \equiv 0, 1 \le i \le k$, $q(i) \equiv 1, k < i \le n$ で与えられるものがある．すなわち，絶対順位 k 以下の者を選ぶ確率を最大にする問題である．これを便宜的にベスト k 問題と呼ぼう．この研究は Gusein-Zade[14], Gilbert and Mosteller[10] に始まったが，Frank and Samuels[8] は k を大きくした時，この問題の根底に潜む興味深い定数を発見した．

定理 5 (ベスト k 問題) r 番目の応募者の相対順位が s である状態を (r,s) で表す．k 個の整数 $\{t_j(k)\}_{j=1}^{k}$ ($t_j(k)$ は j に関して非減少) が存在して，最適政策は最初の $t_1(k)-1$ 人を流し，それ以降最初に $r \ge t_s(k)$ を満足する状態 $(r,s), 1 \le s \le k$ で停止することである．漸近的結果は次のようになる．ただし，$t_j^*(k) = \lim_{n\to\infty} t_j(k)/n$.

(*i*) $k=2$ の時，$t_1^*(2) = \phi \approx 0.347$, $t_2^*(2) = 2/3$ となり，成功確率は $1-(1-\phi)^2 \approx 0.574$ で与えられる．ただし，ϕ は $\phi - \ln\phi = 1 - \ln(2/3)$ の根.

(*ii*) k を大きくすると，次のことが示される．$\alpha(t)$ を微分方程式

$$\alpha'(t) = \left\{\frac{1-\alpha(t)}{1-t}\right\} \Big/ \ln\left\{\frac{t(1-\alpha(t))}{(1-t)\alpha(t)}\right\}, \quad t \in (t^*, 1) \quad (\alpha(1) = 1)$$

の解とし，t^* を $\alpha(t) = 0$ の根とすると，$t^* \approx 0.2834$ であり，さらに $\lim_{k\to\infty} t_j^*(k) = t^*, j = 1, 2, \ldots$ が成立する．

ベスト k 問題の完全情報型はまだほとんど解かれていない ($k=2$ の部分的な研究としては Sakaguchi[35] がある) が，Hill and Kennedy[17] は性質 4′ の $X_1,\ldots,X_n$ の独立同分布性の仮定を独立性だけの仮定に緩めて，Shur convex の性質を利用して成功確率のシャープ (sharp) な下限を導出した．シャープとはその下限を等号で成立させる分布が存在することを意味する．$n \to \infty$ の結果のみ紹介する．

定理 6 (H&K のベスト k 問題) 評価値 $X_1, \ldots, X_n$ が独立な確率変数列の時，$n \to \infty$ とした時の成功確率のシャープな下限 $\varphi(k)$ は次式で与えられる．

$$\varphi(k) = \exp\left\{-(k!)^{1/k}\right\} \sum_{r=0}^{k-1} (k!)^{r/k}/r!, \quad k = 1, 2, \ldots$$

注 （1）$\varphi(1) = e^{-1}$ であるから，$k = 1$ の場合無情報の結果 (定理 1) と一致するが，$k \geq 2$ の場合は $\varphi(k) > p(k)$ となって (相対順位のみならず) 分布を知ることの効果が表れる．
（2）Hill and Kennedy は順位最小化問題も考察していて，$n \to \infty$ の時，期待順位のシャープな上限として $1 + \ln n$ を導いている．

上述の問題では選択の順位に拘ったが，Tamaki and Shanthikumar[51] は性質 4$'$ の下で，選んだ者がベストに比して遜色なければよしとする問題を考察した (したがって，この問題は Ferguson の意味では秘書問題の範疇に入らない)．すなわち，$M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ の関数として allowance function $\rho(M_n)$ を導入し，次式を満足する最適停止時刻 τ^* について論じた (T は $X_1, \ldots, X_n$ に適合する停止時刻 τ の集合)．

$$P\{X_{\tau^*} \geq M_n - \rho(M_n)\} = \sup_{\tau \in T} P\{X_\tau \geq M_n - \rho(M_n)\}.$$

順位最小化問題に関しては Robbins(1989) による次の一般化がある．

定理 7 損失関数が $q(i) = i(i+1)\cdots(i+k-1)$ (k は 1 以上の整数) で与えられる時，最適政策の下での期待順位は $n \to \infty$ の時，次の値に収束する．

$$k! \left\{ \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+k+1}{j} \right)^{1/(k+j)} \right\}^k.$$

5 拒否とリコール

この節では，柔軟性を加味したモデルを紹介する．最初に 5.1 節で，採用の不確実性を導入する．これは採用側の申し出を応募者が拒否する可能性があることを意味する．たとえばこれは結婚問題でプロポーズが断られることに相当するもので，状況によっては自然な仮定と考えられる．5.2 節ではリコールを導入する．リコールとは一度流した応募者に後から採用を申し出ることである．2 節の性質 5 はリコールが許されないことを述べているが，これを変更してリコールの可能性を考慮する．

5.1 拒否

この問題を最初に扱ったのは Smith[41] で，彼は応募者がその順位や出現時刻に無関係に確率 q で申し出を断る (逆にいえば，確率 $p \equiv 1 - q$ で申し出に応じる) と仮定した．申し出に応じる応募者のことを便宜的にアベイラブル (available) と呼ぼう．応募者のアベイラビイリティは申し出を行うことによって初めて分かる．すなわち，申し出が受け入れられれば，アベイラブルであることが，断られればアベイラブルでないことが判明するものとする．最良選択問題の最適方程式は次のようになる．

$$v_{r-1} = \frac{1}{r} \max\left\{ p\left(\frac{r}{n}\right) + q v_r,\ v_r \right\} + \frac{r-1}{r} v_r, \quad v_n = 0$$

上式で，v_{r-1} は最初の $r-1$ 人を流し時刻 r 以降，最適に振舞ったときの成功確率を
政策がしきい値ルールとなることを示し，その臨界値と成功確率を求め，その漸近
果は定理 9 の注で示す)．ただし，この場合の臨界値 r のしきい値ルールとは，時刻
補者に引き続いて採用を申し出ることを意味する (すなわち，最初のアベイラブルな
で面接は続く)．Smith は応募者全体の中でのベストの選択を目的としたが，Tamak
な者の中でのベストの選択を目的とした．r 番目の応募者の相対順位が s である状
で表す．ここで，$(i_1,\ldots,i_k)$ は拒否履歴 (rejection history) と呼ばれるもので，過
し出を行ったがすべて断られたこと，そして，この k 人の ($r-1$ 人の中での) 相対
べたとき $i_1,\ldots,i_k$ $(1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r-1)$ となっていることを意味する．まだ
いない場合，拒否履歴は ϕ で表される．状態 $(r,s\ ;\ i_1,\ldots,i_k)$ で r 番目の応募者に
行わない場合に対応して，拒否履歴はそれぞれ $(i_1,\ldots,i_k)*s$, $(i_1,\ldots,i_k)\circ s$ に改

$$(i_1,\ldots,i_k)*s=\begin{cases}(s,i_1+1,\ldots,i_k+1), & \text{if } 1\le s\le i_1\\ (i_1,\ldots,i_{t-1},s,i_t+1,\ldots,i_k+1), & \text{if } i_{t-1}<s\le i_t \ (2\le\\ (i_1,\ldots,i_k,s), & \text{if } i_k<s\le r\end{cases}$$

$$(i_1,\ldots,i_k)\circ s=\begin{cases}(i_1+1,\ldots,i_k+1), & \text{if } 1\le s\le i_1\\ (i_1,\ldots,i_{t-1},i_t+1,\ldots,i_k+1), & \text{if } i_{t-1}<s\le i_t \ (2\le\\ (i_1,\ldots,i_k), & \text{if } i_k<s\le r.\end{cases}$$

