

2次元量子 Markov 過程と緩和定数

木村 元 (Gen Kimura),^{a,*1} 湯浅 一哉 (Kazuya Yuasa),^{a,*2} 今福 健太郎 (Kentaro Imafuku)^{b,*3}

^a 早稲田大学大学院 理工学研究科
(Department of Physics, Waseda Univ.)

^b ローマ第二大学 ボルテラ研究所
(Centro Vito Volterra, Università di Roma Tor Vergata)

概要

本稿では 2次元量子 Markov 過程を緩和定数に着目して議論する。まず始めに、具体的モデルとして“強結合”スピン・ボソン系を取り上げ、そのスピン緩和に見られる興味深い現象—緩和定数の分岐現象—を紹介する。また、同じモデルにおいて縦・横緩和定数間の有名な関係式 $2\Gamma_T \geq \Gamma_L$ を証明し、さらにこの不等式を足がかりとして、2次元量子 Markov 過程の一般論を行なう。そしてこの不等式が、一般の量子 Markov 過程を記述する Completely Positive Dynamical Semigroup が緩和定数に課す、極めて普遍的な不等式であることを証明する。

1 序論

量子論に基づく散逸等の不可逆現象の記述は、非平衡統計力学の基礎や量子論における観測問題とも係わり、興味深く大変重要なテーマである。また、昨今のナノテクノロジーの進歩に伴う量子デバイスの発展や、量子コンピュータ、量子テレポーテーションといった次世代通信技術の実現にとっても、量子散逸現象に対する理論的理解はますます欠かせないものとなってきた。

時間反転対称性を持つ量子論に基づいて散逸現象を記述する際の有力なアプローチの一つとしては、環境系を考慮に入れた全体系に対して量子論を適用し、改めて対象系のダイナミクスを引き出す方法がある。その際、環境系の自由度を無限大に想定することで、対象系の不可逆的な振舞いを導くことができる^{1,2}。特に量子光学の対象となる系において数多くの解析がなされており、それらと実験との整合はこのアプローチに対する正当性を示すものとなっている。

しかしながら、全ての散逸現象の機構が理解されたとは言えず、⁴ 量子光学の対象とはならない系も念頭に、様々なタイプの散逸過程を調べる必要があるであろう。そこで本稿では、2次元系の Markov 的緩和ダイナミクスに焦点を当て、量子光学で通常議論される弱結合系の範囲を超えて散逸過程を議論する。まず第 II 節では具体的にスピン・ボソン系 [3] を例に取り、ある意味においてボソン場との“強い結合”下にあるスピン系の緩和ダイナミクスを詳しく解析する。そこでは、弱結合系には見られない興味深い現象—緩和定数の分岐現象—を紹介するとともに、スピン緩和を特徴

*1 Email address: gen@hep.phys.waseda.ac.jp

*2 Email address: yuasa@hep.phys.waseda.ac.jp

*3 Email address: imafuku@volterra.mat.uniroma2.it

*4 例えば量子観測過程における非干渉化等の機構に関して、共通の理解が得られているとは言えない。

付ける縦・横緩和定数 Γ_L , Γ_T 間の有名な不等式 $2\Gamma_T \geq \Gamma_L$ が成立することをこのモデルの範囲内で証明する. さらに, この不等式を足がかりとして, 第 III 節ではモデルに依ることなく一般の 2 次元系の散逸過程 (Completely Positive Dynamical Semigroup [4, 5]) を議論する. そして, この不等式が, Completely Positive Dynamical Semigroup が緩和定数に課す, 極めて普遍的な不等式であることを証明する.

II “強結合” スピン・ボソン系

本節では, 具体的モデルとして “強結合” スピン・ボソン系を取り上げて, スピン緩和を議論する. すなわち, ここで考えるのは次のハミルトニアン系である:

$$H_{\text{tot}} = \lambda^2 H_S + \lambda V + H_B, \quad (1)$$

$$H_S = \frac{\varepsilon}{2}\sigma_z + \frac{\Delta}{2}\sigma_x, \quad H_B = \int_0^\infty d\omega \hbar\omega a_\omega^\dagger a_\omega, \quad V = i\hbar\sigma_z \int_0^\infty d\omega (g(\omega)a_\omega - g^*(\omega)a_\omega^\dagger). \quad (2)$$

$\lambda^2 H_S$, H_B , λV はそれぞれスピン系, ボソン系, 相互作用のハミルトニアンである (スピン系は, 二つの固有状態を持つ: $H_S|\pm\rangle = \pm(\hbar\Omega_0/2)|\pm\rangle$, $\hbar\Omega_0 = \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}$). ここでは $\lambda \ll 1$ が想定されており, スピン系のエネルギースケールに対して相互作用が強い, “強結合” のスピン・ボソン系である. 最近我々は, 式 (1) のスケーリングの系 [6] に対して $\lambda \rightarrow 0$ ($\tau = \lambda^2 t$ 固定) の極限で散逸過程を導く一つの手法を, 確率極限 (Stochastic Limit) [7, 8] の枠組みに基づいて構築した [9]. 本節では, この枠組みをスピン・ボソン系 (1), (2) に適用して導かれるマスター方程式に基づいて, ボソン場との “強結合” 下にあるスピン系の緩和過程を詳細に解析し, 弱結合のスピン・ボソン系 [ハミルトニアン (1) の代わりに $H_{\text{tot}} = H_S + \lambda V + H_B$ というスケーリングを持つ系] には見られない興味深い現象を紹介しよう.

