

# Swirl 流中にある円筒渦層に現れる特異点について

## On singularity formation in a cylindrical swirling vortex sheet

坂上貴之 (Takashi Sakajo)

名古屋大学多元数理科学研究科  
(Graduate school of mathematics, Nagoya university)

### 1 Introduction

飛行機の翼の後ろにできる流れ, 様々な形状の物体を通過した後に発生する流れ (ビル風など), 木星表面の流れなどの現実に観測される流れは極めて複雑な運動を行い, 多様なパターンを形成する. こうした現象では, 流れの速度場が, ある狭い層で急激に変化するような部分を持ち, その挙動が運動に本質的な役割を果たしている. このような流れはせん断流 (shear flows) と呼ばれ, 秩序ある状態から複雑な流れ場 (乱流) への遷移初期過程を記述する流れの例として, 流体力学の問題として重要である.

このせん断流の乱流遷移素過程の数理的理解を目指して提案された数学モデルの一つが「渦層」である. これは非粘性・非圧縮 (縮まない) 流体において, 渦度領域 (つまり, 速度場が急激に変化する部分) が極めて薄い部分に ( $\delta$  関数的に) 分布し, 面をなしていると仮定したものである. 別の見方をすれば, 渦層は理想流体の速度場の不連続面とすることもできる. 我々はこの面の時間発展を考えることで, せん断流の基本的なダイナミクスを理解したい.

これまで, 空間を 2 次元に限定した 2 次元渦層に関する研究が数多く行われてきた. まず, この 2 次元渦層の運動についてこれまでに知られた結果を概観しよう. 2 次元渦層は元来, 楕円形の翼の後ろで生成する流れの簡単なモデルとして 1920 年頃に提案されたものである. その当時, 渦層の初期時間発展は次の段階を経て進むと予測された.

1. 初期摂動の線形不安定化 (Kelvin-Helmholtz 不安定性 [14])
2. 渦層の全体的な変形
3. 新しい形状への成長 (螺旋形状へ滑らかに Roll-up する)

しかし, その後, 数多くの数値的研究が試みられたにもかかわらず, 滑らかな螺旋解を得る事が出来ないまま数十年が経過した. こうした経緯を踏まえて, Birkhoff [1] は 2 次元渦層を記述する方程式 (Birkhoff-Rott 方程式) を与え, これに適切な境界条件と渦層の初期形状

を与えた初期値・境界値問題に対して、次の事実が成り立つと推測した。(1) 時間局所解がある。(2) 問題は非適切である。(3) 螺旋解に滑らかに巻上がる解は存在しない。その後は、この推測を示す方向で研究が行われ、時間局所解の存在、問題の非適切性などが1980年代に[3, 19]示された。また、非適切性および三番目の推測に関連して、Moore[11]は漸近解析によって、次の事実を明らかにした。“滑らかな初期値から始めた Birkhoff-Rott 方程式の解は有限時間で滑らかさを失う。さらに、その特異性は渦層の曲率が爆発することに相当する。”これは、2次元渦層が螺旋に巻上がる前にその滑らかさを失うことを意味する。その後、多くの数値計算により、この漸近解析の信憑性が追認され[8, 10, 17]、曲率の爆発という事実は初期値の形状に依存せず渦層運動に広く観測される現象であると認識されるようになった。

この Birkhoff-Rott 方程式の滑らかな螺旋形の非存在と、特異性の出現という事実は渦層モデルの破綻を意味する。しかしながら、この Birkhoff-Rott 方程式に人工的な正則化を施したものを数値計算すると、当初期待された滑らかな螺旋解が現れる[9]ばかりか、いくつかの複雑な現実の流れをも数値的によく近似するという事実が指摘され[12]、Navier-Stokes 方程式の直接数値計算に比べ、このモデルは数値計算が簡単になるという利便さから、この正則化渦層モデルは流体の数値計算に広く用いられるようになった。また、この正則渦層モデルの解と元の特異な Birkhoff-Rott 方程式の解の関係を探ることで、曲率爆発する解と、巻上がりの中心にある種の特異性を持つ螺旋解が Birkhoff-Rott 方程式のある関数空間での解として接続ができるという数理的証拠[16]もあり、現在も応用数学上興味深い問題を提起している。