である (ただし，申し出を行った場合は，それが断られたと仮定しての履歴である)．
$t\le k : i_t < s\}$ で定義し

$$g_r(s,j)=\sum_{i=s}^{n-r+s} q^{i-j-1}p_i(r,s)$$

とすると，この問題の最適方程式は次式で与えられる．

$$v_{r-1}(i_1,\ldots,i_k)=\frac{1}{r}\sum_{s=1}^{r}\max\left\{pg_r(s,j)+qv_r\left((i_1,\ldots,i_k)*s\right),\ v_r\left((i_1,\ldots,i\right.\right.$$

定理 8 状態 $(r,s\ ;\ i_1,\ldots,i_k)$ における最適決定は，時刻 r と拒否履歴 $(i_1,\ldots,i_k)$ に
$d_r(i_1,\ldots,i_k)$ に対して，$s\le d_r(i_1,\ldots,i_k)$ の時，r 番目の応募者に採用を申し出る
功確率は $v_0(\phi)$ で与えられる．

再び Smith[41] の問題に戻る．そこでは各応募者がアベイラブルである確率を順位
したが，これを順位に依存させると問題は格段に難しくなる．Tamaki and Ohno[5
募者がアベイラブルである確率を $p_i, 1\le i\le n$ として，次の最適方程式を導いた．
の場合も拒否履歴が決定に関与する．

$$\begin{aligned}v_{r-1}(i_1,\ldots,i_k) &= \frac{1}{r}\max\left\{\frac{r}{n}b_{r-1}(i_1,\ldots,i_k)+v_r\left((i_1,\ldots,i_k)*1\right),\ v_r\left((i_1,\right.\right.\\ &\quad +\frac{1}{r}\sum_{s=2}^{r}v_r\left((i_1,\ldots,i_k)\circ s\right)\end{aligned}$$

ここで，$b_{r-1}(i_1,\ldots,i_k)$ は $b_{n-1}(i_1,\ldots,i_k)=\prod_{t=1}^{k} q_{i_t+1}$ から始まって，次式により逐次計算される．ただし，$q_i=1-p_i$ とした．

$$b_{r-1}(i_1,\ldots,i_k)=\frac{1}{r}\sum_{s=1}^{r} b_r\left((i_1,\ldots,i_k)\circ s\right),\quad 1<r<n,$$

申し出を行う対象は候補者に限定され，成功確率は $p_1v_0(\phi)$ で与えられる．q_1 の値は最適政策に影響を与えない．最適政策の一般的性質を調べることは困難であるが，しきい値ルールがもはや最適とは限らない．たとえば，$q_i\equiv q, 3\le i\le n$ の時，次の結果が成立する．

定理 9 ($q_i\equiv q, 3\le i\le n$ の場合) *(i)* ケース 1 *($q_2\ge q$ の場合)* 最適政策は臨界値 r のしきい値ルールとなる．漸近的な結果は次のようになる．$t=\lim_{n\to\infty} r/n$ は次の方程式の根として与えられる．

$$2q(q_2-q)t^{1+q}-(1+q)(1-q+q_2)t^q+(1-q)(1+q_2)=0$$

また，成功確率は次式で与えられる．

$$p_1t\left\{q(q_2-q)t+(1+q_2)t^{-q}-(1+q)(1-q+q_2)\right\}/q(1+q).$$

(ii) ケース 2 *($q_2<q$ の場合)* 2 数 $r_1, r_2 (r_1\le r_2)$ が存在して，最適政策は最初の r_1-1 人を流し，それ以降の最初の候補者に採用を申し出る．この者が時刻 r に出現し，申し出を断った場合，以後の決定は $r\ge r_2-1$ か $r<r_2-1$ かに従って次のように異なる．

$(r\ge r_2-1)$ の場合．以降の候補者に逐次申し出る．

$(r<r_2-1)$ の場合．以後の候補者の出現時刻が r_2-1 以前の場合は候補者への申し出を 1 回ずつ見送る．ただし，時刻 r_2 までに決まらなかった場合，それ以降は候補者に逐次申し出る．漸近的な結果は次のようになる．$t_i=\lim_{n\to\infty} r_i/n, i=1,2$ とする．t_2 は次の方程式の根 t として与えられる．

$$(1-q)(q-q_2)t^{1+q}-(1+q)(1-q+q_2)t^q+(1-q)(1+q_2)=0$$

t_1 は次式で与えられる．

$$t_1=\{(1-\sqrt{q})C_1/(1+\sqrt{q})C_2\}^{1/2\sqrt{q}}$$

ただし，C_1, C_2 は次式で与えられる．

$$C_1=\frac{(t_2)^{\sqrt{q}}}{2q(1+q)}[(1-\sqrt{q})(q-q_2)qt_2+(\sqrt{q}+q)(1+q_2)(t_2)^{-q}-\sqrt{q}(1+q)(1-q+q_2)],$$

$$C_2=\frac{(t_2)^{-\sqrt{q}}}{2q(1+q)}[(1+\sqrt{q})(q-q_2)qt_2-(\sqrt{q}-q)(1+q_2)(t_2)^{-q}+\sqrt{q}(1+q)(1-q+q_2)].$$

また，成功確率は次式で与えられる．

$$C_1(t_1)^{1-\sqrt{q}}+C_2(t_1)^{1+\sqrt{q}}.$$

注(1)　$q_1=\cdots=q_n=q$ の時は Smith の問題に他ならない．最適政策はしきい値ルールとなる．臨界値を r とすると，漸近的に，$\lim_{n\to\infty} r/n=p^{1/q}$ となり，成功確率も $p^{1/q}$ に近づく．

(2)　Tamaki and Ohno は自然な仮定 $q_1\ge q_2\ge\cdots\ge q_n$ の下で最適政策がしきい値ルールとなることを予想しているが，未解決である．

(3)　Tamaki[52] はベスト 2 問題についても論じている．

順位最小化問題に関して，Tamaki[54] は次の結果を得た．

定理 10 拒否確率が等しい場合 (すなわち，$q_1 = \cdots = q_n = q$ の場合)，最適政策の下での期待順位は $n \to \infty$ とした時，次式で与えられる．

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left\{1+\frac{2}{j}\left(\frac{1+pj}{1+q+pj}\right)\right\}^{\frac{1}{1+pj}}$$

5.2 リコール

話を最良選択問題に限定する．既に r 人を面接しているが，その中のベストが t 時点前，すなわち，時刻 $r-t$ に出現している状態を (r,t) で表す $(t=0,1,\ldots,r-1)$．また，(r,t) において，ベストに採用を申し出る時，それが受け入れられる確率を，経過時間 t に依存させて $d(t)$ とする．ただし，一度申し出を断った者に対しては２度と申し出ることはない (このことを $t=\infty$ で表す．この場合，採用対象は，将来に出現する者に限られる)．(r,t) において最適決定を取った時の成功確率を $v(r,t)$ で表すと次の最適方程式が成立する．

$$v(r,t) = \max\left\{\left(\frac{r}{n}\right)d(t)+v(r,\infty)(1-d(t)),\ \frac{1}{r+1}v(r+1,0)+\frac{r}{r+1}v(r+1,t+1)\right\},$$

