数理解析研究所講究録 1269 巻 2002 年 34-41

半双曲型整関数について
Some results on semihyperbolic entire functions

ウォルター ベルグワイラー (Walter Bergweiler)*
Mathematisches Seminar,
Christian–Albrechts–Universität zu Kiel,
Ludewig–Meyn–Str. 4,
D–24098 Kiel, Germany
諸澤 俊介 (Shunsuke Morosawa)†
Department of Mathematics and Information Science,
Faculty of Science, Kochi University,
Kochi, 780–8520, Japan

概要

The concept of semihyperbolicity introduced by Carleson, Jones and Yoccoz for polynomials is carried over to transcendental entire functions. For certain classes of semihyperbolic entire functions it is shown that there are no wandering domains and that the Julia sets are locally connected.

1 導入

複素力学系の研究において逆関数の特異点は重要な役割を果たす。例えばそれらはファトウ集合の周期成分と密接な関係がある（[20, §2.4] 参照)。有理関数の場合には、逆関数の特異点は臨界値である。整関数の場合には、さらに漸近値がある。臨界値と漸近値を特異値と呼ぶ。

ファトウ [14, §34] はすでに臨界値の $\omega-$ 極限集合がジュリア集合と交わらない有理関数を考察している。現在では、そのような有理関数は双曲型と呼ばれている。ドゥアディとハバード [10, Exposé III] は双曲型を弱めた劣双曲型の概念を導入した。さらにマニエ [17] の仕事を基にして、カールソン、ジョーンズ、ヨッコ

*Supported by G.I.F., G -643-117.6/1999 and by INTAS-99-00089
†Partially supported by the Japan Society for the Promotion of Science (No. 12640182)

ツ [9] が多項式について半双曲型の概念を導入した。それらの論文の中では双曲型の概念とジュリア集合の幾何学的性質との関係が述べられている。特に上記の条件の下で、ジュリア集合が連結であるならば、それが局所連結であることが示されている。

我々は半双曲型整関数を考えたい。クリーテ、角 [15] がすでに半双曲型整関数の半群を考察していることに注意する。ここでは遊走領域の非存在とジュリア集合の局所連結性を考えたい。さらに、それらの結果を理解するために幾つかの例を示す。結果の証明および例の検証は [7] を見ていただきたい。

2 結果

f を整関数とし、それらのファトウ集合とジュリア集合をそれぞれ $F(f)$ と $J(f)$ で表す。$a \in \mathbb{C}$ と $r > 0$ に対して $D(a,\ r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ とする。f が $a \in \mathbb{C}$ で半双曲的であるとは、ある $r > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ で、すべての $n \in \mathbb{N}$ と $f^{-n}(D(a,\ r)) = \{z \in \mathbb{C} \mid f^n(z) \in D(a,\ r)\}$ のすべての成分 U に対して $f^n|_U : U \to D(a,\ r)$ が次数が高々 N の固有写像となるものが存在する時をいう。すべての $a \in J(f)$ で半双曲的な時に f を半双曲型と呼ぶ。

[9] において、半双曲型多項式はいろいろな条件によって特徴付けられた。次の定理で与えられた条件もそれらのひとつである。この条件は [15] においても半双曲型整関数の半群について得られている。$U \subset \mathbb{C}$ に対して、$\mathrm{diam}(U)$ で U の球面距離に関する直径を表す。

定理 1 f は整関数であり、$a \in J(f)$ で半双曲的であるとする。このとき次の性質を満たす $s > 0$ が存在する。すべての $\varepsilon > 0$ に対して $M \in \mathbb{N}$ で $n \geq M$ と $f^{-n}(D(a,\ s))$ の成分 U について $\mathrm{diam}(U) < \varepsilon$ となるものが存在する。

系 1 f を整関数とする。$F(f)$ がジーゲル円板 U を持つと仮定する。このとき f は ∂U のいかなる点でも半双曲的ではない。

定理 2 f を整関数とする。もし f が $a \in \mathbb{C}$ で半双曲的であるならば a は $F(f)$ のいかなる成分の上における $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限関数とはならない。

