

仕事終了確率最大化を考慮した待ち行列参入問題 - 到着確率が待ち行列長に依存する場合 -

小柳 淳二 (Junji KOYANAGI)
〒680-8552 鳥取市湖山町南 4-101
鳥取大学工学部社会開発システム工学科 (Tottori University)
E-mail: junji@sse.tottori-u.ac.jp

河合 一 (Hajime KAWAI)
〒680-8552 鳥取市湖山町南 4-101
鳥取大学工学部社会開発システム工学科 (Tottori University)
E-mail: kawai@sse.tottori-u.ac.jp

本研究では、2種類の仕事を一人で行う場合を考える。仕事 A(JA) は離散時間待ち行列システムで処理をされ、いったん、この仕事をするために待ち行列にはいったならば、仕事が終わるまで、他の仕事はできないものとする。仕事 B(JB) は、いくつかのステップからなり、各ステップには単位時間を要する。各ステップの終わりに、作業者は待ち行列を観測し、行列に加わるかどうかを判断する。ただし、JA が終了していない状態で、JB が終了したなら、JA のために待ち行列に加わらねばならない。すべての作業は制限時間内に終える必要があるものとし、作業者は制限時間内に両方の仕事を終える確率を最大にするように、待ち行列へ並ぶものとする。この問題を動的計画法で定式化し、最適政策の構造について調べる。

1. はじめに

待ち行列理論において、到着客のコントロールについての研究がしばしばなされている。並列待ち行列システムにおいて、到着客をどのように割り当てるべきかという問題として、Bell and Stidham [1] では、到着客がある確率で、各サーバーに割り当てるモデルを提案し、社会的に最適なコントロールでは、個人最適なコントロールよりも多くのサーバーを使用することが示されている。客の割り当てを動的制御問題としてみた場合 Winston [2] and Weber [3] は、客の保持コスト最小化について調べ、サービス時間分布が指数分布である場合には、一番短い待ち行列に客を送るのが最適であることを示している。このような問題では客自身は意志決定能力がなく、待ち行列の管理者の政策が問題となっている。しかし、現実には客が待ち行列に加わるかどうかを判断して行動する場合も多い。Naor [4] は、客の下す判断として、待ち行列に加わることによる利益と、待つことによるコストを比較することにより、行列に加わるかどうかを判断するモデルを提案し、入場料をとって行列に入る客を絞ることにより、システムがよりすぐれたパフォーマンスをあげることがあることを示した。

本研究では、客が待ち行列に入るかどうかを決断するモデルを扱うが、決定は、客が持っている仕事を時間内に終わらせる確率を最大にするように下されるものとする。仕事 A は離散時間待ち行列で処理が行われ、仕事 B はあらかじめ決定された時間処理を行うと終了する。仕事 B を単位時間行うごとに、行列の変化を観測し、行列に加わるかどうかをそのつど決定する。行列に加わると、仕事 B を進めることはできず、仕事 A 終了後に残りの仕事 B を行うものとする。このような問題に対して Koyanagi [5] は期待処理時間最小化のものと最適政策の解析を行ったが、本研究では、制限時間以内に両方の仕事を終了させる確率の最大化をとりあげる。このような問題は、例えば遊園地内で行列のできるアトラクションの行列長をみて、他のアトラクションをまず楽しむかどうかを決定する人の動きなどをモデル化するために役立つと考えられる。

2. モデル

2種類の仕事 A(JA) と B(JB) を一人の作業者が処理する場合を考える。JA は離散時間待ち行列で処理されるもので、その待ち行列システムは各時点で確率 q で作業が終了し、行列長 i の時に確率 p_i で客の到着があるものとする（各時点では作業終了が先に判定される）。JB は L 単位時間必要な作業で、作業者が待ち行列に並んでいないときに処理される。JA と JB は制限時間 R のうちに終了させなければならず、そのために、各時点において、2つの仕事を終了させる確率を最大にするように、待ち行列長 i と JB の残りサービス時間をもとにして判断を下す。

$$\sum_{k=i+1}^{R-L} \binom{R-L}{k} q^k \bar{q}^{R-L-k}. \quad (1)$$

を考える ($\bar{a} \equiv 1 - a$). この式は、サーバーが $R - L$ 時間以内に、 $i + 1$ 以上の客をサービスする確率であり、状態 (i, L, R) でサーバーに加われば、この確率で成功することになる (ただし $R - L > i$).