次に、3次元空間の渦層を考える。この時、渦層は3次元空間中の二次元の曲面を構成する。当然の事ながら、2次元渦層に見られる性質を3次元渦層は持っている。すなわち、初期摂動が Kelvin-Helmholtz 不安定性によって不安定化し、有限時間で2次元渦層と同様の曲率特異性が発生する[2, 7, 13]。しかし、3次元渦層は2次元渦層よりも一つ次元が多くなっており、2次元渦層には見られない特異性を獲得する可能性も否定できない。こうした3次元渦層に特有の新しい現象を発見することが3次元渦層の重要な問題の一つである。本論文では2次元的な曲率爆発ではない3次元渦層の特異性が存在するのか、また存在するとすれば、それはどのようなものかを数値的に明らかにする。

## 2 数値計算法

我々は次のような不安定な定常 Swirling 流の不連続面を考える。

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = \begin{cases} (0, \frac{\Gamma_1}{2\pi r}, 0) & \text{for } r < R, \\ (0, \frac{\Gamma_2}{2\pi r}, 0) & \text{for } r > R, \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  は、それぞれ円筒(半径  $R$ )の内側と外側の回転流の強さを与えている。この時、この定常流は底面の半径  $R$  の円筒渦層と中心で強さ  $\Gamma_1$  を持つ渦糸を定義する。この渦層は各点で渦線に垂直に交わる2次元渦層(つまり半径  $R$  の円環渦層)を含むので、2次元渦層に見られる曲率特異性が発生することは明らかに予測できる。(以後、このような渦線と垂直な方向に現れる曲率特異性を“2次元曲率特異点”と呼ぶことにする。)一方で、こ

の3次元円筒渦層に摂動を与えた時の時間発展の直接数値計算 [15] によれば, この2次元曲率特異性だけでなく, 渦線に沿った方向の2階微分も爆発していることが示唆されている. 我々はこの示唆に基づき, この特異点がどのようなものであるかを明確にするために, 2次元曲率特異点が発生しないように, 円筒渦層に軸対称性を仮定して, そこに現れる特異点の存在と性質を数値的に確かめる.

この軸対称性を持つ円筒渦層は, 一本の代表曲線  $(r(\alpha, t), \theta(\alpha, t), z(\alpha, t))$ , ( $\alpha$  は曲線の Lagrange パラメータ,  $t$  は時間) の運動として表現される. 渦層はこの代表曲線を対称軸のまわりで一回転させて得られる. また, この代表曲線は渦層の中の本の渦線 (vortex line) に一致していることに注意する. この渦線の時間発展方程式は Caffisch ら [5] によって次のように与えられている.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{2\pi^2} \text{PV} \int r' \theta'_\alpha \left( \frac{m}{4rr'} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{r' - r}{1 - m} E - \frac{2r}{m} (E - K) \right) d\alpha', \quad (2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{2\pi^2} \text{PV} \int r' \theta'_\alpha (z - z') \left( \frac{m}{4rr'} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2}{m} (E - K) + \frac{E}{1 - m} \right) d\alpha', \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\Gamma_2 + \Gamma_1}{4\pi r^2}. \quad (4)$$

ただし,  $r'$  や  $\theta'$  は, それぞれ  $r(\alpha')$  や  $\theta(\alpha')$  などを表している.  $E = E(m)$  と  $K = K(m)$  はそれぞれ第一種, 第二種楕円積分であり,  $m$  は次で与えられている.

$$m = \frac{4rr'}{(z - z')^2 + (r + r')^2}.$$

右辺の積分 (2) と (3) は  $\alpha = \alpha'$  で特異なので, これらの積分は Cauchy の主値積分の意味で定義されている.

これらの方程式の数値計算には Caffisch らが用いた方法を用いる. 詳しい数値計算法の記述については論文 [4] を参照してもらうことにして, 以下ではその主要なアイデアだけを述べる. まず, 渦層には  $\alpha$  に対する周期境界条件を課す. つまり,  $z = \bar{z} + \alpha$  とおいて,  $r(\alpha, t)$  と  $\theta(\alpha, t)$ ,  $\bar{z}(\alpha, t)$  がそれぞれ周期 1 の周期関数と仮定する. この時, 右辺の積分 (2) と (3) を以下のような対称な遠距離の打ち切り積分  $I_M(\alpha)$  で近似する.

