

# 極めて緩い斜面を下る流れの安定性

木田重雄

〒509-5292 土岐市下石町 322-6, 核融合科学研究所,  
理論シミュレーション研究センター

## Stability of a Flow Down an Inclined Plane at Very Small Angles

KIDA Shigeo

Theory and Computer Simulation Center,  
National Institute for Fusion Science, Oroshi 322-6, Toki, 509-5292 JAPAN

### 概要

斜面を下る半放物線型の速度分布の線形安定解析は, B. Benjamin (1957) によってなされた。彼は, 長波長攪乱が臨界モードであると仮定し, 臨界レイノルズ数が斜面の傾き角の cotangent に比例するという結果を得た。しかし, この仮定は傾き角が約  $0.16^\circ$  以下では成立せず, 有限波数の攪乱が臨界モードを与えることを示す。

**Keywords:** Stability, inclined plane

**Email Address** kida@toki.theory.nifs.ac.jp

## 1 はじめに

平らな斜面を下る流れの線形安定性は, 流体力学の基本問題として古くから研究されてきた。いま, 図 1 のように, 水平からの傾きが  $\theta$  の平板を下る定常流を考える。斜面に平行下向きに  $x$  軸, 面に垂直上向きに  $y$  軸をとる。重力加速度を鉛直下向きに  $g$  とすると, 斜面に沿う平均流速と圧力の分布はそれぞれ,

$$U = U_m (d^2 - y^2), \quad (1)$$

$$P = -\rho y g \cos \theta \quad (2)$$

で与えられる。ここに,

$$U_m = \frac{g \sin \theta}{2\nu} \quad (3)$$

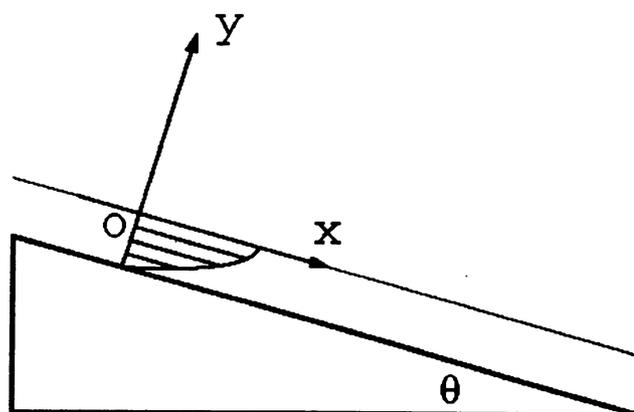


図 1: 斜面を下る流れ。

は最大流速である。

水深  $d$  と水面での最大流速  $U_m$  で、長さ、速さ、圧力を、 $x \rightarrow xd$ ,  $y \rightarrow yd$ ,  $U \rightarrow U_m U$ ,  $P \rightarrow \rho U_m^2 P$  のように無次元化すると、平均流は

$$U(y) = 1 - y^2, \quad (4)$$

圧力は

$$P = -\frac{2}{R} \cos \theta y \quad (5)$$

と書ける。ここに、

$$R = \frac{U_m d}{\nu} \quad (6)$$

はレイノルズ数である。

## 2 線形安定性

Navier-Stokes 方程式に速度  $(U + u, v, 0)$ , 圧力  $P + p$  を代入して、攪乱について線形化する。2次元攪乱が臨界レイノルズ数を与える (Squire の定理) ので、攪乱は  $(x, y)$  面に垂直な方向には一様であるとし、流体表面の変位を

$$y = \eta(x, t) \quad (7)$$

とおく。境界条件は、斜面上で速度ゼロ、流体表面で剪断応力ゼロとする。攪乱の形を  $\text{Real}\{F(y) \exp[i\alpha(x - ct)]\}$  と仮定すると、実数  $\alpha$  は波数、 $c$  は攪乱の複素速度で、その虚部  $\alpha c_i$  が攪乱の増幅率の意味をもつ。