状態 (i, L, R) で JB を続けることを選択すると、 $i > 0$ では次の状態が確率 $\bar{p}_i q$ で $(i - 1, L - 1, R - 1)$ 、確率 $p_i q + \bar{p}_i \bar{q}$ で $(i, L - 1, R - 1)$ 、確率 $p_i \bar{q}$ で $(i + 1, L - 1, R - 1)$ となる。

状態 (i, l, r) として、待ち行列が i 、JB の残り時間が l 、制限時間まで r 残っている状態をとることができるが、JB を選択しつづける限り、 $r - l$ は定数であるから、 $S \equiv r - l$ において (i, l, S) を (待ち行列に加わる前の) 状態とする。待ち行列に入ることを選択すると (1) より成功確率が決定される。

3. 定式化

状態 (i, l, S) に対して、以下の確率を考える。

$A(i, l, S)$: 行列に入ったとき、成功する確率。

$B(i, l, S)$: JB を続け、その後最適に行動した場合に成功する確率

$V(i, l, S)$: 最適に行動したとき成功する確率

これらの確率は以下の最適性方程式を満たす。

$$A(i, l, S) = 0 \quad (i \geq S), \quad (2)$$

$$A(i, l, S) = \sum_{k=i+1}^S \binom{S}{k} q^k \bar{q}^{S-k} \quad (i < S), \quad (3)$$

$$B(0, l, S) = p_0 V(1, l - 1, S) + \bar{p}_0 V(0, l - 1, S), \quad (4)$$

$$B(i, l, S) = \bar{p}_i q V(i - 1, l - 1, S) + (p_i q + \bar{p}_i \bar{q}) V(i, l - 1, S) + p_i \bar{q} V(i + 1, l - 1, S) \quad (i, l > 0), \quad (5)$$

$$V(i, 0, S) = A(i, 0, S), \quad (6)$$

$$V(i, l, S) = \max\{A(i, l, S), B(i, l, S)\} \quad (l > 0). \quad (7)$$

$A(i, l, S)$ は l に依存しない関数であることに注意する。

これらの確率に対し、以下の性質を証明することができる。

補題 1 $A(i, l, S)$, $B(i, l, S)$, $V(i, l, S)$ に対して

(1) $V(0, l, S) = A(0, l, S)$, これは客がいないときには行列に入ったほうがよいことを示す。

(2) $V(i, l, S) \geq V(i + 1, l, S)$, これは成功確率が行列長 i に関して減少することを示す。

(3) $B(i, l, S) \leq B(i, l + 1, S)$, これは JB の残り時間と制限時間が同時に増えたならば、成功確率が増えることを示す。

が成り立つ。□

証明.

まず補題 1 の (1) と (2) を l についての帰納法で示す。

$l = 0$ のときは、明らかに補題 1 の (1) と (2) が成立する。

(1) の証明.

$$\begin{aligned} B(0, l, S) &= p_0 V(1, l - 1, S) + \bar{p}_0 V(0, l - 1, S) \\ &\leq p_0 V(0, l - 1, S) + \bar{p}_0 V(0, l - 1, S) \\ &= A(0, l - 1, S) = A(0, l, S). \end{aligned}$$

よって $V(0, l, S) = A(0, l, S)$ が成り立つ。

(2) の証明.