$$I_M(\alpha) = \text{PV} \int_{\alpha - (M + \frac{1}{2})}^{\alpha + (M + \frac{1}{2})} f(\alpha, \alpha') d\alpha'.$$

ただし,  $f(\alpha, \alpha')$  は各被積分関数を表しているものとする. 変数  $\alpha$  は  $-0.5$  から  $0.5$  の間を動き, また, 今回の数値計算では周期  $M = 4$  で打ち切ったものを近似として用いている. (この打ち切りの妥当性については, Caffisch らの論文 [4] を参照のこと.) 次に変数  $\alpha$  を  $N$  点に等分割して  $I_M(\alpha)$  を次の和で近似計算する.

$$I_M^h(\alpha) = 2h \sum_{k=-\tilde{N}, k:\text{odd}}^{\tilde{N}} f(\alpha, kh).$$

ここで,  $\tilde{N} = (2M + 1)N + 1$  で  $h = \frac{1}{\tilde{N}}$  ある. この和は与えられた各点  $\alpha$  に対して, そこを中心の一つずつ飛ばした点からの評価を足し合わせることに相当する. このような和の取

り方は 周期的な特異積分の台形則近似に対する Euler-Macraurin 展開の Richardson 補外の一般化理論から, 通常の台形則に比べて高精度な近似を与える事が Sidi や Israeli ら [18] によって示されている. なお, この場合  $O(N^{-3})$  の近似を与えている. (通常の台形公式では  $O(N^{-1})$  であることに注意する.)

$\theta$  の微分  $\theta_\alpha$  は変数  $\theta$  の離散フーリエ級数展開を微分して求める. 時間方向の積分は 4 次の Runge-Kutta 法を用いる. 加えて, この問題は初期摂動に関してアダマールの意味で非適切 (低波長不安定)[4] なので数値計算の丸め誤差が蓄積して数値解に悪い影響を及ぼす. そこで, 我々は Krasny[8] の用いた Fourier-filtering の技法を用いて, 数値誤差の低減を試みる. すなわち, まず数値解を離散フーリエ展開して, 各係数に対して, その大きさがある閾値より小さい時, その係数を強制的に 0 にする. この方法は多くの丸め誤差に敏感な数値計算に用いられて成功している [4, 6, 17]. 今回の数値計算では 4 倍精度の数値計算を用いているので, その閾値を  $10^{-25}$  に設定して計算を行っている.

最後に数値解に現れる特異点を数値的に検出する方法について述べる. 十分大きな  $k$  に対して, 解のフーリエ係数が次の漸近形状を持つと仮定する.

$$|\hat{r}_k(t)| = C_r k^{-p_r} \exp(-\delta_r k), \quad (5)$$

$$|\hat{z}_k(t)| = C_z k^{-p_z} \exp(-\delta_z k), \quad (6)$$

$$|\hat{\theta}_k(t)| = C_\theta k^{-p_\theta} \exp(-\delta_\theta k). \quad (7)$$

ただし,  $C_r, C_z, C_\theta, p_r, p_z, p_\theta, \delta_r, \delta_z, \delta_\theta$  の各係数は  $k$  によらないパラメータである. また,  $\hat{r}_k(t), \hat{z}_k(t)$  及び  $\hat{\theta}_k(t)$  は次で定義される.

$$r(\alpha, t) = 1.0 + \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{r}_k(t) \exp(2\pi i k \alpha),$$

$$z(\alpha, t) = \alpha + \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{z}_k(t) \exp(2\pi i k \alpha),$$

$$\theta(\alpha, t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{\theta}_k(t) \exp(2\pi i k \alpha).$$

各時間ステップにおいて, 我々は係数  $\delta_r(t)$  および  $\delta_z(t), \delta_\theta(t)$  を数値解の漸近形状 (5), (6), (7) への各点 form-fit で求める. すなわち, 各変数について漸近形の中には, それぞれ三つのパラメータがあるが, これらを求めるには数値解のフーリエ係数のデータが三つわかればよい. そこで, 各モードに対して連続する三つのフーリエ係数を用いて, これらの係数を求める. それから  $\delta_r(t), \delta_z(t), \delta_\theta(t)$  に対して, それが 0 になる時間を補外によって求める. この時刻において, 解のフーリエ係数はべき乗程度でしか減衰しなくなるので, そのフーリエ係数から構成される解は特異性を持つ. ただし, 解がどのような特異性を持つかは  $p_r, p_\theta, p_z$  の大きさによる. このように解のフーリエモードの漸近形状から数値解に現れる特異点を追跡する方法は Sulem ら [20] によって提案され, 2 次元渦層に現れる曲率特異点の追跡に対しても効果的に用いられている [8, 17].