スピン系の密度演算子 $\rho_S(\tau) = \text{tr}_B \rho_{\text{tot}}(\tau)$ に対するマスター方程式は, 上述の確率極限によって次のように与えられる [9]:

$$\frac{d}{d\tau}\rho_S(\tau) = (\mathcal{H} + \mathcal{D})\rho_S(\tau), \quad \mathcal{H}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \rho], \quad \mathcal{D}\rho = -\frac{\gamma^\theta}{4}[\sigma_z, [\sigma_z, \rho]], \quad \gamma^\theta = \frac{2\eta k_B T}{\hbar}. \quad (3)$$

ただしこの導出では, 初期時刻においてスピン系とボソン系との間に相関はないものとし, ボソン系は温度 T の熱平衡状態にあるものとした:

$$\rho_{\text{tot}}(0) = \rho_S \otimes \rho_B, \quad \rho_B = \frac{1}{Z} e^{-H_B/k_B T}, \quad Z = \text{tr}_B e^{-H_B/k_B T}. \quad (4)$$

k_B は Boltzmann 定数. また, 相互作用ハミルトニアン V の構造因子 $g(\omega)$ は, 小さい ω に対して $2\pi|g(\omega)|^2 \sim \eta\omega$ ($\eta > 0$) という性質を持つものと仮定している (Ohmic モデル).

ここで, このマスター方程式に関して二点コメントしておこう. (i) このマスター方程式が Lindblad 型マスター方程式のクラスに属することは容易に分かる.*5 Caldeira と Leggett の議論 [10] も式 (1) のスケーリングの系を扱っているものと理解することができるが [2], そこで導かれ

*5 Completely Positive Dynamical Semigroup の生成子の一般形が Lindblad [5] や Gorini *et al.* [4] によって与えられており, Lindblad 型マスター方程式として知られている. これにより確率解釈が保証されるのである. 第 III 節でその詳細を述べる.

たマスター方程式は Lindblad 型をしておらず、負の確率の困難を伴うことが知られている [11]. これに対してマスター方程式 (3) は Lindblad 型をしておき、そのような困難はないのである. しかも厳密に解ける系との比較により、ここで用いた手法の正当性も確認されている [9]. (ii) マスター方程式 (3) の平衡解 ($\tau \rightarrow \infty$ の解) は温度無限大の熱平衡状態 $\rho_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-H_S/k_B T}/Z_S$ ($Z_S = \text{tr}_S e^{-H_S/k_B T}$) であり、この ρ_0 に関して一般化された詳細釣り合いの条件 [12] が満足されている. 環境の温度 T が有限であるにもかかわらずスピン系が温度無限大の熱平衡状態に落ち着くのは、 λ^2 のオーダーを持つスピン系にとってはボソン系の温度が非常に高く感じられるためである. しかしながら、以下に見るように、非平衡緩和過程において温度 T は重要なパラメータである.

さて、マスター方程式 (3) と等価な、スピン演算子 $D_{\pm} = |\pm\rangle\langle\mp|$, $D_0 = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$ に対する Bloch 方程式は、 $\text{tr}_S[\rho_S(\tau)D_{\pm}] = \text{tr}_S[\rho_S D_{\pm}(\tau)]$, $\text{tr}_S[\rho_S(\tau)D_0] = \text{tr}_S[\rho_S D_0(\tau)]$ を通じて次のように与えられる:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{D}(\tau) = -\mathbf{A} \mathbf{D}(\tau), \quad \mathbf{D}(\tau) = \begin{pmatrix} D_+(\tau) \\ D_-(\tau) \\ D_0(\tau) \end{pmatrix}, \quad (5a)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (\tilde{\Delta}^2 + 2\tilde{\varepsilon}^2)\gamma^\theta/2 - i\Omega_0 & -\tilde{\Delta}^2\gamma^\theta/2 & -\tilde{\varepsilon}\tilde{\Delta}\gamma^\theta/2 \\ -\tilde{\Delta}^2\gamma^\theta/2 & (\tilde{\Delta}^2 + 2\tilde{\varepsilon}^2)\gamma^\theta/2 + i\Omega_0 & -\tilde{\varepsilon}\tilde{\Delta}\gamma^\theta/2 \\ -\tilde{\varepsilon}\tilde{\Delta}\gamma^\theta & -\tilde{\varepsilon}\tilde{\Delta}\gamma^\theta & \tilde{\Delta}^2\gamma^\theta \end{pmatrix}. \quad (5b)$$