$i = 0$ の場合,

$$\begin{aligned} B(1, l, S) &= \bar{p}_1 q V(0, l - 1, S) + (p_1 q + \bar{p}_1 \bar{q}) V(1, l - 1, S) + p_1 \bar{q} V(2, l - 1, S) \\ &\leq V(0, l - 1, S) = A(0, l, S) \end{aligned}$$

よって $B(1, l, S) \leq A(0, l, S)$ かつ $A(1, l, S) \leq A(0, l, S)$ が成り立つので $V(1, l, S) \leq V(0, l, S)$ となる。
 $l \geq 1$ の場合

$$\begin{aligned} B(i, l, S) &= \bar{p}_i q V(i-1, l-1, S) + (p_i q + \bar{p}_i \bar{q}) V(i, l-1, S) + p_i \bar{q} V(i+1, l-1, S) \\ &= \bar{p}_i q V(i-1, l-1, S) + p_i q V(i, l-1, S) + \bar{p}_i \bar{q} V(i, l-1, S) + p_i \bar{q} V(i+1, l-1, S) \\ &\geq q V(i, l-1, S) + \bar{q} V(i+1, l-1, S) \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} B(i+1, l, S) &= \bar{p}_{i+1} q V(i, l-1, S) + p_{i+1} q V(i+1, l-1, S) + \bar{p}_{i+1} \bar{q} V(i+1, l-1, S) + p_{i+1} \bar{q} V(i+2, l-1, S) \\ &\leq q V(i, l-1, S) + \bar{q} V(i+1, l-1, S) \end{aligned}$$

よって $B(i+1, l, S) \leq B(i, l, S)$ となる。 $A(i+1, l, S) \leq A(i, l, S)$ は明らかであるので $V(i+1, l, S) \leq V(i, l, S)$ が成り立つ。

(3) の証明.

$l=1, i > 0$ の場合

$$\begin{aligned} B(i, 2, S) &= \bar{p}_i q V(i-1, 1, S) + (p_i q + \bar{p}_i \bar{q}) V(i, 1, S) + p_i \bar{q} V(i+1, 1, S) \\ &\geq \bar{p}_i q A(i-1, 1, S) + (p_i q + \bar{p}_i \bar{q}) A(i, 1, S) + p_i \bar{q} A(i+1, 1, S) \\ &= \bar{p}_i q A(i-1, 0, S) + (p_i q + \bar{p}_i \bar{q}) A(i, 0, S) + p_i \bar{q} A(i+1, 0, S) \\ &= B(i, 1, S) \end{aligned}$$

$l=1, i=0$ の場合も同様である。よって $B(i, 1, S) \leq B(i, 2, S)$ がすべての i に対して成り立つ。

$B(i, l-1, S) \leq B(i, l, S)$ ならば $V(i, l-1, S) \leq V(i, l, S)$ であることから $B(i, l, S) \leq B(i, l+1, S)$ が成り立つ。よって帰納法により、補題 1 の (3) が成り立つ。□

補題 1 の (3) と、 $A(i, l, S)$ が l に関して定数であることから、 l の増大にしたがって、最適なアクションは「行列に加わる」から「加わらない」に多くとも一度変化するだけであることがわかる。

補題 1 から、最適性方程式として以下の部分を議論する。

$$A(i, l, S) = \sum_{k=i+1}^S \binom{S}{k} q^k \bar{q}^{S-k} \quad (i < S), \quad (8)$$

$$B(i, l, S) = \bar{p}_i q V(i-1, l-1, S) + (p_i q + \bar{p}_i \bar{q}) V(i, l-1, S) + p_i \bar{q} V(i+1, l-1, S) \quad (i, l > 0), \quad (9)$$

$$V(i, l, S) = \max\{A(i, l, S), B(i, l, S)\} \quad (i, l > 0). \quad (10)$$

行列長 i の変化に対する最適アクションの変化を調べるために、状態 (i, l, S) で JB を継続し、次に待ち行列に加わったときに成功する確率 $C(i, l, S)$ を考える、定義より $B(i, 1, S) = C(i, 1, S)$ である。

$C(i, l, S)$ に対して以下の補題が成り立つ。

補題 2 $C(i, l, S) > A(i, l, S)$ が $i+1 > p_i(S+1)$ のときに成立する。□

証明.