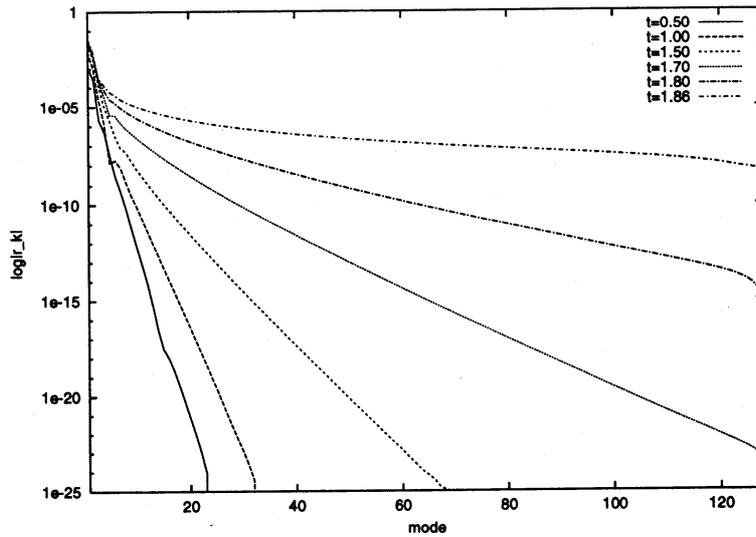


図 1: 時刻 0.5 から 1.86 までの解  $r$  の離散フーリエ係数の大きさ  $|\hat{r}_k(t)|$  の対数プロット.

### 3 数値計算結果

ここでは  $\Gamma_1 = 6$ ,  $\Gamma_2 = 0$  の場合 (この場合渦線を表す代表曲線は不安定である) の数値結果を与える. 渦層の初期形状には次を与える.

$$\begin{cases} r(\alpha, 0) = 1.0 + \epsilon \cos 2\pi\alpha, \\ z(\alpha, 0) = \alpha + \epsilon \cos 2\pi\alpha, \\ \theta(\alpha, 0) = \epsilon \cos 2\pi\alpha. \end{cases} \quad (8)$$

ここで, 初期摂動の大きさ  $\epsilon = 0.01$  であり, 渦線は 256 点分割し, Runge-Kutta 法の時間刻み幅は 0.001 に取る.

図 1 は時刻  $t = 0.5, 1, 1.5, 1.7, 1.8, 1.86$  における離散フーリエ係数の大きさの対数プロットである. 時間の経過とともに高次のフーリエ係数が急激に成長している. 前述の数値計算法にしたがって各点 form-fit によって,  $\delta_r(t)$  の値を求めたのが図 2 である. ここには時刻 1.65, 1.7, 1.75, 1.8, 1.83, 1.85 における  $\delta_r(t)$  の値をプロットしている. これらの値は連続する三つのモードに応じて一つ値が決まるので, データにはモード依存性があることに注意する. ここで, 中領域のモードに対して, これらの値はモードに依存しない値を取っている. 我々はこのモード不変な値をこの時刻における  $\delta_r$  の値として採用する. 高次のモードに対して, 値は急激に変化しているが, これは高次モードの打ち切り誤差の影響によるものと考えられる. 実際, 図 3 に示されているように,  $\delta_r$  のモードに依存しない値を持つ領域は分割点を増やすにつれて拡大するので, 分割数が無限に近付けば高次モードに対する  $\delta_r$  の値として, このモード不変な値を採用するのは妥当である. このモード不変な  $\delta_r$  を時間に対してプロットしたのが図 4 である. 時間が進むにつれて, この値は 0 に近づく. このデー