ただし，境界条件は $v(n,t)=d(t)$, $v(r,\infty)=\{v(r+1,0)+rv(r+1,\infty)\}/(r+1)$

Yang[60] や Petruccelli[25] はケース 1 $(d(0)=q, d(t)\equiv p, t\geq 1)$，ケース 2 $(d(t)=qp^t, t\geq 0)$ を，Smith and Deely[42],Rocha[29] はケース 3 $(d(t)=1, 0\leq t\leq m-1, d(t)=0, m\leq t)$ を調べた．ケース２は，リコールの受け入れ可能性が時間の経過と共に減少するモデルを，ケース３は過去 (現時点も含めて)m 時点まで自由に戻ることができる有限記憶モデルを表している．ここでは，ケース３の結果を紹介する (この場合は，$t=\infty$ の状態は出現しないので，最適方程式を少し修正する必要がある)．最適政策の下でリコールするのは $t=m-1$ の時に限られることはすぐ分かるであろう．このような時点を便宜上，決定時点と呼ぶ．

定理 11 (無情報型有限記憶最良選択問題) 整数 r^* が存在し，最適政策は最初の r^* 人を流し，それ以降最初の決定時点で見かけのベストにリコールすることである．$m/n\geq\frac{1}{2}$ の時，$r^*=m$ で，成功確率は，$2-m/n-a_m$ で与えられる．$n\to\infty$ の時は，$\beta=\lim_{n\to\infty}m/n\geq\frac{1}{2}$ の場合，成功確率は $2-\beta+\log\beta$ となるが，m が有限の場合，e^{-1} に近づく

注　$n\to\infty$ で $0<\beta<1/2$ の場合の成功確率については未解決．Rocha は，上限，下限の導出を試みている．

Tamaki[48] はこの問題の完全情報型を扱っている．既に r 人面接していて，$\max(X_1,\ldots,X_r)=X_{r-t}=x$ である状態を (r,t,x) で表す．この時もリコールが起こるのは $t=m-1$ の場合だけである．

定理 12 (完全情報型有限記憶最良選択問題) 数列 $\{s_r\}_{r=m}^{n}$ が存在し，状態 $(r,m-1,x)$ における最適政策は $x\geq s_r$ の時に限りリコールすることである．s_r の値及び成功確率を計算するため，３つの数列 $\{a_{ij}: 0\leq j\leq i-m, m\leq i\leq n\}$，$\{b_{ij}: 1\leq j\leq i, 1\leq i\leq n\}$，$\{c_{ij}: 1\leq j\leq i, 1\leq i\leq n\}$ を以下のように定義する．

(a) [1] $m\leq i\leq 2m-1$ の時

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & j=0\\ 0, & 1\leq j\leq i-m.\end{cases}$$

[2] $2m \le i \le n$ の時

$$a_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{i-1-m} \frac{a_{i-1,k}}{k+1} - \sum_{k=0}^{i-2m} \frac{a_{i-m,k}}{k+m}, & j=0 \\ 0, & 1 \le j \le m-1 \\ \frac{j-1}{j} a_{i-1,j-1} + \frac{1}{j} a_{i-m,j-m}, & m \le j \le i-m. \end{cases}$$

(b) $b_{ij} = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{i} a_{i-k+m,i-j}$.

(c) $c_{ij} = \sum_{k=j}^{i} b_{k,j}$.

(i) s_r は方程式 $\sum_{j=1}^{n-r} b_{n-r,j}(x^{-j}-1) = 1$ の根で与えられる.

(ii) 数列 $\{A_{ij} : 1 \le j \le i, 1 \le i \le n\}, \{B_{ij} : 1 \le j \le i, 1 \le i \le n\}$ を次式

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{1}{n-j}\left(s_{n-i-1}^{n-j} - s_{n-i}^{n-j}\right) - \frac{1}{n}\left(s_{n-i-1}^{n} - s_{n-i}^{n}\right), \\ B_{ij} &= \frac{1}{i+1-j}\left(s_{n-i-1}^{n-i-1} - s_{n-i-1}^{n-j}\right) - \frac{1}{i+1}\left(s_{n-i-1}^{n-i-1} - s_{n-i-1}^{n}\right) \end{aligned}$$

で定義し，これを用いて $P_k, m \le k \le n$ を次式で定義する.

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{m}{n}\left(s_{k-1}^{n} - s_{k}^{n}\right) + \frac{1}{n-k+1}\left(s_{k-1}^{k-1} - s_{k-1}^{n}\right) + \sum_{i=1}^{n-k}\{(kb_{n-k,i} - c_{n-k,i})A_{n-k,i} + b_{n-k,i}B_{n-k,i}\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-k-m+1}\{(b_{n-k-m+1,i} - c_{n-k-m+1,i})A_{n-k,i} + b_{n-k-m+1,i}B_{n-k,i}\}. \end{aligned}$$

この時，成功確率は，次式で計算される.

$$v_n = \sum_{k=m}^{n} P_k.$$

注 ケース1，2に対する完全情報型は，Petruccelli[25] を参照.

6 Fergusonの秘書問題

Ferguson[6] のサーベイ論文は，最後に意外な結末が控えている．論文のタイトル"Who solved the secretary problem?" を思い出されたい．この問いに対して，Ferguson は何と "Nobody"と答えている．すなわち，まだ誰も解いていないと言うのである．この謎解きは 6.2 節に回すとして，この問題に深く関わる部分情報型問題を 6.1 節で紹介する．また 6.3 節では 6.2 節の話題に関連したゲームを幾つか紹介する．本節では特に断らない限り最良選択問題に限定して考える．

6.1 部分情報型問題

利用可能な情報が性質 $4'$ で与えられる問題を完全情報型の問題と呼んだが，そこにおいて分布 F が未知パラメータを含む場合を特に部分情報型 (partial information) の問題と呼ぶ．例えば，Stewart[44] は，$X_1,\ldots,X_n$ がそれぞれ独立に区間 $(\alpha,\ \beta)$ 上で一様分布する場合の最良選択問題を考察した．ただし，2つのパラメータ α,β の値は未知で，その事前分布が3つのパラメータ (これは既知) を持つ2変量パレート分布 $Pa(k,l_0,u_0)$ に従うものとしてベイジアンの立場からこの問題を解いた．$Pa(k,l_0,u_0), k>0, l_0<u_0$ の密度関数は，次式で与えられる．

$$f(\alpha,\beta\mid k,l_0,u_0)=\frac{k(k+1)(u_0-l_0)^k}{(\beta-\alpha)^{k+2}},\quad \alpha<l_0,\quad u_0<\beta.$$

Petruccelli[23],[24] は，それぞれ $X_1,\ldots,X_n$ が $N(\mu,\sigma^2)$ に従う場合 (μ が未知)，$X_1,\ldots,X_n$ が区間 $(\theta-0.5,\theta+0.5)$ で一様分布する場合 (θ が未知) をミニマックス停止ルール (minimax stopping rule) の観点から論じた．次の定理で漸近的な結果を与える．

定理 13 (部分情報型最良選択問題) n を大きくした時の漸近的成功確率は次のようになる．
(i) Stewart(1978): $e^{-1}\approx 0.3679$ (無情報の場合に一致).
(ii) Petruccelli(1978): $\alpha\approx 0.5802$ (完全情報の場合に一致).
(iii) Petruccelli(1980): 0.4352 (無情報と完全情報の中間).