まず $C(i, l, S)$ を $i < S-1$ に対して計算する。

$$C(i, l, S) = \bar{p}_i q \sum_{k=i}^S \binom{S}{k} q^k \bar{q}^{S-k} + (p_i q + \bar{p}_i \bar{q}) \sum_{k=i+1}^S \binom{S}{k} q^k \bar{q}^{S-k} + p_i \bar{q} \sum_{k=i+2}^S \binom{S}{k} q^k \bar{q}^{S-k}. \quad (11)$$

すると、

$$A(i+1, S) = A(i, S) - \binom{S}{i+1} q^{i+1} \bar{q}^{S-i-1} \quad (12)$$

を利用して、

$$C(i, l, S) - A(i, l, S) = \bar{p}_i q \binom{S}{i} q^i \bar{q}^{S-i} - p_i \bar{q} \binom{S}{i+1} q^{i+1} \bar{q}^{S-i-1} \quad (13)$$

が成立する。よって $C(i, l, S) > A(i, l, S)$ は

$$\bar{p}_i \binom{S}{i} > p_i \binom{S}{i+1}. \quad (14)$$

のときに成り立つ。以下計算により補題を得る。□

最適政策の待ち行列長の変化に対する単調性（待ち行列長の増加に対して最適アクションがただか一度しか変化しない）を示すために以下の仮定をおく

条件 1 任意の i に対して $1 > (p_{i+1} - p_i)(S+1)$. □

この条件は例えば、待ち行列人数が増えるほど到着確率が減少する（ p_i が i に関して減少）場合には満たされる。

この条件と補題 2 をあわせると、ある i に対して $A(i, 1, S) < C(i, 1, S)$ ならば、 $j \geq i$ に対しても $A(j, 1, S) < C(j, 1, S)$ が $V(i, 1, S) = \max\{A(i, 1, S), C(i, 1, S)\}$ より成立する。

ここで $i_l = \max\{i | A(i, l, S) \geq B(i, l, S)\}$ と定義すると以下の定理を得る。

定理 1 条件 1（任意の i に対して $1 > (p_{i+1} - p_i)(S+1)$ ）の下で、

(1) i_l は l に関して減少。

(2) $A(i, l, S) \geq B(i, l, S)$ が $i \leq i_l$ に対して成り立ち、かつ $i_l - i_{l+1} \leq 1$ が成り立つ。□

(1) の証明.

$B(i, l, S)$ が l に関して増加し、 $A(i, l, S)$ は l に関して定数であるから (1) が成り立つ。

(2) の証明.

条件 1 より、 $B(i, 1, S) = C(i, 1, S)$ が成り立つため、補題 2 により $i \leq i_1$ に対して $A(i, 1, S) \geq B(i, 1, S)$ が成り立つ。 $l \geq 1$ の場合には、帰納法の仮定として $i \leq i_l$ に対して $B(i, l, S) \leq A(i, l, S)$ とする。帰納法の仮定より $i \leq i_l - 1$ に対して、待ち行列人数は 1 期後に高々 1 しか増加しないことより $B(i, l+1, S) = C(i, l+1, S) \leq A(i, l+1, S)$ が成立する。よって $i_{l+1} \geq i_l - 1$ が成立。□

この定理は、最適政策は l が 1 増えるごとに、最適アクションの境界が 1 減少するかしないかの変化しかないと示している。

$l = 2$ に対する境界に関しては、以下の定理が成り立つ。

定理 2 $i_1 = I$ に対して、状態 $(I, 2, S)$ での最適アクションは

$$q p_I \left(1 - p_{I+1} \frac{S+1}{I+2}\right) > p_I \frac{S+1}{S-I} - \frac{I+1}{S-I} \quad (15)$$

が成立するとき、「行列に加わらない」となる。□

証明.

$i_1 = I$ より、状態 $(I, 2, S)$ で行列に加わらなかった場合の成功確率は

$$B(I, 2, S) = \bar{p}_I q A(I-1, 1, S) + (p_I q + \bar{p}_I \bar{q}) A(I, 1, S) + p_I \bar{q} C(I+1, 1, S)$$

となる。ここで式 (12) を利用して、

$$\begin{aligned} B(I, 2, S) - A(I, 2, S) &= \bar{p}_I q \binom{S}{I} q^I \bar{q}^{S-I} - p_I \bar{q} (p_{I+1} q + \bar{p}_{I+1} \bar{q}) \binom{S}{I+1} q^{I+1} \bar{q}^{S-I-1} \\ &\quad - p_I \bar{q} p_{I+1} \bar{q} \binom{S}{I+1} q^{I+1} \bar{q}^{S-I-1} - p_I \bar{q} p_{I+1} \bar{q} \binom{S}{I+2} q^{I+2} \bar{q}^{S-I-2} \end{aligned}$$