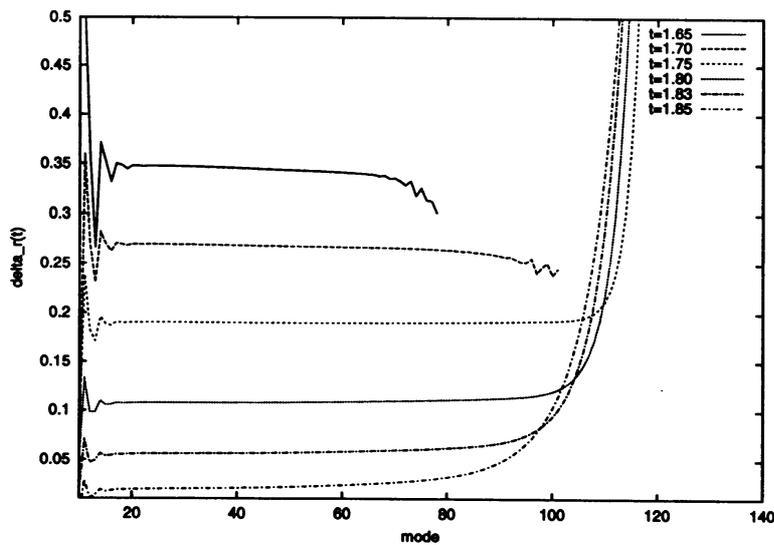


図 2: 時刻 1.65 から 1.85 までのモード  $k$  に対する  $\delta_r(t)$  のプロット.

を線形補外して  $\delta_r(t) = 0$  なる時刻を求めると  $t^* \approx 1.864$  となる. この時刻において変数  $r$  に特異点が現れると数値的に予測される.

次に, 漸近形状のべきの指数  $p_r$  を調べる. 図 5 は各時刻におけるべきの指数の大きさをプロットしている. それによると,  $p_r$  は中領域でモードには依存せず, 約 2.5 の値をとり, さらに時間に大きく依存しないように見える. 一方で, 高次のモードに対しては大きな依存性を持つが, 再び図 3(b) に示すように, この 2.5 を取るモードの範囲は分割数が大きくなるにつれて広がることから,  $\delta_r$  と同様に, 2.5 付近の値を  $p_r$  の値として採用してよい. ただし,  $p_r$  の値が本当に 2.5 であるかどうかを決定するのは今回の 4 倍精度の数値計算からは極めて困難である. しかし, 2 次元渦層に現れる特異点では, このべき指数は 2.5 であるということが漸近解析から知られており, ここにおいても 2.5 とす推定するのは自然なことであろう. べきの指数の 3 桁目以降を正確に定めるには多倍長精度の数値計算が必要であり, これは将来において実行されるべきものである.

ともかく, これらの考察から, 変数  $r$  について, 特異性が発生する時刻  $t^*$  の直前において,

$$|\hat{r}_k(t)| \sim k^{-2.5} \exp(-\delta_r(t)k). \quad (9)$$

なる漸近形状を持つ事がわかった. このことは, 特異時刻において, 変数  $r$  の  $\alpha$  による 2 階微分が爆発することを意味する. 実際に図 6 にあるように, 変数  $r$  の 1 階微分は連続であるが, その 2 階微分は不連続性を獲得していく様子がわかる.

ページの都合上図は割愛するが, 同様の方法を変数  $\theta$  や  $z$  に用いると, 次のような結果が得られる.

$$\begin{aligned} |\hat{z}_k(t)| &\sim k^{-2.5} \exp(-\delta_z(t)k), \\ |\hat{\theta}_k(t)| &\sim k^{-p_\theta} \exp(-\delta_\theta(t)k), \end{aligned}$$