系 2 半双曲型整関数のファトウ集合は、そこでの反復合成の極限関数が有限となる遊走領域を持たない。

半双曲型整関数のファトウ集合が遊走領域を持つこともあることに注意する。例えば $z \mapsto z + e^{-z} - 1 + 2\pi i$ は半双曲型超越整関数であり、極限函数が ∞ となる遊走領域を持つ。

f のすべての特異値の集合を $\mathrm{sing}(f^{-1})$ で表し、$P(f) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(\mathrm{sing}(f^{-1}))}$ と定義する。[6] において遊走領域における有限極限関数は $P(f)$ の導集合に含まれることが示された。

エレメンコ、リュウビッチは、もし $\mathrm{sing}(f^{-1})$ が有界ならば $F(f)$ のいかなる成分上でも f の反復合成は ∞ に向かわないことを示した（[13, Theorem 1]）。$\mathrm{sing}(f^{-1})$ が有界となるすべての超越整関数 f の族を $\mathcal{B}$ で表す。

系 3 $f \in \mathcal{B}$ が半双曲型であり、$F(f) \neq \emptyset$ とする。このとき $F(f)$ は吸引鉢だけからなる。

次にジュリア集合の局所連結性を考える。

定理 3 f を整関数、U を $F(f)$ の有界不変成分とする。すべての $a \in \partial U$ に対して $r > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ で、$n \in \mathbb{N}$ について、$f^{-n}(D(a, r))$ のすべての成分 V で $V \cap \partial U \neq \emptyset$ となるものが $\deg(f^n|_V : V \to D(a, r)) \leq N$ を満足するようなものが存在すると仮定する。このとき ∂U はジョルダン曲線である。特に f が ∂U 上で半双曲型であるならば、∂U はジョルダン曲線である。

定理 4 f を整関数とする。$F(f)$ は有限個の吸引鉢からなると仮定する。直接吸引鉢 U は有界とし、∂U 上で f は半双曲的とする。さらに $N \in \mathbb{N}$ で、すべての $n \in \mathbb{N}$ と $f^{-n}(U)$ のすべての成分 $V \neq U$ について $\deg(f^n|_V : V \to U) \leq N$ となるものが存在するとする。このとき $J(f)$ は局所連結である。

3 例

マニエ [17] は有理関数 f について $a \in J(f)$ が放物的周期点でなく、循環特異点の $\omega-$ 極限集合にも含まれないならば f は a で半双曲的であることを示した。逆も容易に示せる。さらに、超越整関数の場合には漸近値でも半双曲的にはならない。しかしながら、次に示す例のように放物的周期点を持たず、漸近値も持たず、循環特異点も持たない超越整関数で半双曲型でないものが存在する。

例 1

$$f(z) = \frac{z}{2} - \frac{1}{2\pi}\sin \pi z + c(\cos \pi z - 1)$$

ここで $c = 0.467763\cdots$ は方程式 $\pi + 2\cos 2c\pi - 4c\pi \sin 2c\pi = 0$ の解である。このとき f は放物的周期点を持たず、漸近値も持たず、循環特異点も持たないが $1 \in J(f)$ で半双曲的でない。

例 2

$$f(z) = \frac{az}{\pi^2 - 4z}\cos\sqrt{z}$$

ある A で、すべての $\pi^2 < a < A$ に対して f が以下の性質を持つものが存在する。f は半双曲型で吸引不動点を持ち、$F(f)$ はその鉢のみからなる。また $J(f)$ は無限個の特異値を含む。さらに $J(f)$ は局所連結である。