Tamaki[49] は部分情報型最良選択問題に対してベイジアンの観点から，OLA(one stage look ahead) 停止領域が最適停止領域となるための十分条件を導いた．未知パラメータ θ が与えられた時の X の密度関数を $f(x\mid\theta)$ とし，$\bar{F}(x\mid\theta)=\int_x^\infty f(t\mid\theta)dt$ と定義すると次の結果が得られる．

定理 14 便宜的に $X_1,\ldots,X_n$ の中の小さい値から順に絶対順位 $1,2,\cdots$ と見なす．時刻 r までに $X_1=x_1,\ldots,X_r=x_r$ を観測し，$x_r=\min(x_1,\ldots,x_r)$ である時，この状態を $\mathbf{x}_r=(x_1,\ldots,x_r)$ で表す．状態集合 G を次のように定義する．

$$G=\bigcup_{r=1}^{n-1}\left\{\mathbf{x}_r:\sum_{k=1}^{n-r}(\varphi_{r,k}(\mathbf{x}_r)-1)/k\le 1\right\}\bigcup\{\mathbf{x}_n\}$$

ただし

$$\varphi_{r,k}(\mathbf{x}_r)=E_{\theta|\mathbf{x}_r}\{\bar{F}(x_r\mid\theta)^{n-r-k}\}/E_{\theta|\mathbf{x}_r}\{\bar{F}(x_r\mid\theta)^{n-r}\}$$

であり，$E_{\theta|\mathbf{x}_r}$ は状態 $\mathbf{x}_r$ での θ についての (事後分布による) 期待値を意味している．この時，G がすべての r に対して次の性質

$$\mathbf{x}_r\in G\Longrightarrow \mathbf{x}_{r+j}\in G,\quad j=1,2,\ldots,n-r$$

を満足すれば，G は最適停止領域となる．すなわち，状態が集合 G に到達したら，直ちに停止するのが最適である．

注 6.1 節の Stewart[44] の問題は，この定理の条件を満足する．他の例については Tamaki[49] を見よ．

6.2 Ferguson の秘書問題

Gardner のグーゴルが活字になった最初の秘書問題と考えられていることは既に述べた．また，グーゴルが当初，無情報型最良選択問題として考えられ，その後，完全情報型最良選択問題として解かれたことにも触れた．しかし，Ferguson[6] は秘書問題の原点であるグーゴルに再び立ち戻り，この問題は未解決であると言ったのである．なぜならば，そこで述べられているグーゴルは勝ち負けを競う２人０和ゲームである．すなわち，数字を書く人 (プレーヤー I と呼ぶ) は相手が最も当て難い数字の生成ルールを求め，当てる人 (プレーヤー II と呼ぶ) は，最大数を当て易いように (相対順位だけでなく) カードの数字を参照した停止ルールを求めるゲームと考えられるからである．

この問題に対するヒントが定理１３に隠されている．定理１３ (i) は，カードの枚数 n が十分に大きい場合には，プレーヤー I は２変量パレート分布 $Pa(k, l_0, u_0)$ に従って α, β を発生し，その後，n 個の数字 $X_1, \ldots, X_n$ を区間 (α, β) からの独立な一様確率変数列として生成すれば，プレーヤー II の成功確率を (たとえ彼が，この生成ルールを知っていて，それに最適に対応したとしても) $\lim_{n\to\infty}\phi_n = e^{-1} \approx 0.37$ におさえることができる，すなわち，無情報の場合の成功確率におさえることができることを示している (定理１参照)．しかし，これはあくまでも n が十分に大きい場合の話である．n が有限の場合，成功確率をちょうど ϕ_n におさえる数字の生成は果たして可能か？

グーゴルでは，数字が記入された後，カードはシャッフルされる．したがって，プレーヤー I の戦略集合としては交換可能な連続確率変数列 (exchangeable sequence of continuous random variables) $(X_1, \ldots, X_n)$ の全体を，プレーヤー II の戦略集合としては $(X_1, \ldots, X_n)$ に適合した停止ルールの全体を考えるのが適切であろう．Ferguson[6] は任意の n に対して，X_i が一様分布に従う場合，相対順位だけに基づいた最適停止ルール，すなわち，無情報型最良選択問題の最適政策 σ_n がミニマックス停止ルールとなることを示し (このことは，既に Samuels[36], Berezovskiy and Gnedin[3] によっても示されている)，さらに，プレーヤー I が任意の $\epsilon > 0$ に対してプレーヤー II の成功確率を $\phi_n + \epsilon$ 以下におさえる生成ルールを持つことも示した．Ferguson が示したのは，しかしながらここまでであって，彼はプレーヤー I が ϵ －ミニマックス戦略ではなく，真のミニマックス戦略を持つかどうかについては言及しなかった．Samuels[38] はこれを踏まえて今後解明すべき問題の核心を次のように述べ，これを Ferguson's secretary problem と呼んだ．

$n(\geq 2)$ が与えられたとき，次の条件

(条件) : $(X_1, \ldots, X_n)$ に適合した停止ルール τ のクラスを C とする．このとき，C の範囲での最大成功確率が $(X_1, \ldots, X_n)$ の相対順位だけに依存した最適停止ルール σ_n によって達成される，すなわち，次式が成立する

$$\sup_{\tau\in C} P\{X_\tau = \max(X_1, \ldots, X_n)\} = P\{X_{\sigma_n} = \max(X_1, \ldots, X_n)\} = \phi_n \qquad (A)$$

を満足する交換可能な連続確率変数列 $(X_1, \ldots, X_n)$ が存在すれば，それを求めよ．もしそのような確率変数列が存在しなければそのことを証明せよ．

同じ論文で Samuels は $n = 2$ の場合，Cover(1987) の方法により (A) を満足する交換可能な連続確率変数列が存在しないことを示した．その後，Silverman and Nadas[40] は $n = 3$ の場合，(A) を満足する確率変数列の存在を示した．Ferguson's secretary problem を最終的に解決したのは Gnedin[11] である．彼は $n \geq 3$ の場合，次の定理に示すようにマルコフ連鎖の理論を用いて (A) を満足する確率変数列の密度関数を具体的に求めて見せた．

定理 15 (Ferguson's secretary problem) $n \geq 3$ の時，同時密度関数が次式

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{\epsilon}{2n}[\max(x_1, \ldots, x_n)]^{-n+\epsilon}, & 0 < \max(x_1, \ldots, x_n) < 1 \\ \dfrac{\epsilon}{2n}[\max(x_1, \ldots, x_n)]^{-n-\epsilon}, & \max(x_1, \ldots, x_n) > 1 \end{cases}$$

で与えられる交換可能な連続確率変数列 $(X_1, \ldots, X_n)$ は，ϵ が十分小さい時，(A) を満足する．

注 (1)． 最初に密度関数

$$f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\epsilon}{2}\theta^{\epsilon-1}, & 0 < \theta < 1 \\ \dfrac{\epsilon}{2}\theta^{-\epsilon-1}, & \theta > 1 \end{cases}$$

に従って θ を発生させる．その後，区間 $(0, \theta)$ で一様に分布する確率変数を n 個独立に生成し，この値を $(X_1, \ldots, X_n)$ とすると，これは同時密度 $p(x_1, \ldots, x_n)$ を持つ (Gnedin and Krengel[13])．

(2)．Ferguson's secretary problem は最良選択に関連した問題であるが，順位最小化問題についても定理１５と同様な結果が成立するか？　すなわち，$(X_1, \ldots, X_n)$ に適合した停止ルールの中での最小期待順位が，相対順位だけに基づくルールの下での最小期待順位に一致するような交換可能な連続確率変数列 $(X_1, \ldots, X_n)$ が存在するかという問題である．Gnedin and Krengel[13] は，n が偶数の時，このような $(X_1, \ldots, X_n)$ が存在しないことを証明した．彼等は，更に一般の損失関数 $q(i), 1 \leq i \leq n$ の場合に問題を拡張して考察している．

6.3 秘書問題に関連したゲーム

秘書問題に関連したゲームとしては，Ferguson's secretary problem 以外にも興味深いモデルが種々研究されている．その中から幾つかを紹介する．