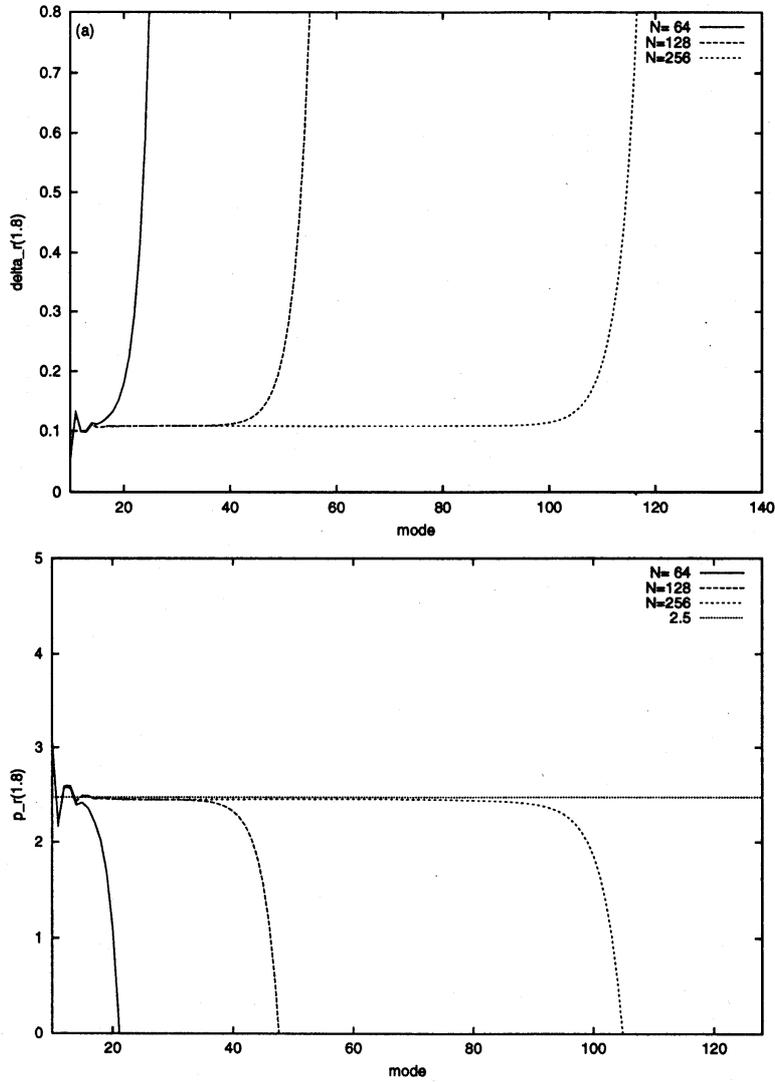


図 3: 離散分割点数  $N = 64, 128, 256$  に対する (a)  $\delta_r(1.8)$  と (b)  $p_r(1.8)$  のプロット

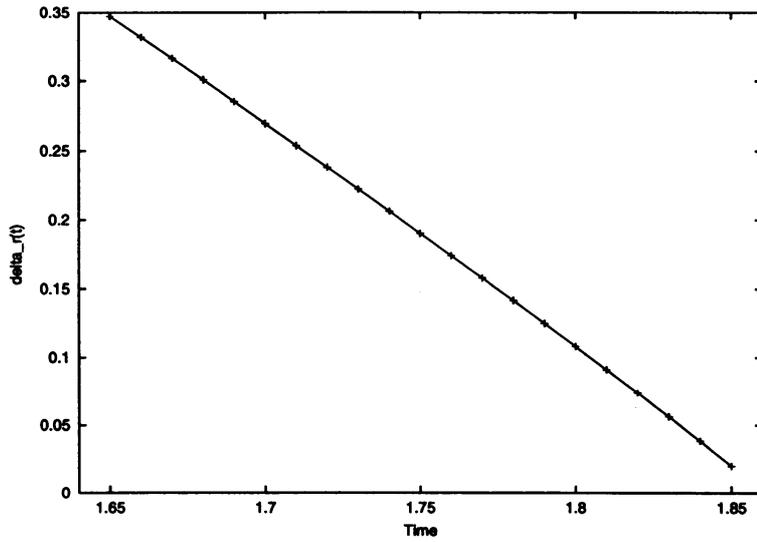


図 4: 時刻 1.65 から 1.85 までの  $\delta_r(t)$  のプロット.

