

## 火山現象の数理解モデル

東京大学・新領域 小屋口剛博 (Takehiro Koyaguchi)  
Graduate School of Frontier Sciences  
Univ. of Tokyo

### 1 はじめに

火山噴火現象とは、地下深所で溶融した岩石（マグマ）が地表に噴出する現象である。我々は野外観測事実から、噴火現象には多様なタイプがあることを知っている。噴火タイプを決定する要因の一つは、マグマの物性、特に粘性である。粘性が低いマグマでは、ハワイ島キラウエア火山の噴火のようにドロドロした溶岩を流しつづける噴火タイプになるのに対して、粘性が高いマグマでは、雲仙 1991-1995 年の噴火のようにゆっくりと溶岩ドームを形成する噴火タイプになったり、あるいはピナツボ 1991 年の噴火のように爆発を伴い大規模な噴煙や火砕流を形成する噴火タイプになったりする。マグマの粘性は化学組成によって著しく変化するので、マグマの化学的性質から、噴火タイプをある程度予測することができる。

問題となるのは、マグマの化学的性質が殆ど同一であっても、噴火タイプに大きなバリエーションを生じることがあるということである。特に、粘性の高いマグマの場合、マグマの性質が全く同じでも、溶岩ドームを形成するような噴火になる場合と爆発を伴い大規模な噴煙や火砕流を形成する噴火になる場合の両極端になる可能性がある。しかも、両極端の噴火タイプのうち、どちらのタイプに推移するのかを予知するのが非常に難しい。以下では、粘性が高いマグマの噴火現象に焦点を絞って、多様な噴火タイプをもたらす原因を探る数理解モデルについて解説する。

粘性が高いマグマの噴火現象の多様性を理解する鍵は、大きくみて二つある。第一の鍵は、上昇途中にマグマ中に溶け込んでいる揮発成分が発泡し膨張する過程である。深さ数 km の地下では、岩石の荷重によってマグマには数千気圧（数百 MPa）の高圧がかかっている。このような高圧下では、揮発成分はマグマ中に溶け込んでいる。ところが、噴火によってマグマが上昇すると、マグマは減圧され、発泡し膨張する。それが噴火の運動様式に大きな影響を与える。もう一つの鍵は、地表にマグマが噴出した後、高温のマグマの破片や火山ガスが乱流状態で大気と混合する過程である。マグマは 800 から 1000 °C 程度の高温であるため、混合した大気は急速に膨張し、それが爆発的な現象や巨大な噴煙を生み出す原動力となる。これらの鍵となる現象が、どのような形で噴火タイプに影響をもたらすのかという問題を軸にして議論を進めて行く。

## 2 マグマ上昇のダイナミックスの概要

本題に入る前に、マグマ上昇のダイナミックスの概要について簡単に復習する。マグマ上昇のダイナミックスは、管状または板状の通路（「火道」とよぶ）を通して上昇する高温液体（マグマ）と気体（火山ガス）の混相流体の力学という枠組みで理解される（図1）。マグマが上昇し減圧すると気相（火山ガス）を析出する。発泡する深さや気相の量は、揮発成分の溶解度によって決まる。化学分析や室内実験の結果によると、平均的なマグマは、揮発成分として数 wt.%の  $\text{H}_2\text{O}$  を含んでおり、地下数 km、圧力数十から百 MPa のところで発泡が始まる。析出した気相の量は上昇とともに増加し、同時に、気相は減圧によって膨張するため、気相と液相の体積比率が刻々と変化する。今、簡単のため気相-液相が相対的な運動をしない場合について考える。この場合、気相-液相混合物の単位質量あたりの体積（密度の逆数）は、気相を理想気体に近似すると、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1-n}{\rho_l} + \frac{nRT}{P} \quad (1)$$

のように表すことができる。  $n$  は気相の重量分率、  $R$  は気体定数 ( $5 \times 10^2 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )、  $T$  は絶対温度、  $P$  は圧力、  $\rho_l$  は液体マグマの密度である。この関係に、典型的なマグマの温度 ( $1 \times 10^3 \text{ K}$ )、液体部分の密度 ( $3 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$ )、揮発成分の重量分率 ( $5 \times 10^2 \text{ K}$ ) の値を代入して概算すると、マグマは地表に噴出し大気圧 ( $1 \times 10^5 \text{ Pa}$ ) まで減圧されることによって体積が  $10^2$  倍以上に膨張し、また、気相の体積分率が 99% 以上に達することがわかる。