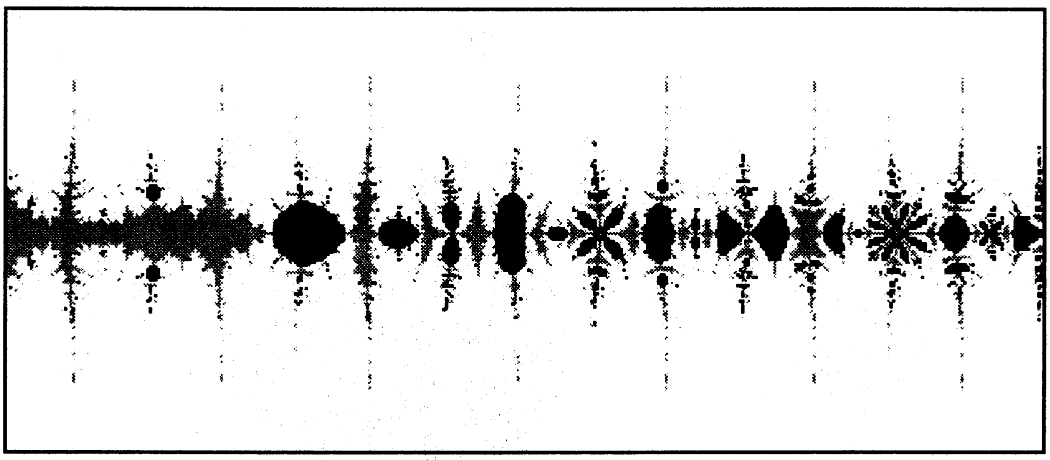

図 1: 例 1 のファトウ集合。黒が吸引不動点 0 の鉢であり、灰色がもう一つの吸引不動点の鉢。範囲は $-4 \le \Re z \le 10$、$|\Im z| \le 3$。

例 3

$$f(z) = \frac{z}{\pi^2 - 4z}\cos\sqrt{z} - b$$

ここで b はすべての $x \in \mathbb{R}$ について $f(x) < x$ となるように十分大きく取る。このとき f は半双曲型であり $J(f) = \mathbb{C}$ である。さらに f は無限個の特異値を持つ。

例 4

$$f(z) = a - (a+\pi)\frac{\sin z}{z}$$

ここで $a = 3.0008\cdots$ は $f(a) = f^5(a)$ を満たすとする。このとき f は a, $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$, $f^4(a)$ 以外の $J(f)$ のすべての点で半双曲的である。また f は遊走領域を持たない。さらに $J(f)$ は局所連結である。

例 5

$$f(z) = \pi - 2\pi\frac{\sin z}{z}$$

f は $J(f)\backslash\{\pi\}$ の各点で半双曲的であり、$F(f)$ は遊走領域を持たない。

例 2–6 において、$\mathrm{sing}(f^{-1}) \cap J(f)$ は有限極限点を持つ。したがって、遊走領域が存在しないことを示すために、[6] の議論を使うことはできない。さらに例 2 と例 3 において $P(f) \cap J(f)$ が無限個の極限点を持つことも容易に示すことができる。

次の例の関数は $\pi^2 < a < 2\pi^2$ の場合に [6] で考えられている。しかし、上と同様の理由により例の範囲では遊走領域の非存在を示すことはできない。