攪乱の時間発展を記述する方程式は、Orr-Sommerfeld 方程式、

$$\alpha(c - U)u + iU'v = \alpha p + \frac{i}{R} \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) u, \quad (8)$$

$$\alpha(c - U)v = -i \frac{dp}{dy} + \frac{i}{R} \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) v, \quad (9)$$

$$i\alpha u + \frac{dv}{dy} = 0 \quad (10)$$

で与えられる。ここに、プライム ' は  $y$  についての微分を表す。

斜面 ( $y = -1$ ) および水面 ( $y = 0$ ) での境界条件は

$$u(-1) = v(-1) = 0, \quad (11)$$

$$-i\alpha(c - 1)\eta(0) = v(0), \quad (12)$$

$$-p(0) + R^{-1}v'(0) = 0, \quad (13)$$

$$-2\eta(0) + u'(0) + i\alpha v(0) = 0 \quad (14)$$

である。これらは、上から順に、斜面での粘着条件、水面の運動条件、水面での垂直応力と平行応力のつりあいから導かれたものである。

斜面に垂直な速度を

$$v(x, t) = \text{Real}\{\phi(y) \exp[i\alpha(x - ct)]\} \quad (15)$$

と表すと、Orr-Sommerfeld 方程式は

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right)^2 \phi = i\alpha R \left[ (U - c) \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi - U''\phi \right], \quad (16)$$

そして、境界条件は

$$\phi(-1) = \phi'(-1) = 0, \quad (17)$$

$$\phi''(0) + \left[ \alpha^2 - \frac{2}{c-1} \right] \phi(0) = 0, \quad (18)$$

$$-\frac{2\alpha \cot \theta}{c-1} \phi(0) + \alpha[R(c-1) + 3i\alpha]\phi'(0) - i\phi'''(0) = 0 \quad (19)$$

と書き換えられる。この方程式と境界条件は、レイノルズ数  $R$ 、斜面の傾き  $\theta$ 、攪乱の波数  $\alpha$  を与えて、複素位相速度  $c$  と関数  $\phi(y)$  を求める固有値問題を構成する。

### 3 長波長極限

B. Benjamin (1957) は、自由表面のある流れでは、長波長攪乱が最も不安定であると考え、位相速度  $c$  と関数  $\phi(y)$  を  $\alpha$  のべきに展開し、

$$c = c_0 + \alpha c_1 + \alpha c_2 + \alpha c_3 + \dots, \quad (20)$$

$$\phi = \phi_0 + \alpha \phi_1 + \alpha \phi_2 + \alpha \phi_3 + \dots \quad (21)$$

を Orr-Sommerfeld 方程式 (16) と境界条件 (17)–(19) に代入し、展開係数  $c_0, c_1, \dots, \phi_0, \phi_1, \dots$  を逐次に求め、

$$c_0 = 2, \quad (22)$$

$$c_1 = \frac{8}{15}i \left( R - \frac{5}{4} \cot\theta \right) \quad (23)$$

を得た。 $c_0$  は実数、 $c_1$  は純虚数で、微小攪乱の安定性は  $c_1$  の虚部の符号で決定される。式 (23) より、臨界レイノルズ数は

$$R_c = \frac{5}{4} \cot\theta \quad (24)$$

で与えられる。レイノルズ数が  $R < R_c$  のとき流れは安定、 $R > R_c$  のとき流れは不安定である。この結果は、Liu, Paul & Gollub (1993) によって実験的に確かめられた。ただし、技術的な限界から、誤差は 10% 程度よりは小さくならず、また検証された斜面の傾き角は  $0.8^\circ < \theta < 10^\circ$  の範囲のみであった。

### 4 臨界モードは長波長攪乱か

長波長攪乱が臨界モードを与えると仮定して臨界レイノルズ数 (24) を求め、実験的な支持も得られたことを前節で述べた。もしこれが正しいとすれば、複素速度  $c$  の虚部は、 $R = R_c$  のとき、 $\alpha$  の関数として  $\alpha = 0$  で最大値をとらなければならない。このことは、複素速度  $c$  の  $\alpha$  について高次の展開係数のふるまいから判断される。

実際、C-S. Yih (1988) の流体力学の教科書によれば、複素速度の高次の係数  $c_2$  と  $c_3$  の値は、 $R = R_c$  に対し、

$$c_2 = -2, \quad (25)$$

$$c_3 = \frac{6743}{4200}i \left( -1 + \frac{615167}{26034723}R^2 \right) R \quad (\text{この式は正しくない!}) \quad (26)$$