上昇途中に気相の体積分率が增加することによって、気液二相流体の構造や流動様式は定性的に変化する。つまり、気相の体積分率が小さいときには、連続した液体の中に気泡が分散した流れ（気泡流）として流れるのに対して、気相の体積分率が大きい時には、逆に連続した気体の中に液滴が分散した流れ（噴霧流）として流れる。その中間的な体積分率では気泡の集団や大きな気泡を含む流れ、壁面に液相、中心部で気相が濃集する流れなどの様々な構造の流れを形成する。実験的に、およそ気相の体積分率が 70 ~ 80% を越えると気泡流から噴霧流への遷移が起こることが知られている。従って、典型的な揮発分量をもつマグマは、あるレベルより深い領域では、気泡流として流れ、浅い領域では噴霧流として上昇する（図1）。具体的には、液体マグマが破碎して液滴（軽石や火山灰の元となるもの）になることによって気泡流から噴霧流へ進行する。気泡流では液体の粘性が気液二相流体全体としての実効的粘性を支配するのに対して、噴霧流では気体の粘性が実効的な粘性を支配する。従って、気泡流から噴霧流に変化することによって、気液二相流体全体としての実効的な粘性が著しく減少し、高速な流動が可能となる。このようにして、マグマの破片（火砕物）と火山ガスが噴霧流として勢いよく噴出する現象が、爆発的噴火の実体である。

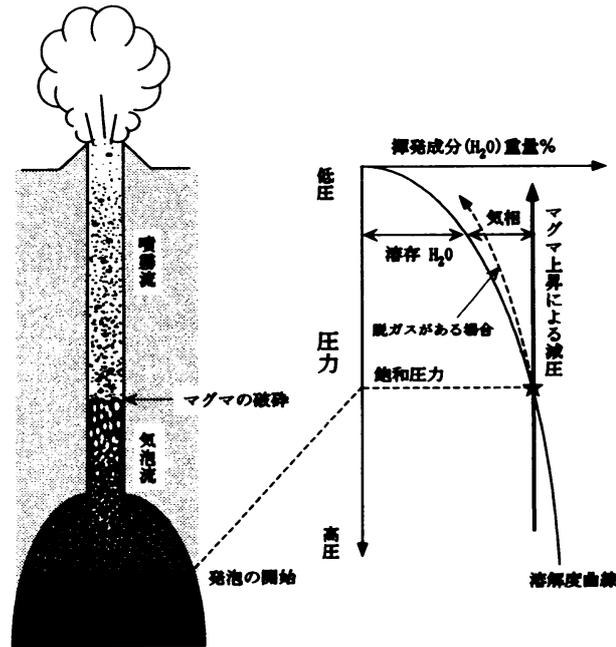


図 1: マグマの上昇ダイナミクスの概要と溶解度曲線の関係

### 3 火道中のマグマの定常流モデルと噴火タイプ

マグマ上昇のダイナミクスの概要を理解したところで、本題である「マグマの性質が同じであるにもかかわらず違う噴火タイプが生じる原因」について考察する。

いま問題としたい観測事実は、揮発成分の多い高粘性マグマの噴火には、成層圏まで達する噴煙柱を作る「プリニー式噴火」と呼ばれる爆発的な噴火（噴出率  $10^6 \sim 10^9$  kg/s）になる場合と溶岩ドームを形成するような非爆発的噴火（噴出率  $10^{-1} \sim 10^3$  kg/s）になる場合の両極端のタイプに分かれることである。同じ化学組成で何故このように噴出率が何桁にもわたって異なるような噴火タイプが生じ得るのか、というのが解くべき問題である。ある程度持続する噴火では、マグマの上昇運動は、断面積がほぼ一定な剛体的な火道中の定常的な流れに近似することができる。つまり、この問題は、「同様な地質環境による境界条件のもとで何故噴出率が数桁も異なる流れが生じるのか」という流体力学の問題を理解することによって解決されることが期待される。

溶岩ドームの噴火とプリニー式噴火の最も大きな違いは、溶岩ドームを形成する噴火ではマグマが気泡流の状態で噴出するのに対して、プリニー式噴火では噴霧流として噴出していることである。先にも述べたように、一般に数 wt.%以上の揮発成分を含有するマグマは、地表付近に達すると 90 vol.% 以上の気相をもつことになるので、流動様式は必然的に噴霧流になり、爆発的なプリニー式噴火になるはずである。従って、溶岩ドームを形成するような噴火タイプを説明するためには、何らかの付加的なメカニズムによって、火道中からマグマ中のガスが漏れるような過程を

考えなければならない (図1の点線矢印). 一つの可能な状況としては, マグマが多孔質の岩石中を上昇する場合が考えられる. そこで単純な定常的な1次元流れのモデルにマグマから発生した気相が多孔質の火道壁から外部に漏れる効果を取り入れた方程式系を考える<sup>[1,2]</sup>. 一般に, 流体の運動については, 質量の保存則, 運動量の保存則に加えて, 圧力と密度を関係づける式を与えることによって方程式系が閉じる. ここでは質量保存の式について