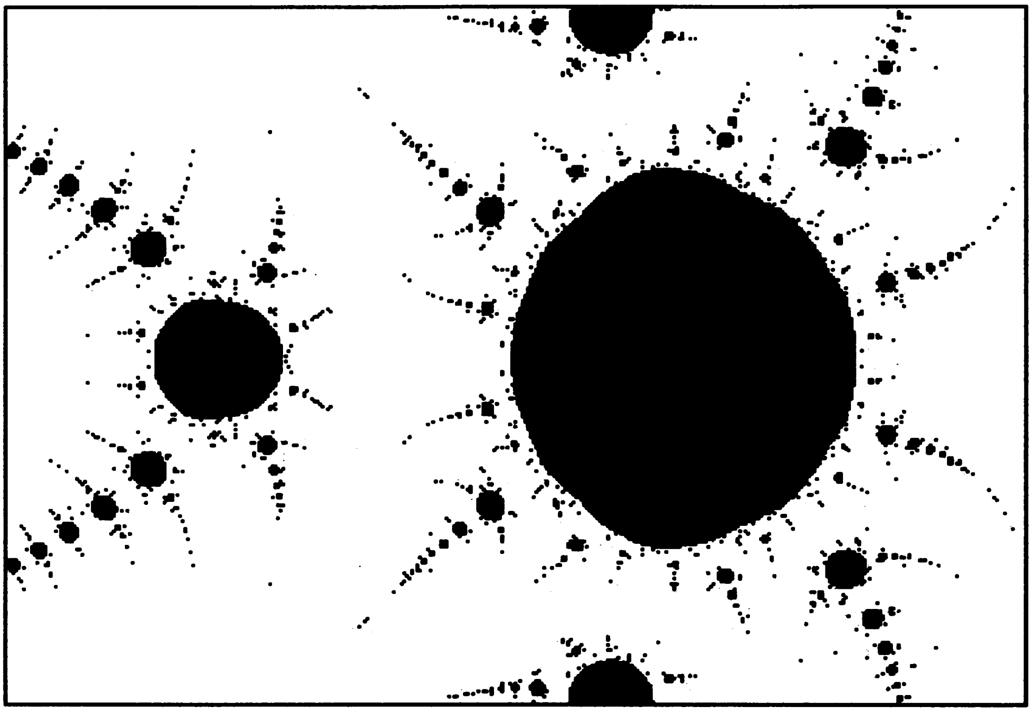

図 2: $a = 3\pi^2$ の場合の例 2 のファトウ集合。$z = \pi^2$ が吸引不動点であり、黒がその鉢。灰色がもう一つの吸引不動点の鉢。範囲は $-25 \leq \Re z \leq 150$、$|\Im z| \leq 60$。

例 6

$$f(z) = \pi^2 - a\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

ある A で、すべての $2\pi^2 \leq a < A$ に対して f が以下の性質を持つものが存在する。f は π^2 以外の $J(f)$ の各点で半双曲的であり、f は遊走領域を持たない。

参考文献

[1] I. N. Baker, Wandering domains in the iteration of entire functions, Proc. London Math. Soc. (3) 49(1984), 563-576.

[2] I. N. Baker and P. Domínguez, Some connectedness properties of Julia sets, Complex Variables Theory Appl. 41 (2000), 371-389.

[3] I. N. Baker and J. Weinreich, Boundaries which arise in the dynamics of entire functions, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 36 (1991), 413-420.

[4] A. F. Beardon, Iteration of Rational Functions, Springer, New York, 1991.