である (同著の訳本「流体力学 — 理論への入門」525 頁参照; ただし、この本では主流の平均流速を速さの無次元化の単位に用いているので、そこでの  $c$  の値を 2/3 倍、 $R$  を 3/2 倍してある)。これらの値は C. Yuan (1966) の未発表論文によるものであると述べられている。この結果より、 $c_2$  は実数、 $c_3$  は純虚数であるので、 $c$  の虚部が  $\alpha = 0$  で最大値をとるためには、 $c_3$  の虚部が負でなければならない。

そこで、式 (26) の括弧の中の符号を調べてみる。第 1 項は負、第 2 項が正であり、両者の絶対値は、

$$R = 4.34, \quad \theta = 10.9^\circ \quad (27)$$

のとき等しいことがわかる。すなわち、 $c_3$  の虚部は  $\theta > 10.9^\circ$  のとき負、 $\theta < 10.9^\circ$  のとき正である。この結果は、斜面の傾きが  $10.9^\circ$  より緩いときは、無限大波長の攪乱ではなく、有限波長の攪乱が臨界モードになることを意味する。

この臨界モードとそれに対する臨界レイノルズ数を求めることが本研究の動機であった。

## 5 安定曲線

Orr-Sommerfeld 方程式 (16) の固有値問題を、斜面の傾きが  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  の場合に、数値的に解いた結果を図 2 に示す。臨界レイノルズ数は確かに  $\alpha = 0$  のモードで与えられ、理論値 (24) に等しい。そして、斜面の傾きが小さくなるとともに、中立安定曲線は右傾斜から左傾斜に変形していくように見える。

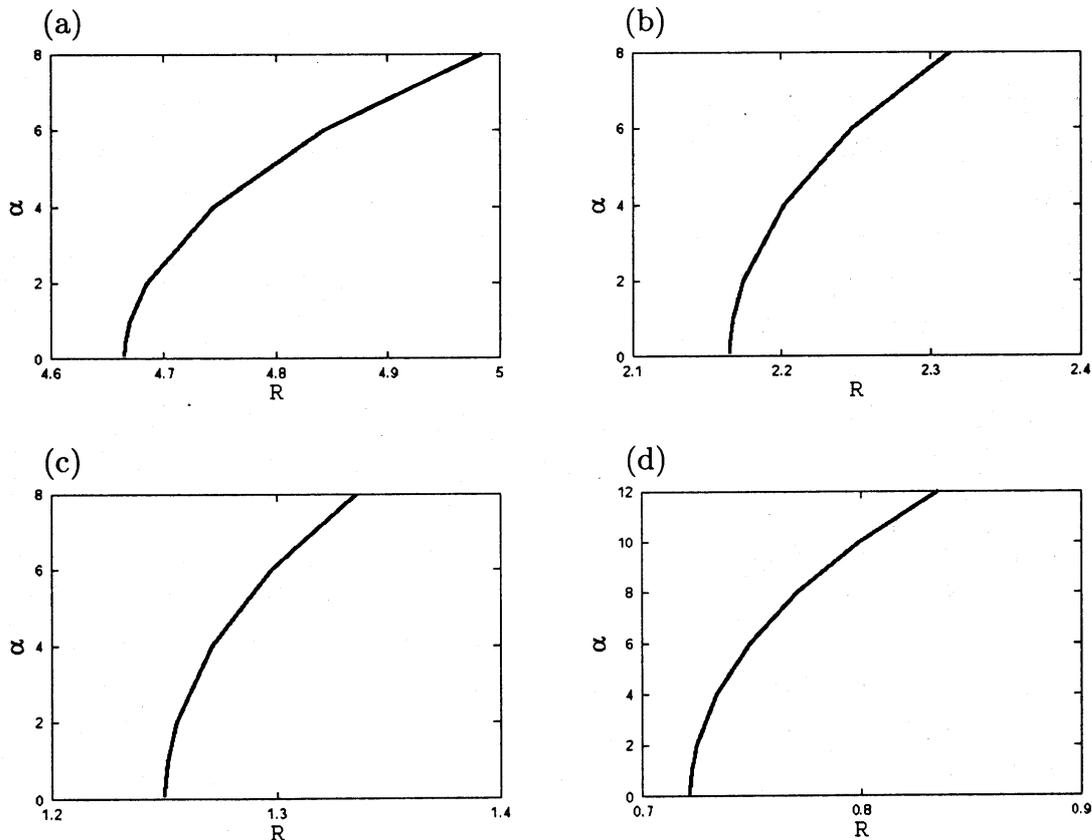


図 2: 斜面流の中立安定曲線.  $\alpha = 0$  で  $R = \frac{5}{4} \cot \theta$  が臨界モードを与える。  
(a)  $\theta = 15^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $45^\circ$ , (d)  $60^\circ$ .