よって $B(I, 2, S) > A(I, 2, S)$ となるには、

$$\binom{S}{I} \bar{p}_I - \binom{S}{I+1} (p_I p_{I+1} q + p_I \bar{q}) - \binom{S}{I+2} p_I p_{I+1} q > 0$$

であればよい。この不等式を

$$\frac{(i+1)\bar{p}_I}{S-I} - p_I \bar{q} - p_I p_{I+1} q \frac{S+1}{I+2} > 0$$

と整理し、以下計算により、定理を得る.. □

4. 数値例

最適政策を式 (2)-(7) により計算する. 以下の表では, 'A' は行列に加わるのがよいことを示し, 'B' は JB を続けるのがよいことを示す. '0' は成功確率が 0 であることを示す.

- (1) $p_i = 0.6, (i = 0, 1, 2), p_i = 0.5, (3 \leq i \leq 14), q = 0.9, S = 6$ に対する最適政策.

l																			
8	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0			
7	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0	0			
6	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0	0	0	0			
5	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0	0	0	0	0			
4	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	0	0	0	0	0	0			
3	A	A	A	B	B	B	B	B	B	0	0	0	0	0	0	0			
2	A	A	A	B	B	B	B	B	0	0	0	0	0	0	0	0			
1	A	A	A	B	B	B	B	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
0	A	A	A	A	A	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	i			

この場合最適政策は i の増加 l の増加に関して単調に変化する.

- (2) $p_0 = 0.8, p_1 = 0.1, p_2 = 0.6, p_3 = 0.1, p_4 = 0.8, p_5 = 0.8, p_6 = 0.9, p_7 = 0.1, p_8 = 0.9, p_9 = 0.1, p_{10} = 0.1, p_{11} = 0.9, p_{12} = 0.1, p_{13} = 0.1, p_{14} = 0.1, q = 0.9, S = 6$ に対する最適政策

l																			
8	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0				
7	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	0	0				
6	A	B	B	B	A	B	B	B	B	B	B	B	0	0	0				
5	A	B	B	B	A	B	B	B	B	B	B	0	0	0	0				
4	A	B	B	B	A	B	B	B	B	0	0	0	0	0	0				
3	A	B	B	B	A	B	B	B	0	0	0	0	0	0	0				
2	A	B	B	B	A	B	B	0	0	0	0	0	0	0	0				
1	A	B	A	B	A	B	B	0	0	0	0	0	0	0	0				
0	A	A	A	A	A	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	i			

この場合 i に関しては最適政策が単調でないことがわかる.

5. 結論

本研究では 2 種類の仕事を制限時間内に処理するというモデルをとりあつかった. 仕事 A は待ち行列でのみ処理することができ, 仕事 B を処理しながら行列長を観測し, 待ち行列に入るかどうかを決定する. 制限時間内に両方の仕事を終了させることを目的とし, 最適なアクションを決定するために最適性方程式を用いて, 最適政策の構造を解析した. その結果, ある条件のもとでは最適政策には単調にアクションが変化する性質があることを示し, アクションが変化する境界についても, 最大 1 しか変化しないことを示した.

参考文献

- [1] C.E. Bell and S. Stidham, Individual and social optimization in the allocation of customers to alternative servers, *Management Science*, **29**, 831-839 (1983).
- [2] W. Winston, Optimality of the shortest line discipline, *Journal of Applied Probability*, **14**, 181-189 (1977).
- [3] R.R. Weber, On the optimal assignment of customers to parallel servers, *Journal of Applied Probability*, Vol. 15, pp. 406-413 (1978).
- [4] P. Naor, On the regulation of queue size by levying tolls, *Econometrica*, **37**, 15-24 (1969).
- [5] J. Koyanagi and H. Kawai, An optimal join policy to the queue in processing two kinds of jobs, *Proc. of the Int. Conf. Applied Stochastic System Modeling*, pp.140-147, (2000).
- [6] S. M. Ross, *Applied Stochastic Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco (1970).