ただし、 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\hbar\Omega_0$, $\tilde{\Delta} = \Delta/\hbar\Omega_0$. このスピン緩和を特徴付けているのは、当然 Bloch 方程式 (5) の行列 \mathbf{A} の固有値である. その三つの固有値のうち (i) 一つが実数で、残りの二つが互いに共役な複素数という場合と (ii) 三つとも実数の場合とがあり得るが、実固有値は振動を伴わない指数関数的減衰を、複素固有値は振動を伴う減衰をもたらす (図 1 参照). ここでは、前者を“縦緩和”, 後者を“横緩和”と呼んで区別することにする. そして、それぞれの緩和の速さを特徴付ける定数を、それぞれ“縦緩和定数” Γ_L , “横緩和定数” Γ_T と呼ぶ. それらは、固有値の実部により、

$$\begin{cases} \Gamma_L \equiv (\text{行列 } \mathbf{A} \text{ の実固有値}), \\ \Gamma_T \equiv (\text{行列 } \mathbf{A} \text{ の複素固有値の実部}) \end{cases} \quad (6)$$

で与えられる. マスター方程式 (3), 及び Bloch 方程式 (5) は現象論的ではなく、ハミルトニアン (1), (2) を基礎として導出されたものであり、したがって縦・横緩和定数 Γ_L , Γ_T はハミルトニアン (2) に含まれていたパラメータ ε , Δ , η , 及び、初期状態の温度 T で与えられている. しかも、行列 \mathbf{A}

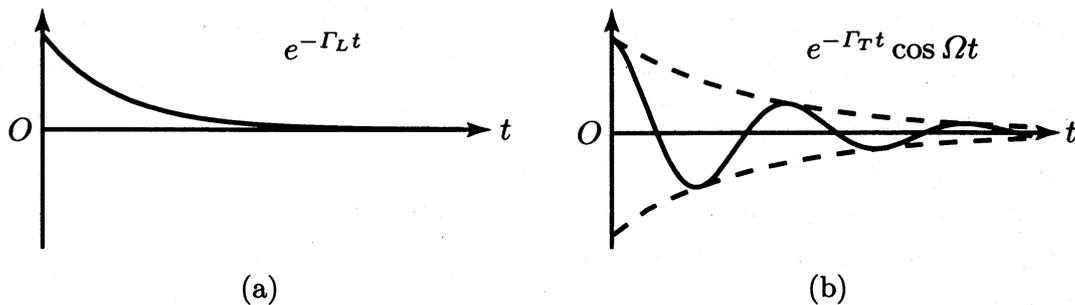


図 1: (a) 縦緩和, (b) 横緩和のイメージ.

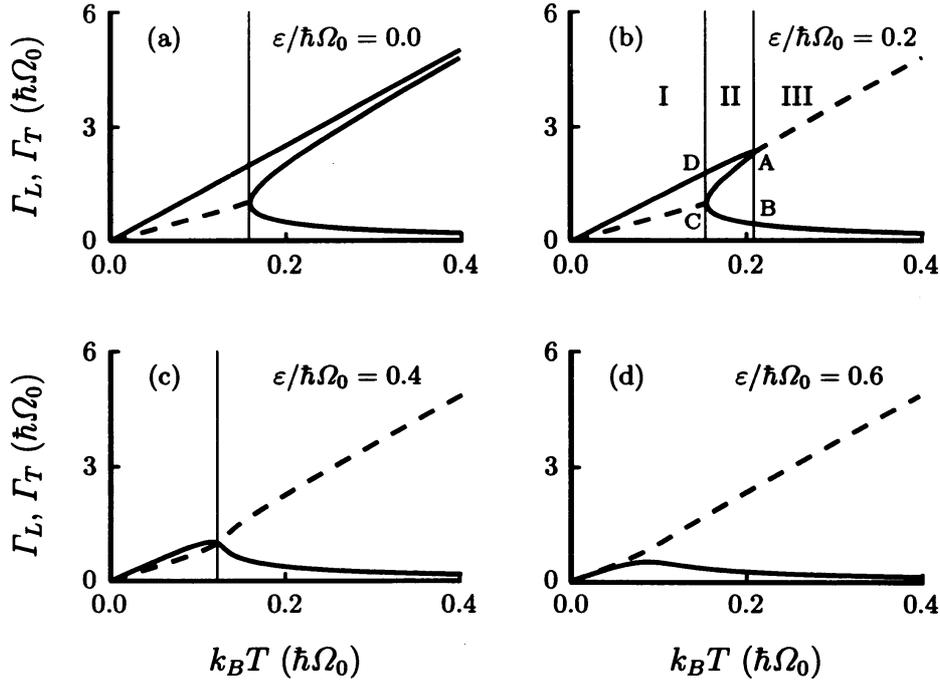


図 2: 縦緩和定数 Γ_L (実線), 横緩和定数 Γ_T (破線) の温度依存性.