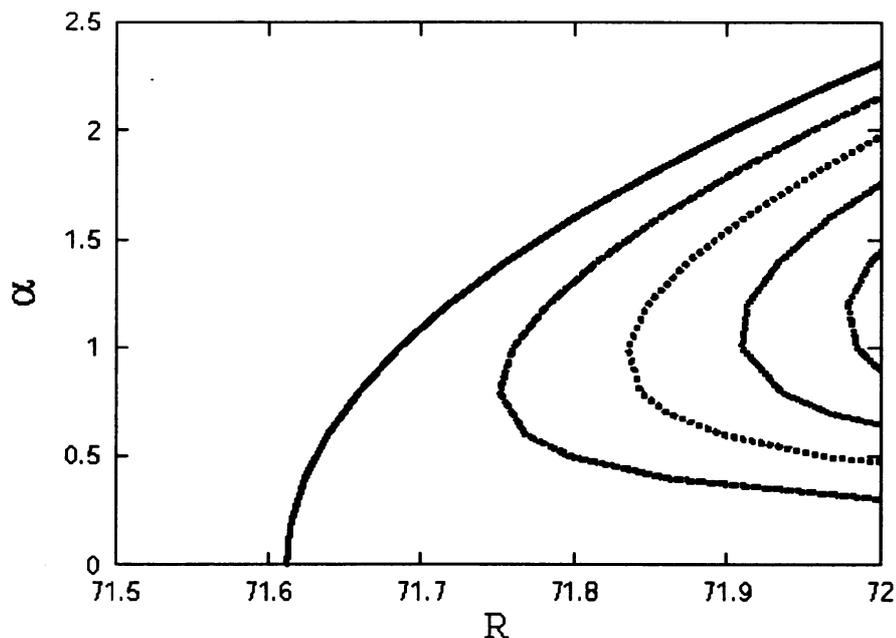


図 3: 傾斜角が  $1^\circ$  の斜面流の中立安定曲線と等増幅率曲線. 増幅率は左から順に,  $\alpha_i = 0, 0.5, 1, 1.5, 2 (\times 10^{-5})$  である.

この結果に気をよくし、著者は、傾きをさらに小さくし、前節で述べた角度  $10.9^\circ$  で、臨界モードが無限波長から有限波長へ交代するかを調べた。ところが、傾きをずいぶん小さく、わずか  $1^\circ$  にしても臨界モードの波数の跳びは起こらなかった。図 3 は、 $\theta = 1^\circ$  の場合の中立安定曲線と等増幅率曲線である。

傾き角を小さくすると臨界レイノルズ数が増大し、数値計算における桁落ちの問題もより深刻になり、中立安定曲線を求めるのがますます難しくなっていく。この段階で、計算コードにタイプミスがなかったかとか、そもそも考え方が間違っているのではないかと、等々の不安に苛まれるようになってきたが、乗りかかった船だと腹を括って、傾斜角をどんどん小さくしていった。するとやがて、傾斜角が  $0.15^\circ$  付近で、中立安定曲線の曲がり具合がそれまでとは逆になり、臨界波数がゼロではなく有限の値になるのが観察された。その様子を図 4 に示す。ここでは、 $\theta = 1^\circ, 0.2^\circ, 0.1^\circ, 0.05^\circ, 0.01^\circ$  のように、傾斜角の小さな値に対する中立安定曲線が描いてある。ただし、異なる曲線の形の比較を容易にするためと、中立安定曲線の小さな傾斜角における極限形（第 7 節参照）を見やすくするために、横軸を  $R \tan \theta$  で、縦軸を  $\alpha/\theta$  で目盛っている。この目盛りでは、波数ゼロにおける臨界レイノルズ数は、傾斜角によらず常に  $5/4$  となる。