6.3.1 Hill and Krengel モデル

無情報型最良選択問題で応募者総数 n の正確な値が分からないとする．このような状況に対処する方法としては，ベイズ的アプローチとミニマックス的アプローチが考えられる．前者は n に適当な事前分布を想定するものであり，Presman and Sonin[28],Yasuda[61] 等の研究がある．ここでは，後者の代表として Hill and Krengel[16] のモデルを取り上げる．このモデルでは，n は未知であるが，上限 m が分かっている，すなわち，n を１以上 m 以下の値を取る確率変数と見なす．採用側の戦略をベクトル $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ で表す．これは j 番目が候補者の時，確率 p_j でこれを採用することを意味する．$\mathbf{p}$ は $0 \leq p_j \leq 1, 1 \leq j \leq m$ を満足するクラスの中から選ばれる．他方，n の分布 $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ は $0 \leq q_j \leq 1$, $\sum_{j=1}^m q_j = 1$ を満足するクラスの中から選ばれる．戦略の組 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ の下での成功確率は

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{m} q_j j^{-1} \sum_{i=1}^{j} p_i \prod_{k=1}^{i-1} (1 - k^{-1} p_k)$$

で与えられ，次の結果が成立する．

定理 16 $s_j = \sum_{i=1}^j 1/i$,　$k_m = r_m + 1$ とし，数列 $\{\alpha_m\}_{m=1}^\infty$ を $\alpha_1 = 1$,　$\alpha_2 = 1/2$,

$$\alpha_m = \frac{s_{m-1} - s_{k_m - 1}}{(m - k_m)/k_m + (s_{m-1} - s_{k_m-1})s_{k_m}}, \quad m > 2$$

で定義すると

$$\sup_{\mathbf{p}} \inf_{\mathbf{q}} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \alpha_m = \inf_{\mathbf{q}} \sup_{\mathbf{p}} V(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

となり，最適戦略の組 $\mathbf{p}^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*), \mathbf{q}^* = (q_1^*, \ldots, q_m^*)$ は次のように与えられる．

$$p_j^* = \begin{cases} (\alpha_m^{-1} - s_{j-1})^{-1}, & j = 1, \ldots, k_m \\ 1, & k_m < j \le m \end{cases}$$

$$q_j^* = \begin{cases} \alpha_m (j+1)^{-1}, & j < k_m \\ \alpha_m [1 - (s_{m-1} - s_{k_m - 1})^{-1}], & j = k_m \\ 0, & k_m < j < m \end{cases}$$

注(1). たとえば，$m = 5$ の場合，$\alpha_m = 26/75 \simeq 0.347, \mathbf{p}^* = (26/75, 26/49, 1, 1, 1), \mathbf{q}^* = (13/75, 2/75, 0, 0, 60/75)$．漸近的には $\alpha_m \sim (\log m)^{-1}$ であり，$\lim_{m\to\infty} \alpha_m = 0$.
(2). Hill and Krengel[19] は，この問題のグーゴルバージョンを考えた．すなわち，カードの枚数が不確実なグーゴル (枚数の上限は m) でもうまく数字を生成すれば任意の $\epsilon > 0$ に対して成功確率を $\alpha_m + \epsilon$ 以下におさえることができることを示した．
(3). この問題は，$1 \le n \le m$ という条件下でゲームを考えているが，Hill and Kennedy[18] は同じ問題を n の期待値が M 以下という条件下で明示的に解いた．この場合，採用側の戦略 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots)$ は j 番目が候補者の時，確率 p_j でこれを採用することを意味し，$0 \le p_j \le 1, 1 \le j$ のクラスから選ばれるが，n の分布 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots)$ は $\sum_{j=1}^{\infty} q_j = 1, \sum_{j=1}^{\infty} j q_j \le M$ のクラスから選ばれる．たとえば，$M = 3$ の場合 $\mathbf{p}^* = (7/13, 1, 1, \cdots), \mathbf{q}^* = (2/13, 0, 7/13, 4/13, 0, 0, \ldots)$, ゲームの値は 16/39 となる．

6.3.2 Gnedin and Krengel モデル

完全情報型の問題において，プレーヤー II は，n 個の評価値 $(X_1, \ldots, X_n)$ のすべてを観測した後で，これをプレーヤー I に不利となるように $(Y_1, \ldots, Y_n)$ に並べ替えて提示する．他方，プレーヤー I は提示された評価値 $Y_1, Y_2, \ldots$ を逐次観測しながら期待損失が最小になるように停止する．ただし，Y_i で停止した場合のプレーヤー I の損失は，Y_i の順位が k の時 $q(k)$ である ($q(k)$ は k に関して非減少)．評価値 X_i の分布 F は両プレーヤーに既知であるとする．一般性を失うことなく F として $(0,1)$ 上の一様分布を仮定することができる．Gnedin and Krengel[12] は $0 < \theta < 1$ に対して関数

$$t(x) = \begin{cases} (x - \theta)/(1 - \theta), & \theta \le x \le 1 \\ (\theta - x)/\theta, & 0 \le x \le \theta \end{cases}$$

を導入し，次の結果を得た．

定理 17 $0 < \theta < 1$ に対して，プレーヤーI の戦略としては，θ を超える観測値が出現したら，そこで直ちに停止するルール τ_θ を考え (θ を超えるものが出現しない場合は，n 番目で停止する)，プレーヤーII の戦略としては X_i を $t(X_i) = \tilde{X}_i, 1 \le i \le n$ によって $\tilde{X}_i$ に変換し，$(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$ を小さい順に $(Y_1, \ldots, Y_n)$ に並べ替えるルール ρ_θ を考える．更に $f(\theta)$ を次式

$$f(\theta) \equiv \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (1 - \theta)^k \theta^{n-k} q(k) + \theta^n q(n)$$

で定義し，θ^* を $df(\theta)/d\theta=0$ の根，すなわち，

$$q(n)-q(1)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^k[q(k+1)-q(k)]$$

の根とする．この時，$\theta=\theta^*$ に対して損失関数が次の条件

$$q(n)-q(i)\le\sum_{k=1}^{n-i}\binom{n-i}{k}\left(\frac{1-\theta^*}{\theta^*}\right)^k[q(k+i)-q(k)],\quad 1<i<n$$

を満足すれば，$(\tau_{\theta^*},\rho_{\theta^*})$ が最適戦略となり，ゲームの値は $f(\theta^*)$ で与えられる．

注 1．(a) 最良選択問題 $(q(1)=0, q(k)\equiv 1, 2\le k\le n)$ の場合，$\theta^*=1-1/n, f(\theta^*)=1-(1-1/n)^{n-1}$. 故に，$\lim_{n\to\infty}f(\theta^*)=1-e^{-1}$. すなわち，完全情報型最良選択問題において，もし観測値の並べ替えが可能であれば，漸近的に成功確率を無情報型の成功確率 e^{-1} まで下げることができることを示している．

(b) 順位最小化問題 $(q(k)=k,\ 1\le k\le n)$ の場合，$\theta^*=n^{-1/(n-1)}, f(\theta^*)=1+(n-1)(1-n^{-1/(n-1)})$. 故に，$n\to\infty$ の時，$f(\theta^*)\sim\log n$.

2．Gnedin and Krengel モデルの無情報版としては Samuels(1978) の研究がある．彼は，ゲームの値が $[q(1)+\cdots+q(n)]/n$ となるような (プレーヤー II による) 並べ替えが可能であることを示した．プレーヤー II は次のルールに従って応募者の出現順序をコントロールすればよい．時刻 1 には，確率 p_1 で絶対順位 1 を，残りの確率 $1-p_1$ で絶対順位 n を出現させる．ただし，p_1 は，次式を満たすように決める．

$$p_1q(1)+(1-p_1)q(n)=[q(1)+\cdots+q(n)]/n.$$

既に i 人出現していて，これらの絶対順位の集合が $\{1,2,\ldots,n\}-\{r,r+1,\ldots,s\}$ の場合 (ただし，$s=r+n-i-1$)，時刻 $i+1$ には確率 p_{i+1} で絶対順位 r を，確率 $1-p_{i+1}$ で絶対順位 s を出現させる．ただし，p_{i+1} は次式を満足するように決める．

$$p_{i+1}q(r)+(1-p_{i+1})q(s)=[q(r)+\cdots+q(s)]/(n-i).$$

順位最小化問題の場合 $p_i\equiv 1/2$. 最良選択問題の場合は，$r=1$ である限り $p_i=1/(n-i+1)$ $(r\ne 1$ の場合，p_i の値は任意).