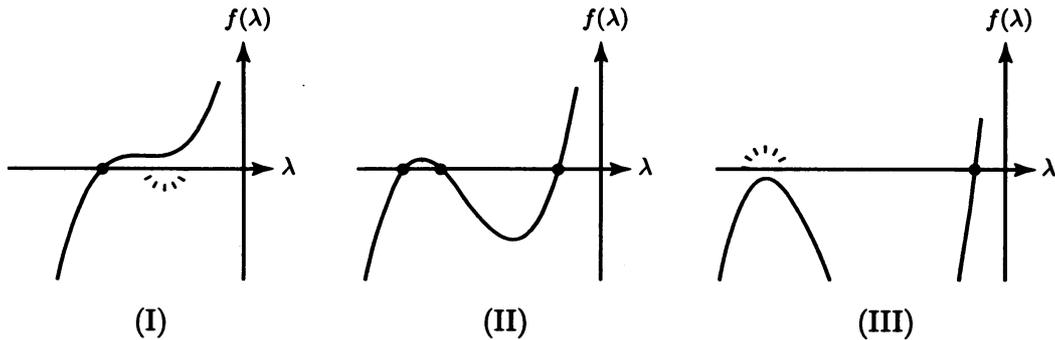


図 3: 特性関数 $f(\lambda) = \det(\lambda - A)$ の温度依存性. (I)–(III) は図 2(b) の各温度領域に対応する.

の固有値は 3 次方程式の解の公式により得られ, Γ_L, Γ_T は解析的に求められるのである. そこで, 緩和定数 Γ_L, Γ_T のパラメータ依存性を見よう.

図 2 に, 様々な $\varepsilon/\hbar\Omega_0$ に対する緩和定数 Γ_L, Γ_T の温度依存性を示す. まず, パラメータ ε によって大きく様相が異なることが分かるであろう. 弱結合系ではこのようなことはなく, パラメータ ε に依らずに常に $\Gamma_L = \tilde{\Delta}^2 \gamma^\theta, \Gamma_T = \tilde{\Delta}^2 \gamma^\theta / 2$ [ただし, ここでは $\gamma^\theta = 2\pi |g(\Omega_0)|^2 \coth(\hbar\Omega_0/2k_B T)$] である [8]. しかも図 2 を見ると, 興味深い現象を確認することができる. 例えば図 2(b) に着目すると, 横緩和定数 Γ_T がある温度において分岐して二つの縦緩和定数 Γ_L になったり, 逆に二つの縦緩和定数 Γ_L が合流して横緩和定数 Γ_T になることがあるのである.

このメカニズムは, Bloch 方程式 (5) の行列 A に対する特性関数 $f(\lambda) = \det(\lambda - A)$ のゼロ点 (実固有値) を追うことで理解することができる. 図 3 に, 図 2(b) の各温度領域 I, II, III における特性関数 $f(\lambda)$ の様子を示した. I の実固有値 (縦緩和定数) は, 温度が上昇すると III で消え, 複素固有値 (横緩和定数) になってしまう. 一方, I から II にかけて新たに生じる実固有値もある. これは典型的