このような中立安定曲線の曲率の反転はまさに期待していたものであり、一瞬喜んだが、臨界角  $0.15^\circ$  というのは予想していたよりはるかに小さく、またこのような小さな角度に対しては固有値問題の計算に相当な桁落ちが出ることを実感しているので、数値結果の検算のためにも、理論解析（小さな傾斜角についての漸近解析）を行う決心をした。

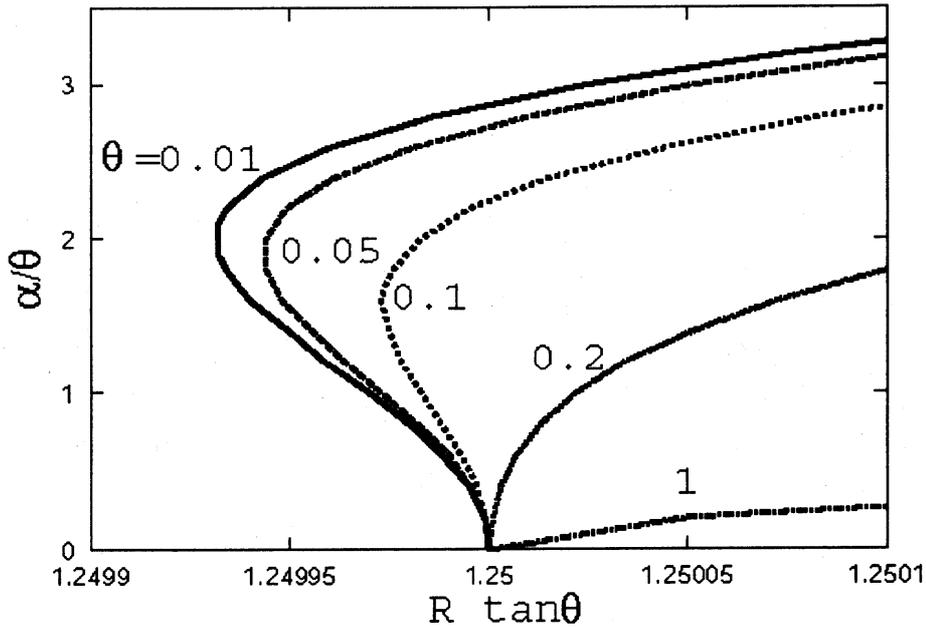


図 4: 傾斜角が小さな斜面流の中立安定曲線. 横軸と縦軸が傾斜角  $\theta$  を用いて, それぞれ  $R \tan \theta$  と  $\alpha/\theta$  で目盛っているのは, 傾斜角ゼロの極限における中立安定曲線の漸近形を見やすくするためである.

## 6 長波長極限 — チェック

前節で C-S Yih (1988) の教科書にある結果 (30) と極端に異なる結果を得たので, その原因を探るため, 長波長極限の漸近解析を再検討することにした.

位相速度  $c$  と関数  $\phi(y)$  の  $\alpha$  についてのベキ展開 (20) と (21) を Orr-Sommerfeld 方程式 (16) と境界条件 (17)–(19) に代入し, 前節と同様の手続きを進めると, 位相速度の  $\alpha$  展開のゼロ次, 1次, および2次の項については, C-S Yih (1988) の教科書と同じ結果, すなわち, 式 (22), (23), および (25) を得た. しかし, 3次の項は式 (26) とは異なり,

$$c_3 = \frac{4881}{2520} i \left( -1 + \frac{256}{52348725} R^2 \right) R \quad (28)$$

となった.

臨界レイノルズ数 (24) を式 (28) に代入して,  $c_3 = 0$  とおくと, 臨界波数がゼロから有限の値に移る臨界角  $\beta$  が

$$\cot \beta = \frac{3}{4} \sqrt{232661} \quad (29)$$

の解として得られて,

$$\beta = 0.158379^\circ \quad (30)$$

となる. この値は, 前節で数値的に発見した傾斜角  $0.15^\circ$  付近で臨界波数がゼロから有限の値に跳ぶという事実とよく符合している.