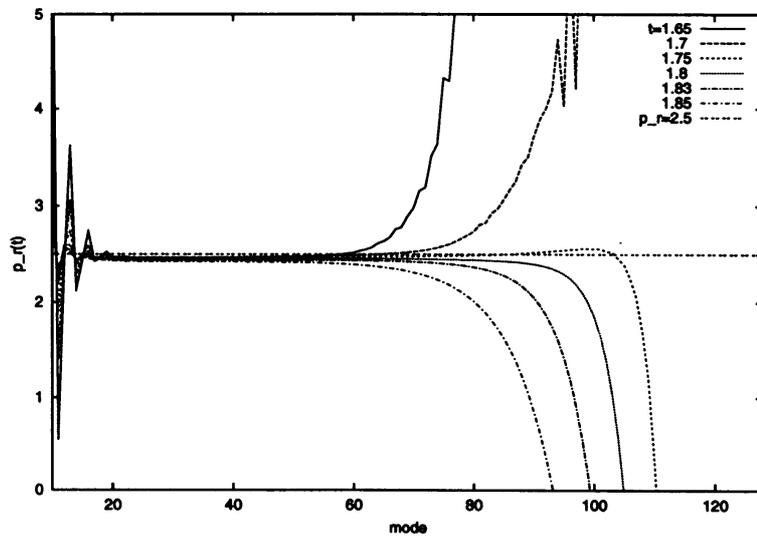


図 5: 時刻 1.65 から 1.85 までの変数  $r$  のフーリエモードのベキ減衰率  $p_r(t)$  の様子

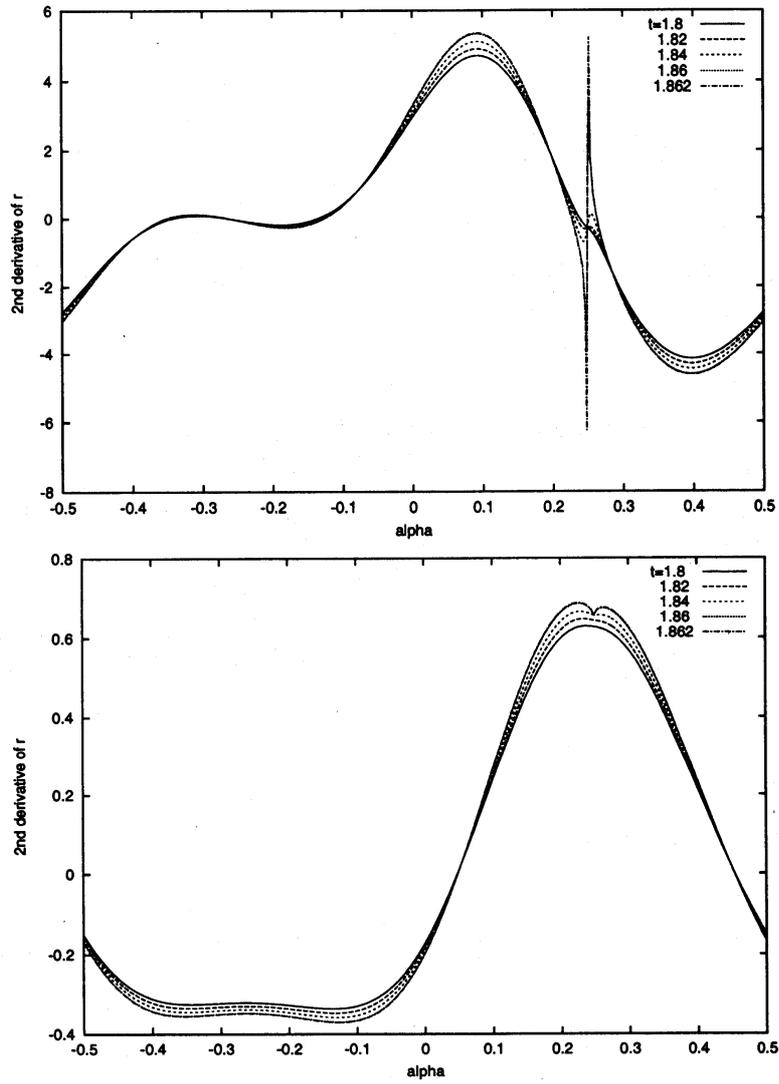


図 6: 時刻 1.7 から 1.86 までの (a) 変数  $r(\alpha, t)$  の  $\alpha$  に関する二階微分のプロット, (b) 一階微分のプロット.