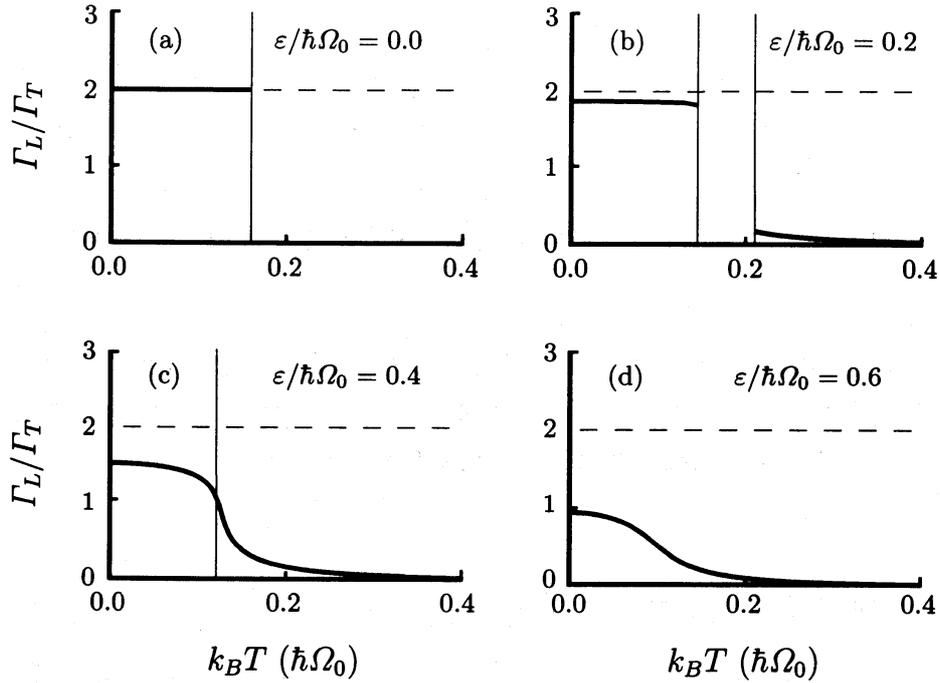


図4: 縦・横緩和定数比 Γ_L/Γ_T の温度依存性. 図2に対応した図である.

な分岐の機構である [13]. 緩和定数の温度依存性に分岐現象が見られるのである.*6

続いて, 縦・横緩和定数の比に着目しよう. 図4は, 図2に対応した縦・横緩和定数比 Γ_L/Γ_T の温度依存性である. これを見ると, 任意のパラメータに対して不等式

$$2\Gamma_T \geq \Gamma_L \quad (7)$$

が成立しているように見える (弱結合系では常に $2\Gamma_T = \Gamma_L$). 実際に不等式 (7) は, 以下の補題 1, 2 によって証明することができるのである (補題の証明は直接的なので省略する).

補題 1 $M_{R,3} \equiv \{A : 3 \text{ 行 } 3 \text{ 列の行列} \mid \text{tr } A, \det A, \text{tr adj } A \in \mathbb{R}\}$ (ただし, $\text{adj } A$ は行列 A の余因子行列, \mathbb{R} は実数の集合) とすると, $A \in M_{R,3}$ の固有値の実部がゼロ以上であることの必要十分条件は,

$$\text{tr } A \geq 0, \quad \det A \geq 0, \quad \text{tr adj } A \geq 0, \quad \text{and} \quad f(\text{tr } A) \geq 0 \quad (8)$$

である.

補題 2 $A \in M_{R,3}$ が条件 (8) を満たすとき, その固有値 λ_i ($i = 1, 2, 3$) に関して不等式

$$\begin{aligned} \text{Re } \lambda_1 + \text{Re } \lambda_2 &\geq \text{Re } \lambda_3, \\ \text{Re } \lambda_2 + \text{Re } \lambda_3 &\geq \text{Re } \lambda_1, \\ \text{Re } \lambda_3 + \text{Re } \lambda_1 &\geq \text{Re } \lambda_2 \end{aligned} \quad (9)$$

が成立することの必要十分条件は,

$$f(\text{tr } A/2) \geq 0 \quad (10)$$

である.

*6 このような分岐現象が如何にして実験にかかり得るかについては, 文献 [14] を参照.

Bloch 方程式 (5) の行列 A が命題中の $M_{R,3}$ に属し、しかも条件 (8), 及び (10) を満たしていることは容易に確認できる。したがって、命題 2 より式 (9) が成立し、二つの固有値が複素数である場合には式 (7) が成立するのである。またこれらの補題は、横緩和定数が存在せず三つの縦緩和定数 $\Gamma_L^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) が存在する場合には

$$\Gamma_L^{(1)} + \Gamma_L^{(2)} \geq \Gamma_L^{(3)}, \quad \Gamma_L^{(2)} + \Gamma_L^{(3)} \geq \Gamma_L^{(1)}, \quad \Gamma_L^{(3)} + \Gamma_L^{(1)} \geq \Gamma_L^{(2)} \quad (11)$$

が成立することを示している。

このように、ここで議論した強結合系は、弱結合系には見られない豊かな構造を示すのである。ここで紹介した分岐現象それ自体興味深いものではあるが、ここでは不等式 (7), 及び (11) に注目し、それが一般の 2 次元 Markov 過程を特徴付ける重要な不等式であることを次節で述べることにしよう。

III 緩和定数間の不等式と Completely Positive Dynamical Semigroup

本節では、緩和定数間に成立する不等式 (7), (11) を、量子 Markov 過程を一般的に記述する Completely Positive Dynamical Semigroup [4, 5] (以後, CPDS)^{*7}に基づいて見直そう。実は不等式 (7), (11) に関しては、Gorini *et al.* が CPDS の枠組みにおいて同様の議論を展開している [4]。ただし、彼らの議論は CPDS に“ある制限を課した特別な場合”に限定されているが、前節のマスター方程式 (3) はパラメータによっては必ずしもその“特別な場合”には入っていないのである。にもかかわらず、我々は式 (7), (11) が任意のパラメータに対して成立することを前節で証明した。このことは、Gorini *et al.* の議論がさらに一般化可能であり、より広いクラスにおいて同様の不等式が成立することを示唆しているように思われる。実際、これらの不等式は一般の CPDS において制限なしに成立することを示すことができるのである。まずは CPDS を簡単に振り返り、Gorini *et al.* の議論を紹介した後に、そのことを示すことにしよう。