## 7 緩い傾きの極限

第5節では数値計算により、斜面の傾きが極めて緩いとき、図4で採用した縦横軸の目盛りのグラフ上で中立安定曲線がある極限の曲線に収束しそうであることを発見した。このことを踏まえて、

$$R = \frac{R^\#}{\theta}, \quad \alpha = \alpha^\# \theta \quad (31)$$

なる変換により、変数  $R$  と  $\alpha$  を  $R^\#$  と  $\alpha^\#$  で表し、Orr-Sommerfeld 方程式 (16) と境界条件 (17) - (19) に代入し、 $\theta \rightarrow 0$  の極限をとることを試みる。このとき、それぞれの方程式の卓越項のみを残すことによって、Orr-Sommerfeld 方程式は

$$\frac{d^4 \phi}{dy^4} = i \alpha^\# R^\# \left[ (U - c) \frac{d^2 \phi}{dy^2} - U'' \phi \right], \quad (32)$$

また、境界条件は

$$\phi(-1) = \phi'(-1) = 0, \quad (33)$$

$$\phi''(0) - \frac{2}{c-1} \phi(0) = 0, \quad (34)$$

$$-\frac{2\alpha^\#}{c-1} \phi(0) + \alpha^\# R^\# (c-1) \phi'(0) - i \phi'''(0) = 0 \quad (35)$$

と近似できる。

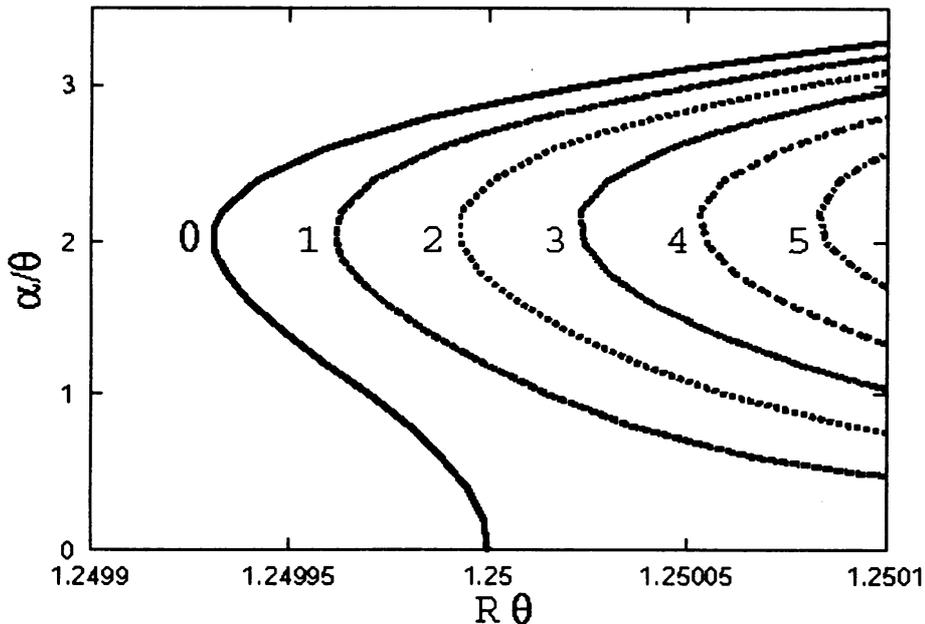


図5: 傾斜角ゼロの極限における斜面流の中立安定曲線と等増幅率曲線。数字は増幅率と傾斜角の比  $\alpha c_i / \theta$  ( $\times 10^{-4}$ ) を表す。

図5は、この固有値問題を解いて得られた斜面流の安定特性である。数字は増幅率と傾斜角の比  $\alpha c_i/\theta$  ( $\times 10^{-4}$ ) を表す。一番左の中立安定曲線の形が、図4に示す  $\theta = 0.01^\circ$  の場合の曲線とよく一致していることが確かめられる。