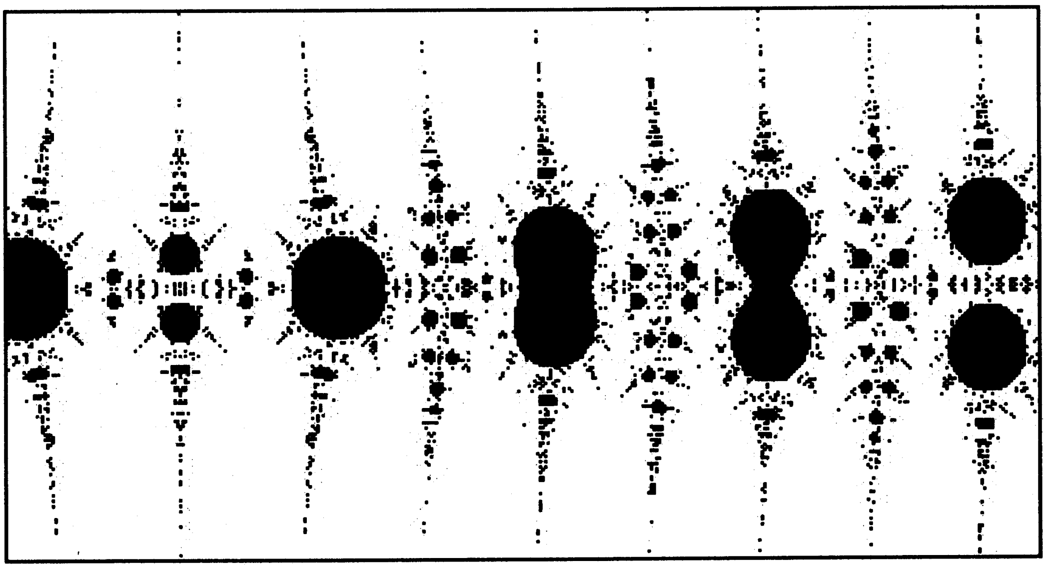

図 3: 例 4 のファトウ集合。範囲は $-5 \leq \Re z \leq 25$、$|\Im z| \leq 8$。

[5] W. Bergweiler, Iteration of meromorphic functions, Bull. Amer. Math. Soc. 29(1993), 151-188.

[6] W. Bergweiler, M. Haruta, H. Kriete, H. Meier and N. Terglane, On the limit functions of iterates in wandering domains, Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. I. Math., 18(1993), 369-375.

[7] W. Bergweiler and S. Morosawa, Semihyperbolic entire functions, preprint.

[8] L. Carleson and T. W. Gamelin, Complex Dynamics, Springer, New York, 1993.

[9] L. Carleson, P. Jones and J. Yoccoz, Julia and John, Bol. Soc. Bras. Mat., 25(1994), 1-30.

[10] A. Douady and J. Hubbard, Étude dynamique des polynômes complexes I & II, Publ. Math. d'Orsay, (1984, 1985).

[11] A. E. Eremenko, On the iteration of entire functions, in "Dynamical systems and ergodic theory", Banach Center Publications 23, Polish Scientific Publishers, Warsaw 1989, 339-345.

[12] A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, The dynamics of analytic transforms, Leningrad Math. J., 1(1990), 563-634.

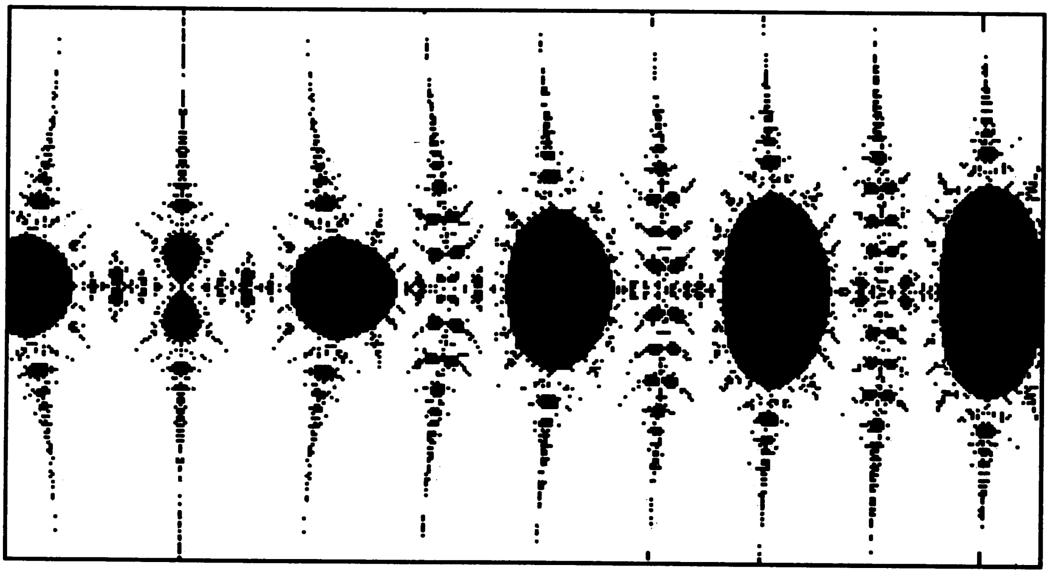

図 4: 例 5 のファトウ集合。範囲は $-5 \le \Re z \le 25$、$|\Im z| \le 8$。

[13] A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, Dynamical properties of some classes of entire functions, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 42(1992), 989-1020.