7 複数選択

本節では，複数人の選択が許される問題を紹介する．無情報型最良選択問題の一般化として，応募者を m 人まで選ぶことができ，選んだ中に，順位 $1,2,\ldots,k$ のすべてが含まれる時成功と見なす問題を (m,k) −問題と呼ぶ $(m\ge k)$. $(1,1)$ −問題は最良選択問題そのものである．$(m,1)$ −問題は Gilbert and Mosteller[10],Sakaguchi[32] によって研究された．最適停止ルールは m 個の値 $s_1\ge s_2\ge\cdots\ge s_m$ によって規定され，最初の選択は時刻 s_m 以降の最初の候補者，2 回目の選択は，時刻 s_{m-1} 以降の候補者，$\cdots$ となる．漸近的な性質として Tamaki[57] は $s_k^*=\lim_{n\to\infty}s_k/n$ が次の関係式から逐次計算できることを示した．

$$s_k^*=\exp\left\{-\left(1+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\log s_i^*)^{k-i+1}}{(k-i+1)!}\right)\right\},\quad k=1,2,\ldots,m.$$

$(2,2)$ −問題に関しては，Nikoleav[22] を，$(3,k)$ −問題に関しては Stadje[43],Sakaguchi[33], Ano[1] を参照されたい．既に採用している者の相対順位の集合が R で，今新たに相対順位 i の応募者が出現している状態を (R,i) で表す．もし停止ルールが次の性質「時刻 t で状態が (R,i) の時，相対順位 i を採用するならば，時刻 $t+1$ でも同様である．すなわち，時刻 $t+1$ で状態が (R,i) の時にも相対順位 i を採用する」をもつとき，このルールは *time-isotone* と呼ばれる．上に紹介した問題の最適停止ルールはすべて time-isotone であることが知られている．Preater[27] は，上記の問題を少し一般化して (m,k) −問題に関して，$k \le 3$ の時 time-isotone な最適停止ルールが存在することを示した ($k \ge 4$ に関しては未解決)．Vanderbei[58] は (m,m) −問題を考察し，特に $2m = n$ の場合，成功確率が $1/(m+1)$ となることを示した．(m,k) −問題以外にも色々考えられている．たとえば，Tamaki(1979) は２人まで選択が許され，どちらかの順位が１あるいは２であれば，成功とみなす場合を，Preater[26] は２人選択で，順位１と k の組が選ばれた場合，利得 α_k が得られ ($\alpha_2 \ge \cdots \ge \alpha_n \ge 0$)，その他の場合，利得０となる期待利得最大化問題を考えた．選択だけでなく，割り当てまで考慮した問題もある．k 個のポジション $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_\mathrm{k}$ があり，順位 i のものを出現時に P_i に割り当てていく問題である．この問題に関しては Rose[30],Tamaki [46],[47],Wilson[59] がある．

順位最小化に関連しては，Henke[15] が，選ばれた m 人の順位の和の期待値を最小化する問題を考察した．Tamaki(2002) は m 人を k 期に分けて採用する問題を考えた．これは次のような状況を想定した問題である．新年度に m 人の採用を予定している企業が，１年を k 期に分け，各期末にその期の応募者を対象に試験を実施し，上位何名かを採用する．k 回の採用総数は m にならなければならない．この場合，各期均等に上位 (m/k) 人を採用するのは企業にとって賢明ではない．なぜならば，第 i 期 $(i=2,\ldots,k)$ に応募した学生の能力に関しては，その期の応募者の中の順位だけでなく，１期から i 期までのすべての応募者の中での順位づけが可能となるからである．簡単のため，各期の応募者数は均一に n/k とし，n の値は十分大きいものと仮定する．この時，V_k^m で最適ルールの下での m 人の順位の和の期待値を表すと，この値は次式から求められる．

$$V_k^m = \min_{0 \le l \le m} \left\{ \frac{l(l+1)k}{2} + v_{k-1}^{m-l} \right\}$$

ここで，$v_j^r, 1 \le r \le m, 2 \le j \le k-1$ は，$v_1^r = r(r+1)k/2$ からスタートして，次の最適方程式によって逐次計算される値である．

$$v_j^r = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r} \cdots \sum \min_{0 \le l \le r} \left\{ \frac{(i_1 + \cdots + i_l)k}{k-j+1} + v_{j-1}^{r-l} \right\} p_j(i_1, \ldots, i_r)$$

ただし

$$p_j(i_1, \ldots, i_r) = \left(\frac{k-j}{k-j+1} \right)^{i_r} \left(\frac{1}{k-j} \right)^r, \quad 1 \le i_1 < \cdots < i_r.$$

たとえば，３回試験を実施し３名採用する $(m=k=3)$ 場合，$V_3^3 = 141/16 \approx 8.8$ で，最適な採用は次のようになる．１期は上位１名だけ採用する．２期の順位が i の者の，１期と２期全体を通しての順位を R_i，$i=1,2$ で表すと，２期と３期の採用に関しては以下のようになる．

(i) $R_2 \le 2$ の時，２期は上位２名の採用．３期での採用は０．
(ii) $R_2 \ge 3, R_1 \le 3$ の時，２期，３期共に上位１名の採用．
(iii) $R_2 \ge 3, R_1 \ge 4$ の時，２期の採用は０．３期は上位２名の採用．

完全情報型に関して複数選択問題はあまり研究されていない．Tamaki[45] は２回選択でどちらかが順位１である時成功と見なす問題を解いた．

8 秘書問題の周辺

前節までは，秘書問題の典型として，最良選択問題と順位最小化問題を中心に見てきたが，もう1つ興味深い問題がある．(候補者) 保持時間最大化問題である．8.1 節でこの問題を扱う．8.2 節では壷からのボールの抜き取りに関連した最適停止問題を考える．この問題は秘書問題ではないが，停止利得がある意味で順位に依存するのでここで紹介する．

8.1 保持時間最大化問題

T_k を時刻 k より後の最初の候補者の出現時刻とする (候補者が出現しない場合は $T_k = n+1$ と解釈する)．そして，時刻 k で候補者を選んだ時，この候補者の保持時間を $(T_k - k)/n$ で定義する．Ferguson,Hardwick and Tamaki[7] は保持時間の期待値を最大にする候補者選択問題を色々な条件の下で考察した．無情報型，完全情報型でリコールが許されない場合の結果を以下に示す．

定理 18 (無情報型保持時間最大化問題) $r_n = \min\{1 \le r < n : b_{r+1} \le a_{r+1} + 1/n\}$ と定義する．ただし，a_r は定理 1 で定義され，b_r は次式で定義される．

$$b_r = \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}, \quad 1 \le r < n.$$

最適政策は最初の $r_n - 1$ 人を流し，それ以降の最初の候補者を選ぶことである．この時の期待保持時間は $h_n = (r_n - 1)b_{r_n - 1}/n$ で与えられる．漸近挙動は，次のようになる．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} = e^{-2}, \quad \lim_{n\to\infty} h_n = 2e^{-2}$$