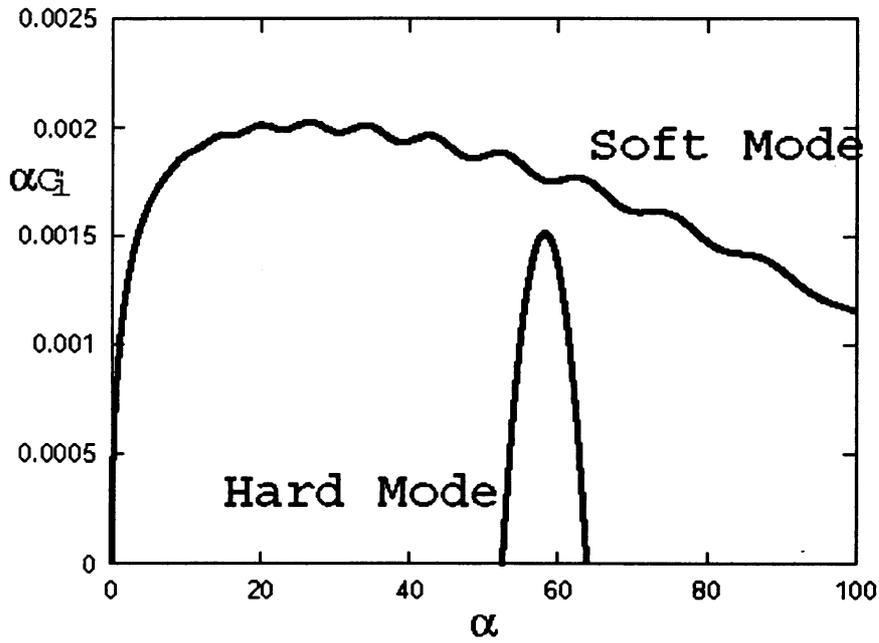
## 8 実験的検証は可能か

前節で計算した有限波数の臨界モードの実験的検証について考える。たとえば、式(30)で与えられる臨界角  $\beta$  より少し緩やかな傾斜角  $\theta = 0.1^\circ$  の斜面に水深  $d = 0.44\text{cm}$  の水が定常的に流れているとする。水の動粘性係数は  $\nu = 0.01\text{cm}^2/\text{sec}$ 、重力加速度は  $g = 980\text{cm}/\text{sec}^2$  であるから、定常流の最大流速は式(3)より  $U_m = 16.3\text{cm}/\text{sec}$  で、レイノルズ数は  $R = 716.2$  となる。このとき、臨界モードの波数は  $\alpha = 0.16^\circ = 0.00279$  (rad) に近く、波長約10メートル ( $\lambda = 985\text{cm}$ ) の波になる。このような巨大な波であるのに加えて、1波長あたりの増幅率が  $2\pi c_i/c_r = O(10^{-4})$  と極めて小さく、実験室での検証は水を使う限り無理であると結論される。粘性率のごく小さな超流動体を使用すれば実験室規模での検証は可能かもしれないが、それまでして検証する意義があるかどうかは不明である。

本研究で解析した不安定モードは水面近傍で大きな振幅をもつ攪乱であるが、もうひとつ別の不安定モードも存在する。それは、水底近くで大きな振幅をもつ攪乱である。S.P Lin (1967) は、これらの攪乱をそれぞれ、ソフトおよびハード・モードと呼んでいる。ハード・モードの臨界レイノルズ数は6,000程度で、一般に、ソフト・モードの臨界レイノルズ数に比べてずいぶん大きい。この観点からは、ソフト・モードが斜面流の安定性にとって重要であるように思われる。しかし、攪乱の増幅率のレイノルズ数依存性は、ハード・モードの方がソフト・モードに比べて極めて強い。したがって、レイノルズ数がハード・モードの臨界レイノルズ数より大きくなると、ハード・モードの増幅率がソフト・モードの増幅率より上回るというようなことが起こる。

図6に、 $R = 7,000$  と  $10,000$  における斜面流の安定特性を示す。増幅率は、 $R = 7,000$  ではソフト・モードの方が大きいですが、 $R = 10,000$  ではハード・モードの方が大きくなっている。ついでながら、この2種類のモードの安定特性の  $(\alpha, R)$  空間における大域的ふるまいは、S.P Lin (1967) が彼の Fig. 5 で予測したものと随分異なっていることがわかった。

つぎに、 $R = 10,000$  でのハード・モードは実験的に観測可能か調べてみる。たとえば、傾斜角  $\theta = 1^\circ$  の斜面に深さ  $d = 0.49\text{cm}$  の水を定常的に流すと最大速度は  $U_m = 204\text{cm}/\text{sec}$  で、 $R = 10,000$  となる。このとき成長する攪乱モードの波数は約  $\alpha = 55^\circ = 0.96$  (rad)、波長は  $\lambda = 6.5\text{cm}$ 、位相速度は  $c_r = 0.23\text{cm}/\text{sec}$  であるので、実験室で十分検証可能である。



(b)