ただし、変数  $\theta$  に関しては  $p_\theta > 3$  と、二桁目以上の精度で値を決定することは現在の精度からは不可能であった。

## 4 結論

これらの結果は、軸対称渦層の渦線の  $\alpha$  に沿った曲率が有限時間で爆発する事を示唆している。曲率が爆発するという点では2次元渦層の曲率特異性と同じであるが、ここで示唆された特異点の発生は渦線に沿った方向での曲率であり、渦線と垂直な方向に生成する2次元曲率特異点とは異なっている。また、その違いは渦層の強さ (vortex sheet strength) という物理量に着目することでも見る事ができる。詳しい定義はここでは割愛するが、渦層を定義すると渦層の強さという量が同時に定義できる。この量は渦層における渦度 (渦層の場合は渦度が  $\delta$  関数的に存在していると仮定しているので、渦度そのものではないが) の大きさに関係する量である。この渦層の強さに関して2次元渦層では、渦層の強さに cusp 不連続が生じるということが知られているが、この軸対称渦層の場合は渦層の強さの1階微分に cusp が生じることが示される。この点から見ても、今回の特異点は2次元の曲率特異点とは異なる性質を持っている。これらの数値的結果は3次元円筒渦層には二方向に渦層の強さなどの物理的な性質のやや異なる二つの曲率特異点が発生することを強く示唆しており、今後漸近解析などの解析的な手法によって明らかにすることが望まれる。最後に、ここで報告した数値計算の詳細は論文誌 *Physics of Fluids* に (2002) 掲載予定である。

## 参考文献

- [1] G. Birkhoff, "Helmholtz and Taylor instability," *Proc. Symp. Appl. Math.* **12**, pp.55–76 (1962).
- [2] M. Brady and D.I. Pullin, "On singularity formation in three-dimensional vortex sheet evolution," *Phys. Fluids* **11**, 3198 (1999).
- [3] R.E. Caffisch and O.F. Orellana, "Singular solutions and ill-posedness for the evolution of vortex sheets," *SIAM J. Math. Anal.* **20**, pp.293–307 (1989).
- [4] R.E. Caffisch, X. Li and M.J. Shelley, "The collapse of an axi-symmetric, swirling vortex sheet," *Nonlinearity* **6**, 843 (1992).
- [5] R.E. Caffisch and X. Li, "Lagrangian theory for 3D vortex sheets with axial or helical symmetry," *Transport Theory Stat. Phys.* **21**, 559 (1992).
- [6] J.S. Ely and G.R. Baker, "High-precision calculations of vortex sheet motion," *J. Comput. Phys.* **111**, 275 (1993).
- [7] T. Ishihara and Y. Kaneda, "Singularity formation in three-dimensional motion of a vortex sheet," *J. Fluid Mech.* **300**, 339 (1995).

- [8] R. Krasny, "A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation," *J. Fluid Mech.* **167**, 292 (1986).
- [9] R. Krasny, "Desingularization of periodic vortex sheet roll-up," *J. Comput. Phys.* **56**, 292 (1986).
- [10] D.I. Meiron, G.R. Baker and S.A. Orszag, "Analytical structure of vortex sheet dynamics. Part 1. Kelvin-Helmholtz instability," *J. Fluid Mech.* **114**, 283 (1982).
- [11] D.W. Moore, "The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet," *Proc. R. Soc. London Ser. A.* **365**, 105 (1979).
- [12] M. Nitsche and R. Krasny, "A numerical study of vortex ring formation at the edge of a circular tube," *J. Fluid Mech.* **276**, pp.139–161 (1994).
- [13] M. Nitsche, "Singularity formation in a cylindrical and a spherical vortex sheet," to appear in *J. Comput. Phys.*, (2001).
- [14] P.G. Saffman, "Vortex Dynamics," Cambridge University Press, §8 (1992).
- [15] T. Sakajo, "Numerical computation of a three-dimensional vortex sheet in a swirl flow," *Fluid Dynamics Research* **28**, 423 (2001).
- [16] T. Sakajo, "渦層の巻き上がりの複素時間特異点," *数理解析研究所講究録* (2002) to appear.
- [17] M.J. Shelley, "A study of singularity formation in vortex-sheet motion by a spectrally accurate vortex method," *J. Fluid Mech.* **244**, 493 (1992).
- [18] A. Sidi and M. Israeli, "Quadrature methods for periodic singular and weakly singular Fredholm integral equations," *J. Sci.* **3**, 201 (1988).
- [19] C. Sulem, P.L. Sulem, C. Bardos and U. Frisch, "Finite time analyticity for the two and three dimensional Kelvin-Helmholtz instability," *Commun. Math. Phys.* **80**, pp.485–516 (1981).
- [20] C. Sulem, P.L. Sulem, and H. Frisch, "Tracing complex singularities with spectral methods," *J. Comput. Phys.* **50**, 138 (1983).