定理 19 (完全情報型保持時間最大化問題) r 番目の応募者が候補者で，その観測値が x である状態を (r, x) で表す．数列 $\nu_r, r = 1, 2, \ldots,$ を $\sum_{k=1}^{r} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{r-1} x^{k-1} \sum_{j=1}^{r-k}(1 - x^j)/j$ の根 x として定義すると，状態 (r, x) における最適決定は $x \ge \nu_{n-r}$ の時に限って r 番目の応募者を選ぶことである．期待保持時間は $[c_n + \sum_{j=1}^{n} j^{-1} \sum_{r=n-j}^{n-1}(c_{n-j} - c_{r-n+j} - 1)\nu_r^j]/n$ で与えられる，ただし，$c_0 = 0, c_i = \sum_{j=1}^{i} j^{-1}, i \ge 1$．また，次式

$$\int_0^z e^y \left[1 - \int_0^y \frac{1}{x}(1 - e^{-x})dx\right] dy = 0$$

の根 $z \approx 2.1198$ に対して，$\lim_{n\to\infty} n(1 - \nu_n) = z$ が成立する．

注 完全情報型の期待保持時間の漸近値が

$$\int_0^1 e^{-\frac{z}{u}} du \{\int_0^u [\frac{e^{zt/u} - 1}{t} + \frac{e^{zt/u}}{1-t}]dt - 1\} \approx 0.436$$

となることが最近 Mazalov[21] によって示された．

Tamaki,Pearce and Szajowski[53] は無情報型保持時間最大化問題の複数選択を考えた．候補者を m 人まで選ぶことができる時，各候補者の保持時間の和の期待値を最大にする問題である．主な結果を次の定理にまとめた．

定理 20 (無情報型複数選択保持時間最大化問題) 最適停止ルールは，m 個の値 $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_m$ によって規定され，最初の選択は時刻 s_m 以降の最初の候補者，２番目の選択は時刻 s_{m-1} 以降の候補者 $\cdots$ となる．$n \to \infty$ とした時の漸近挙動は次のようになる．$s_k^* = \lim_{n\to\infty} s_k/n, k \geq 1$ とおくと，これらは，次の関係式から逐次計算される．

$$s_k^* = \exp\left[-\left\{1+\sqrt{1-2\sum_{i=1}^{k-1}\frac{[(k-i+2)+(k-i+1)\log s_i^*]}{(k-i+2)!}(\log s_i^*)^{k-i+1}}\right\}\right].$$

また，最適政策の下での期待総保持時間は $-\sum_{k=1}^{m} s_k^* \log s_k^*$ となる．

8.2 壷に関する最適停止問題

秘書問題とは異なるが，利得が順位に依存する最適停止問題を紹介する．M 個のマイナスボール (ボールに -1 の印あり) と P 個のプラスボール (ボールに $+1$ の印あり) が入っている壷から，非復元抽出で毎時１個ずつボールを取り出す．X_j で時刻 j に取り出されたボールの値を示す．すなわち，j 番目のボールがマイナスボールかプラスボールかに従って $X_j = -1$ あるいは $X_j = 1$ となる．今，確率変数列 $\{Z_n\}_{n=0}^{M+P}$ を $Z_0 = 0, Z_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, 1 \leq n \leq M+P$ で定義する．X_j を j 回目の試行に伴う賞金額と解釈すると，Z_n は時刻 n でストップした時の累積賞金額を表す．累積賞金額をできるだけ大きくしたいという立場からは $\{Z_n\}_{n=0}^{M+P}$ の最大値で停止する (ここではこれを成功と呼ぶ) 確率を最大にする最適停止問題に関心がある (累積賞金額の期待値を最大にする停止問題は Shepp(1969),Boyce(1973) により研究された)．すなわち，

$$P\{Z_{\sigma^*} = \max_{0\leq n\leq M+P} Z_n\} = \sup_{\sigma\in C} P\{Z_\sigma = \max_{0\leq n\leq M+P} Z_n\}$$

を満足する停止時刻 σ^* を求めたい．ここで，C は停止時刻の集合である．既に k 個のボールを取り出していて，$Z_1,\ldots,Z_k$ を観測しているが，壷の中にはまだマイナスボールが m 個，プラスボールが p 個それぞれ残っているものとする．この時，直ちに試行を停止する可能性が生じるのは，容易にわかるように，$Z_k = \max_{0\leq n\leq k} Z_n$ で，$m \geq p$ の場合に限られる．従って，この状態を簡単に (m,p) で表し (k の値は決定に影響を与えないので省く)，(m,p) で停止した場合，継続した場合の成功確率をそれぞれ $s(m,p), c(m,p)$ と書き，$v(m,p) = \max\{s(m,p), c(m,p)\}$ とすると以下の最適方程式が成立する．

$$\begin{aligned} s(m,p) &= (m+1-p)/(m+1), \\ c(m,p) &= (p/(m+p))v(m,p-1) + \sum_{i=1}^{p} p_{2i}(m,p)v(m-i,p-i). \end{aligned}$$

ここで，$s(m,p)$ の値はよく知られた投票定理の結果から導かれ，$p_{2i}(m,p)$ は

$$p_{2i}(m,p) = \frac{1}{2(2i-1)} \times \frac{\binom{m}{i}\binom{p}{i}}{\binom{m+p}{2i}}, \quad 1 \leq i \leq p$$

で与えられる．これらの関係式を利用して Tamaki[56] は次の結果を得た．

定理 21 M 個のマイナスボールと P 個のプラスボールが入った壷がある．M と P が与えられた時，n の関数として

$$f_n(M,P) = \sqrt{M+P+1-n} - (M-P+1), \quad 0 \leq n \leq M+P$$

を定義する．この時，最適停止時刻 σ^* は次式で与えられる（ただし，壷が空になったら終了する）．

$$\sigma^* = \min\{0 \le n \le M+P : Z_n = \max_{0\le j\le n} Z_j, \quad Z_n \ge f_n(M,P)\}.$$

注　$\{Z_n\}_{n=0}^{M+P}$ の k 番目に大きい値，すなわち，$\max_{0\le n\le M+P} Z_n - (k-1)$ を順位 k の値と呼ぶと，この問題は順位 1 の値で停止する確率を最大化する問題である．この問題の一般化として，順位 $1,2,\cdots,r$ のいずれかで停止する確率の最大化問題を考えることができる．すなわち，

$$P\{Z_{\sigma_r^*} \ge \max_{0\le n\le M+P} Z_n - (r-1)\} = \sup_{\sigma\in C_r} P\{Z_{\sigma_r} \ge \max_{0\le n\le M+P} Z_n - (r-1)\}$$

を満足する σ_r^* を求める問題である（σ_1^* は σ^*）．特に σ_2^* は $f_n(M,P)$ を用いて次のように表される．

$$\sigma_2^* = \min\{0 \le n \le M+P : Z_n = \max_{0\le j\le n} Z_j - 1, \ Z_n \ge f_n(M+1,P)\}.$$

面白いことに，σ_2^* は順位 1 の値では停止しない．

参考文献

[1] Ano, K., Optimal selection problem with three stops, J. Oper. Res. Soc. Japan, 32(1989), 491-504.

[2] Assaf, D., and Samuel-Cahn, E., The secretary problem: minimizing the expected rank with i.i.d. random variables, Adv. Appl. Probab., 28(1996), 828-852.

[3] Berezovskiy, B.A., and Gnedin, A.V., The Problem of Best Choice (in Russia), Nauka, Moscow, 1984.

[4] Bruss, S.T., and Ferguson, T. S., Minimizing the expected rank with full information, J. Appl. Probab., 30(1993), 616-624.

[5] Chow, Y.S., Moriguti, S., Robbins, H., and Samuels, S.M., Optima selection based on relative rank (the "secretary problem"),Israel J. Math., 2(1964), 81-90.

[6] Ferguson, T.S., Who solved the secretary problem ?, Statistical Science, 4(1989), 282-289.