III-I Completely Positive Dynamical Semigroup (CPDS)

量子状態は密度行列 ρ により与えられる。その密度行列は確率解釈を保証するための正值性と規格化されたトレース ($\rho \geq 0, \text{tr} \rho = 1$) により特徴付けられる。そこで、状態の時間発展が物理的に意味のあるものであるためには、その時間発展はこれらの性質を保存するようなものでなければならない。Dynamical Semigroup [15] というのは、これを満足する半群^{*8}の総称である。^{*9} さらに、これらの時間発展が背景に環境系の存在を仮定して全体系のユニタリー発展を縮約することで導出されたものであると考えるならば、Heisenberg 描像における時間発展演算子の正值性はさらに強い条件である完全正值性 [16] に置き換えられなければならない [4, 5, 17]。Completely Positive Dynamical Semigroup (CPDS) とは Dynamical Semigroup に完全正值性を課したものである。つまり、環境系の存在下における量子系の Markov 過程の時間発展演算子は必ず CPDS に属さねばならず、CPDS

^{*7} Quantum Dynamical Semigroup と呼ばれる。

^{*8} ここでは半群による時間発展を Markov 的時間発展と言う。

^{*9} 正確には、生成子の存在を保証するための連続性など他の条件もあるが、詳しくは文献 [15] を参照。

は量子 Markov 過程の一般論を与えていると考えられる。Lindblad [5] や Gorini *et al.* [4] は CPDS の生成子の一般形を与えることに成功し、その生成子を持つマスター方程式は Lindblad 型マスター方程式と呼ばれて広く用いられている。対象系の Hilbert 空間の次元 N が有限である場合*10を考えると、それは

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = (\mathcal{H} + \mathcal{D})\rho(t), \quad \mathcal{H}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho], \quad \mathcal{D}\rho = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N^2-1} C_{ij} \{[F_i, \rho F_j^\dagger], [F_i \rho, F_j^\dagger]\} \quad (12)$$

によって与えられる.*11 ただし、 $H = H^\dagger$, $\text{tr} H = 0$, $\text{tr} F_i = 0$, $\text{tr}(F_i^\dagger F_j) = \delta_{ij}$ であり、完全正値性は複素行列 C_{ij} に正値性を課す。

III-II 2次元 CPDS における緩和定数間の不等式

続いて、Gorini *et al.* の議論 [4] を紹介しよう。

定理 1 Gorini *et al.* による緩和定数に関する定理 [4]

生成子 (12) が条件 $[\mathcal{H}, \mathcal{D}] = 0$ を満たすような 2 次元 CPDS の部分集合において、緩和定数 Γ_i ($i = 1, 2, 3$) の間に以下の関係式が成立する:

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 \geq \Gamma_3, \quad \Gamma_2 + \Gamma_3 \geq \Gamma_1, \quad \Gamma_3 + \Gamma_1 \geq \Gamma_2. \quad (13)$$

ただし、緩和定数 Γ_i ($i = 1, 2, 3$) は CPDS の Bloch 方程式 (14) の行列 A の固有値の実部である。

証明 1 定理 1 の証明は以下の補題 3, 4, 5 に基づいている。

補題 3 Dynamical Semigroup の Bloch 方程式 [18]

次元を 2 とすると、Dynamical Semigroup の生成子に基づく Bloch 方程式は、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}(t) = -A \mathbf{M}(t) + \mathbf{b}, \quad (14a)$$

$$\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ M_3(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \gamma_1 & h_3 & -h_2 \\ -h_3 & \gamma_2 & h_1 \\ h_2 & -h_1 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \gamma_1 M_1^0 - h_2 M_3^0 + h_3 M_2^0 \\ \gamma_2 M_2^0 - h_3 M_1^0 + h_1 M_3^0 \\ \gamma_3 M_3^0 - h_1 M_2^0 + h_2 M_1^0 \end{pmatrix}, \quad (14b)$$

$$\begin{cases} M_i^0 = 0 & \text{if } \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = 0, \\ \inf_{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\gamma_i x_i (x_i - 2M_i^0) + 2 \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_i h_j M_k^0 \right) \right] & \text{if } \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \neq 0 \end{cases} \quad (14c)$$

で与えられる。ただし、 $M_i(t)$ は偏極成分 $\text{tr}[\rho(t) F_i]$ である。

*10 Gorini *et al.* は有限次元系で議論しているが、Lindblad は無限次元系を含む、より一般的な結果を導出している。以下で我々が興味あるのは 2 次元系であるため、有限次元系に対する Gorini *et al.* の議論で十分である。