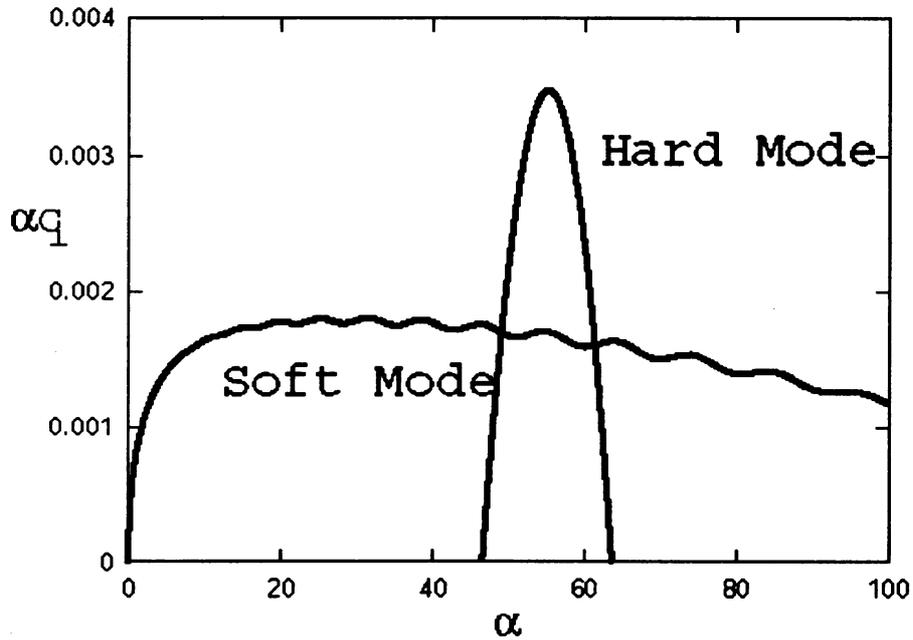


図 6: 斜面流におけるハード・モードとソフト・モードの安定特性. 増幅率  $\alpha c_i$  を波数  $\alpha$  の関数として示す。(a)  $R = 7,000$ , (b)  $R = 10,000$ .

## 9 まとめ

斜面流の線形安定性理論という流体力学における基本問題を調べるきっかけとなったのは、C-S. Yih (1988) の流体力学の教科書における式 (26) であった。もしこれが正しければ、斜面流の安定性の臨界モードは、長波長の波によってもたらされるとする B. Benjamin (1957) の仮定は、斜面の傾斜角がある有限の値 ( $10.9^\circ$ ) より小さいときは適用できないことになる。これはおもしろそうだと思って始めたのが、本論文で述べた斜面流の線形安定性の解析であった。ところが、結果として分かったことは、C-S. Yih (1988) の教科書の該当部分が正しくないこと（しかし、その原因は不明）、および B. Benjamin (1957) の仮定が成立しなくなる斜面の傾斜角は約  $0.16^\circ$  と極めて小さく、実際上、問題にはならないこと、である。このように、実害のない結果となったが、B. Benjamin の臨界モードの波数ゼロの仮定に対する私の当初の疑問は解決し、気持ちのうやむやを晴らすことができた。

重箱の中のごちそうを食べようとしたら、ごちそうは見あたらず、重箱の隅をつつくことになってしまった。幸いにも、隅にこびりついたものが少しあったので、それをきれいにしたことで今回は満足したい。

## 謝辞

斜面流の安定性の初期の研究に関して、蔦原道久教授から詳しい情報をいただきました。それが、本研究の動機となり、また研究を正しく進める上での指針となりましたことを記して謝意を表します。

## 参考文献

- [1] B. Benjamin: Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluid Mech.* **2** (1957) 554-574.
- [2] S.P. Lin: Instability of a Liquid Film Flowing down an Inclined Plane. *Phys. Fluids* **10** (1967) 308-313.
- [3] J. Liu, J.G. Paul & J.P. Gollub: Measurements of the primary instabilities of film flows. *J. Fluid Mech.* **250** (1993) 69-101.
- [4] C-S Yih: *Fluid Mechanics, A Concise Introduction to the Theory.* (McGraw-Hill, 1988) [流体力学 — 理論への入門, 蔦原道久, 橋本潔, 小川和彦, 井藤創 訳, アイ・ピー・シー 1995].