[7] Ferguson, T.S., Hardwick, J.P., and Tamaki, M., Maximizing the duration of owning a relatively best object, Contemporary Mathematics, 125(1992), 37-57.

[8] Frank, A.Q., and Samuels, S.M., On an optimal stopping problem of Gusein-Zade, Stoch. Proces. and Their Appl., 10(1980), 299-311.

[9] Gardner, M., Mathematical games, Scientific American, 202(1960), 135.

[10] Gilbert, J., and Mosteller, F.,Recognizing the maximum of a sequence, J. Amer. Statist. Assoc., 61(1966), 35-73.

[11] Gnedin, A.V., A solution to the game of Googol, Ann. Probab., 22(1994), 1588-1595.

[12] Gnedin, A.V., and Krengel, U., A stochastic game of optimal stopping and order selection, Ann. Appl. Probab., 5(1995), 310-321.

[13] Gnedin, A.V., and Krengel, U., Optimal selection problems based on exchangeable trials, Ann. Appl. Probab., 6(1996), 862-882.

[14] Gusein-Zade, S.M., The problem of choice and the optimal stopping rule for a sequence of independent trials, Theory Probab. Appl., 11(1966), 472-476.

[15] Henke,M., Sequentialle Auswahlprobleme bei Unsicherheit, Anton Hain Verlag, Meisenheim,

[16] Hill, T.P., and Krengel, U., Minimax-optimal stop rules and distibutions in secretary problems, Ann. Probab., 19(1991), 342-353.

[17] Hill, T.P., and Kennedy, D.P., Sharp inequalities for optimal stopping with rewards based on ranks, Ann. Appl. Probab., 2(1992), 503-517.

[18] Hill, T.P., and Kennedy, D.P., Minimax-optimal strategies for the best-choice problem when a bound is known for the expected number of objects, SIAM J. Control and Optimization, 32(1994), 937-951.

[19] Hill, T.P., and Krengel, U., On the game of Googol, International J. Game Theory, 21(1992), 151-160.

[20] Lindley, D.V., Dynamic programming and decision theory, Appl. Statist., 10(1961), 39-52.

[21] Mazalov, V., private communication.

[22] Nikolaev, M.L., On a generalization of the best choice problem, Theory Prob. Appl., 22(1977), 187-190.

[23] Petruccelli, J.D., Some best choice problems with partial information, Unpublished thesis, (1978).

[24] Petruccelli, J.D., On a best choice problem with partial information, Ann. Statist., 8(1980), 1171-1174.

[25] Petruccelli, J.D., Full-information best-choice problems with recall of observations and uncertainty of selection depending on the observations, Adv. Appl. Probab., 14(1982), 340-358.

[26] Preater, J., The senior and junior secretaries problem, Oper. Res. Letters., 14(1993), 231-235.

[27] Preater, J., On multiple choice secretary problems, Math. Oper. Res., 19(1994), 597-602.

[28] Presman, E.L., and Sonin, I.M., The best choice problem for a random number of objects, Theory Probab. Appl., 17(1972), 657-668.

[29] Rocha, A. L., The infinite secretary problem with recall, Ann. Probab., 21(1993), 898-916.

[30] Rose, J.S., A problem of optimal choice and assignment, Oper.Res., 30(1982), 172-181.

[31] Sakaguchi, M., A note on the dowry problem, Rep. Statist. Appl. Res., JUSE, 20(1973), 11-17.

[32] Sakaguchi, M., Dowry problems and OLA policies, Rep. Statist. Appl. Res., JUSE, 25(1978), 124-128.

[33] Sakaguchi, M.,Generalized secretary problems with three stops, Mathematica Japonica, 34(1989),307-318.

[34] Sakaguchi, M., Optimal stopping games-A review, Mathematica Japonica, 42(1995),343-351.

[35] Sakaguchi, M., Single-level strategies for full-information best-choice problems, I, Mathematica Japonica, 45(1997), 483-495.

[36] Samuels, S.M., Minimax stopping rules when the underlying distribution is uniform, J. Amer. Statist. Assoc., 76(1981), 188-197.

[37] Samuels, S.M., Exact solutions for the full information best choice problem, Purdue Univ. Stat. Mimeo Series, (1982), 81-87.

[38] Samuels, S.M., Who will solve the secretary problem ?. Comment on Ferguson. Statistical Science, 4(1989), 289-291.

[39] Samuels, S.M., Secretary problems, Handbook of Sequential Analysis(edited by Ghosh, B. K., and Sen, P. K.), Marcell Dekker, Boston, 1991, 381-405.

[40] Silverman, S., and Nadas, A., On the game of Googol as the secretary problem, Contemporary Mathematics, 125(1992), 77-83.

[41] Smith, M. H., A secretary problem with uncertain employment, J. Appl. Probab., 12(1975), 620-624.

[42] Smith, M. H., and Deely, J. J., A secretary problem with finite memory, J. Amer. Statist. Assoc., 70(1975), 357-361.

[43] Stadje.W., Efficient stopping of a random series of partially ordered points, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 177, Springer-Verlag, New York, 1980, 430-447.

[44] Stewart, T. J., Optimal selection from a random sequence with learning of the underlying distribution, J. Amer. Statist. Assoc., 73(1978), 775-780.

[45] Tamaki, M., Optimal selection with two choices-full information case, Mathematica Japonica, 25(1980), 359-368.

[46] Tamaki, M., The secretary problem with optimal assignment, Operations Research, 32(1984), 847-858.

[47] Tamaki, M., A generalized problem of optimal selection and assignment, Operations Research, 34(1986), 486-493.

[48] Tamaki, M., A full information best choice problem with finite memory, J. Appl. Probab., 23(1986), 718-735.

[49] Tamaki, M., A Bayesian approach to the best choice problem, J. Amer. Statist. Assoc., 83(1988), 1129-1133.

[50] Tamaki, M., A secretary problem with uncertain employment and best choice of available candidates, Operations Research, 39(1991), 274-284.

[51] Tamaki, M., and Shanthikumar, G. J., A full-information best-choice problem with allowance, Probability in the Engineering and Informational Sciences, 10(1996), 41-56.

[52] Tamaki. M., The generalized secretary problems with rank-dependent rejection probability, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 455, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 155-165.

[53] Tamaki. M.,Pearce, C. E. M., and Szajowski, K., Multiple choice problems related to the duration of the secretary problem, 数理解析研究所講究録, 1068(1998), 75-86.

[54] Tamaki. M., Minimal expected ranks for the secretary problems with uncertain selection, Lecture Notes-Monograph Series(edited by Bruss, F. T., and Le Cam, L.,), Institute of Mathematical Statistics, 2000, 127-139.

[55] Tamaki. M., and Ohno. K., On a generalization of the secretary problem with uncertain selection, J. Operat. Res. Soc. Japan, 43(2000), 219-243.

[56] Tamaki. M., Optimal stopping on trajectories and the ballot problem, J. Appl. Probab., 38(2001).

[57] Tamaki. M.,and Mazalov, V., A simple recursive formula for calculating the asymptotic critical numbers in the multiple choice secretary problem, 愛知経営論集, (2002).

[58] Vanderbei, R. J., The optimal choice of a subset of a population, Math. Operat. Res., 5(1980), 481-486.

[59] Wilson, J. G., Optimal choice and assignment of the best m of n randomly arriving items, Stoch. Proces. and Their Appl., 39(1991), 325-343.

[60] Yang, W.C.K., Recognizing the maximum of a random sequence based on relative rank with backward solicitation, J. Appl. Probab., 11(1974), 504-512.

[61] Yasuda, M., Asymptotic results for the best-choice problem with a random number of objects, J. Appl. Probab., 21(1984), 521-536.