[14] P. Fatou, Sur les équations fonctionelles, *Bull. Soc. Math. France* 47 (1919), 161-271; 48 (1920), 33-94, 208-314.

[15] H. Kriete and H. Sumi, Semihyperbolic transcendental semigroups, J. Math. Kyoto Univ., 40(2000), 205-216.

[16] O. Lehto and K. I. Virtanen, Quasikonforme Abbildungen, Springer-Verlag, 1965.

[17] R. Mañé, On a theorem of Fatou, Bol. Soc. Bras. Mat., 24(1993), 1-11.

[18] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variables, Vieweg, 1999.

[19] S. Morosawa, Local connectedness of Julia sets for transcendental entire functions, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (eds. W. Takahashi and T. Tanaka), World Scientific, November 1999, 266-273.

[20] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, and T. Ueda, Holomorphic dynamics. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 66, Cambridge University Press 2000.

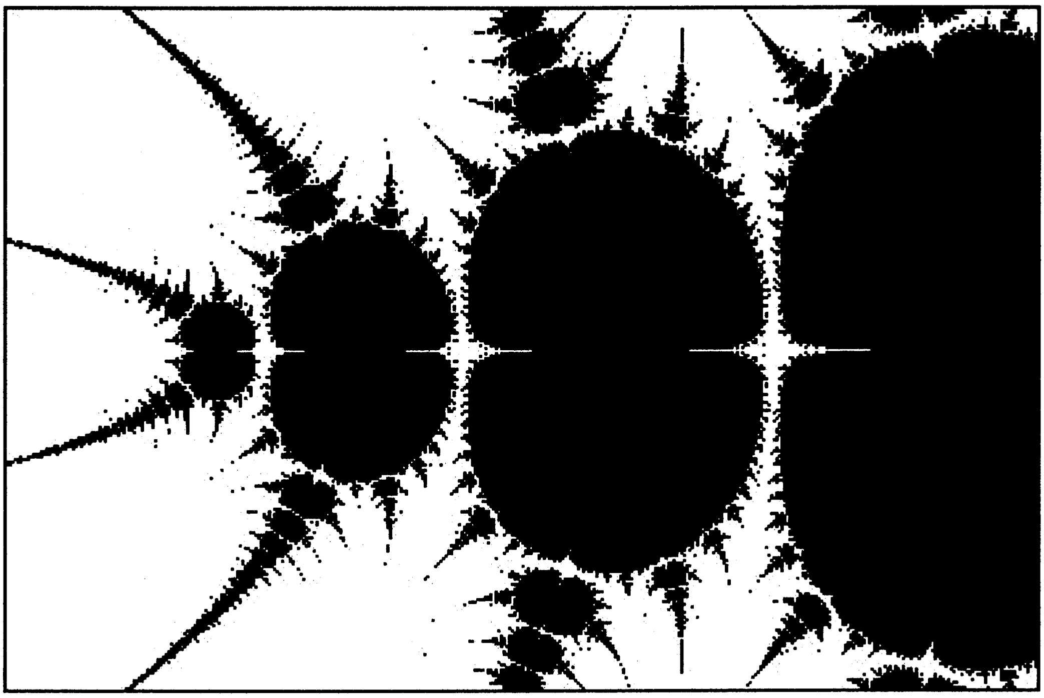

図 5: 例 6 のファトウ集合。範囲は $-120 \leq \Re z \leq 600$、$|\Im z| \leq 240$。

[21] R. Nevanlinna, Analytic functions, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1970.

[22] N. Steinmetz, Rational Iteration, Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

[23] Yin Yongcheng, On the Julia set of semi-hyperbolic rational maps, preprint.