*11 前節のマスター方程式 (3) は、式 (12) において $F_i = \sigma_i/2$ としたものであり、Lindblad 型マスター方程式のクラスに属する。

補題 4 CPDS の Bloch 方程式 [4]

完全正值性条件は, Bloch 方程式 (14) の行列 A におけるパラメータ γ_i ($i = 1, 2, 3$) に対して次の制約を課す:

$$\gamma_1 + \gamma_2 \geq \gamma_3, \quad \gamma_2 + \gamma_3 \geq \gamma_1, \quad \gamma_3 + \gamma_1 \geq \gamma_2. \quad (15)$$

パラメータ γ_i は, 緩和定数そのものではないことに注意されたい. しかし, 次の補題に基づくと, ある条件の下でそれらは緩和定数 Γ_i となる.

補題 5 パラメータ γ_i ($i = 1, 2, 3$) と緩和定数 Γ_i とを結ぶ補題 [4]

Lindblad 型マスター方程式 (12) の生成子において

$$[\mathcal{H}, \mathcal{D}] = 0 \quad (16)$$

が成立する特別な場合には, γ_i ($i = 1, 2, 3$) は Bloch 方程式 (14) の行列 A の固有値の実部, つまり, 緩和定数 Γ_i ($i = 1, 2, 3$) に一致する.

補題 3, 4, 5 によって定理 1 が成立する. つまり, $[\mathcal{H}, \mathcal{D}] = 0$ が成立するマスター方程式に限れば, 緩和定数 Γ_i ($i = 1, 2, 3$) の間に不等式 (13) が成立するのである. QED

ここで強調すべきことは, 前節で議論したマスター方程式 (3) も Lindblad 型マスター方程式のクラスに属すが, 必ずしも条件 (16) を満たしてはいない点である. (例えば, $T > 0$, $\varepsilon \neq 0$ の場合を考えよ.) つまり, 我々は不等式 (7), (11) を Gorini *et al.* の制約を超えた領域でも示したのである. さらに, 不等式 (7), (11) が一般の 2 次元 CPDS において成立することを示すことに我々は成功した. 次がその定理である.

定理 2 一般化された緩和定数に関する定理

2 次元 CPDS では, 緩和定数 Γ_i ($i = 1, 2, 3$) の間に以下の関係式が成立する:

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 \geq \Gamma_3, \quad \Gamma_2 + \Gamma_3 \geq \Gamma_1, \quad \Gamma_3 + \Gamma_1 \geq \Gamma_2. \quad (17)$$

証明 2 第 II 節の補題 1, 2 を用いることができる. つまり, Bloch 方程式 (14) の行列 A が補題 1, 2 の条件 (8), (10) を満たすことを示せばよい. この行列が $M_{R,3}$ に属し, 条件 (8) を満たすことは容易に分かる. 実際, $\gamma_i \geq 0$, $h_i \in \mathbb{R}$ より,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A &= \sum_{i=1}^3 \gamma_i \geq 0, \quad \det A = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + \sum_{i=1}^3 \gamma_i h_i^2 \geq 0, \\ \operatorname{tr} \operatorname{adj} A &= (\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_3 + \gamma_3 \gamma_1) + \sum_{i=1}^3 h_i^2 \geq 0, \\ f(\operatorname{tr} A) &= \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_2 \gamma_3 (\gamma_2 + \gamma_3) + \gamma_3 \gamma_1 (\gamma_3 + \gamma_1) \\ &\quad + \gamma_1 (h_2^2 + h_3^2) + \gamma_2 (h_3^2 + h_1^2) + \gamma_3 (h_1^2 + h_2^2) + 2\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

が成立している.

続いて, 条件 (10) を示そう.

$$\begin{aligned}
 f(\text{tr } A/2) &= -\frac{1}{4}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\
 &\quad + \frac{1}{8}\{(\gamma_1^2 + h_1^2)(\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1) + (\gamma_2^2 + h_2^2)(\gamma_3 + \gamma_1 - \gamma_2) + (\gamma_3^2 + h_3^2)(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3)\} \\
 &= \frac{1}{8}(\gamma_1 - a)(\gamma_1 - b)(\gamma_1 + b), \quad a = \gamma_2 + \gamma_3, \quad b = \gamma_2 - \gamma_3 \tag{19}
 \end{aligned}$$

$$\equiv g(\gamma_1). \tag{20}$$

これが条件 (10) を満たすことは, 補題 4 の式 (15) を用いて直ちに証明される. [実際, 一般性を失うことなく $0 \leq \gamma_3 \leq \gamma_2 \leq \gamma_1$ として, $\gamma_2 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 + \gamma_3$ の範囲で $g(\gamma_1) \geq 0$ を示すことができる.] よって, 補題 2 より行列 A の固有値の実部, つまり緩和定数の間に式 (17) が成立するのである.

QED

こうして, Gorini *et al.* の結果を一般化することができた. この定理が意味するところは重要である. 我々の結論によると, 不等式 (17) は一般の CPDS において必ず成立するものなのである. 前述のとおり, CPDS は量子 Markov 過程の一般論を与える. したがって, 不等式 (17) はモデルに依存しない非常に普遍的なものであるということになる. 事実, 複素固有値が存在する場合の不等式 (7) は, 我々が知る限り核磁気共鳴実験において常に成立している関係式である [19].

IV 結論と議論

本稿では 2 次元量子 Markov 過程を緩和定数に注目して議論した. まず始めに, ハミルトニアン (1) から導かれる緩和ダイナミクスに見られる興味深い現象を, スピン・ボソン系を例に紹介した. その一つが, 緩和定数の分岐現象である. またこのモデルにおいて, 縦・横緩和定数に関する不等式 (7), (11) を証明することに成功した. これは, Gorini *et al.* の議論における制約を超えたものであり, さらに第 III 節において式 (17) [第 II 節での式 (7), (11)] が一般の 2 次元 CPSD で必ず成立する不等式であることが証明された. この証明に用いられた条件 (15) は完全正值性から得られたものであり (補題 4), 完全正值性が緩和定数間に不等式 (17) を課すと言うことができる. あるいは逆に, 完全正值性というある種の抽象的概念に対して, 緩和定数による物理的特徴付けがなされたと言っても良いだろう. さらに, 完全正值性が環境系の存在という仮定から要求されることを考えると, 不等式 (17) は環境系の存在下における散逸現象を特徴付けていると考えられる. 全ての散逸の機構が解明されたとは言えない現段階において, ここで得られた知見は様々な散逸を議論する上で有用なものとなろう.

本研究を発表する場を与えてくださった大矢雅則教授をはじめとする主催者の方々に, また, 研究集会において議論してくださった皆様に, 感謝致します.

参考文献

- [1] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, Vol. 2 of *Series in Modern Condensed Matter Physics* (World Scientific, Singapore, 1993).

- [2] C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Heidelberg, 2000).
- [3] A. J. Leggett *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1 (1987); **67**, 725(E) (1995).
- [4] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **17**, 821 (1976).
- [5] G. Lindblad, *Commun. Math. Phys.* **48**, 119 (1976).
- [6] H. Spohn, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 569 (1980); P. F. Palmer, *J. Math. Phys.* **18**, 527 (1977); L. Accardi, A. Frigerio, and Y. G. Lu, *Acta. Appl. Math.* **26**, 197 (1992).
- [7] L. Accardi, A. Frigerio, and Y. G. Lu, *Commun. Math. Phys.* **131**, 537 (1990); L. Accardi, J. Gough, and Y. G. Lu, *Rep. Math. Phys.* **36**, 155 (1995); L. Accardi, S. V. Kozyrev, and I. V. Volovich, *Phys. Lett. A* **260**, 31 (1999).
- [8] L. Accardi, S. V. Kozyrev, and I. V. Volovich, *Phys. Rev. A* **56**, 2557 (1997).
- [9] G. Kimura, K. Yuasa, and K. Imafuku, *Phys. Rev. A* **63**, 022103 (2001).
- [10] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Physica A* **121**, 587 (1983); **130**, 374(E) (1985).
- [11] W. J. Munro and C. W. Gardiner, *Phys. Rev. A* **53**, 2633 (1996).
- [12] R. Alicki, *Rep. Math. Phys.* **10**, 249 (1976); A. Kossakowski, A. Frigerio, V. Gorini, and M. Verri, *Commun. Math. Phys.* **57**, 97 (1977).
- [13] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Non-Equilibrium Systems* (Wiley, New York, 1977).
- [14] G. Kimura, K. Yuasa, and K. Imafuku, 研究会報告 (第 9 回「非平衡系の統計物理」シンポジウム, 筑波大学, 2001) (to appear in *物性研究*).
- [15] A. Kossakowski, *Rep. Math. Phys.* **3**, 247 (1972); R. S. Ingarden and A. Kossakowski, *Ann. Phys.* **89**, 451 (1975).
- [16] H. Umegaki, M. Ohya, and F. Hiai, *作用素代数入門*, 共立出版, 1984.
- [17] K. Kraus, *Ann. Phys.* **64**, 311 (1971).
- [18] A. Kossakowski, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Astr. Phys.* **21**, 649 (1973).
- [19] A. Abragam, *Principles of Nuclear Magnetism* (Oxford University Press, New York, 1961); F. Haake, in *Quantum Statistics in Optics and Solid-State Physics*, Vol. 66 of *Springer Tracts in Modern Physics*, edited by G. Höhler (Springer-Verlag, Heidelberg, 1973), pp. 98–168; C. P. Slichter, *Principles of Magnetic Resonance* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).