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} [\rho u(1-n)] = 0 & \text{:液相の質量保存} \\ \frac{d}{dz} [\rho u \{n + sp^m(1-n)\}] = -Q_w & \text{:気相の質量保存} \end{cases} \quad (2)$$

$$Q_w = \frac{L_1 n \rho K \Delta p}{\mu_w L_2} \quad (3)$$

のように, 火道内の圧力と地下水圧の差  $\Delta p$  に比例して気相が抜ける効果を加える.  $K$  と  $\mu_w$  は, それぞれ浸透率と漏れる気相の粘性である. また,  $L_1$  は火道の周りの長さ,  $L_2$  は火道周辺の多孔質媒体中で気相の圧力勾配が形成されている領域の長さである. いずれも火道の径によって特徴づけられる長さスケールであるから,  $L_1/L_2$  はオーダーが1程度の定数となる. 一方, 運動量保存については,

$$u \frac{du}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g - F_{fric} \quad (4)$$

のように得られる.  $z, r, g$  は, それぞれ鉛直方向の座標軸, 火道の半径, 重力加速度である. 気液混合相の状態方程式として式(1)を用いれば閉じた方程式系が得られる. なお, マグマの場合圧倒的な熱容量が液体マグマに集中しており, 断熱膨張による温度変化が無視できるので, 等温条件で計算してもよい.  $F_{fric}$  は単位質量あたりに働く抵抗力で, 例えば, 気泡流ではポワズイユ流と同様な粘性抵抗を受け, 噴霧流では乱流状態のガスと同様な粘性を受けると考えると,  $\mu$  をマグマの粘性として

$$F_{fric} = \begin{cases} \frac{8\mu u}{\rho r^2} & \text{:気泡流} \\ 0.0025 \frac{u^2}{r} & \text{:噴霧流} \end{cases} \quad (5)$$

のように近似される. また, 気相の析出については

$$n = \begin{cases} n_0 - sp^m & (n_0 > sp^m) \\ 0 & (n_0 \leq sp^m) \end{cases} \quad (6)$$

のような形で溶解度を圧力の関数として与えればよい. ここで  $sp^m$  は溶解度で典型的なマグマに対しては  $s \sim 4 \times 10^{-6} \text{Pa}^{1/2}$ ,  $m \sim 0.5$  の値をもつ.

この基礎方程式は,  $z$  のみを独立変数とする常微分方程式なので, 数値的に解くことができる<sup>[1,2]</sup>. 例えば, ある一定の圧力をもつマグマ溜まりから一定の径の火道を通してマグマが噴出したときのマグマの流量 (噴出率) と出口での流体の圧力の関

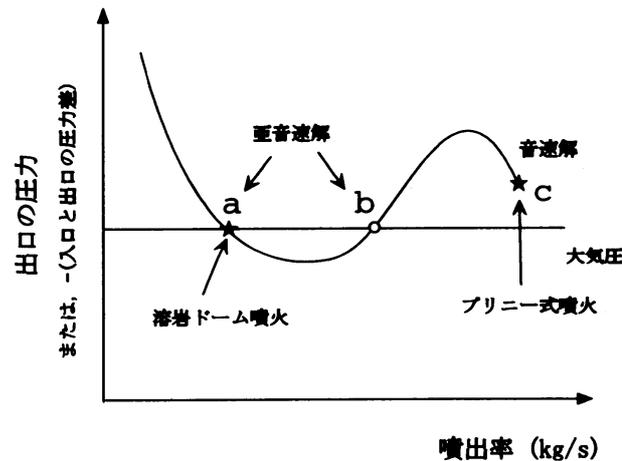


図 2: 多孔質媒体の火道中を上昇するマグマの定常流に関する噴出率と出口の圧力の関係の概念図

係を求めると、図2のような結果を得ることができる。このような関係を示すカーブは、マグマ溜まりの圧力を決めることによって一本ひける。従って、このカーブ上の点の中から定常的な火道中の流れの解として許されるものを探せばよい。実際の火山において定常的な火道中の流れの解として許されるのは、カーブ上の点の中で、出口の圧力が大気圧（または大気圧+溶岩ドームの荷重圧）であるか、または出口の流速が音速に達している点のみである。たとえば、図2に示したような条件では3つの可能な定常流の解が同時に存在する（図2中a, b, c）。解a, bは、地表の圧力が大気圧となる亜音速流であり、 $10^3$  kg/s 程度以下の低い噴出率をもつ。解aは、気相の比率がマグマが破碎する条件以下の気泡流であり、ドームを形成するような噴出率の小さい噴火に対応する。一方、解cは噴霧流であり、火口における流速は気液二相マグマ中の音速に達している。この解の噴出率は $10^6$  kg/s を越え、爆発的なプリニー式噴火に対応する。中間流量の解である解bでは、たとえわずかでも流量が減少（または増加）すると抜け出るガスの量は増加（または減少）するため、出口とマグマ溜まりの圧力差が減少し、流量は解a（または解c）に移行するまで減少（または増加）しつづけることになる。このため解bは実現しないか、実現したとしても一時的なものである可能性がある。以上のことから、我々が野外で観測するような、爆発的および非爆発的噴火タイプが存在することは、数理的には、図2中で噴出率が大きく異なる解aと解cが存在することに対応するものであると理解することができる。

流れの解が多価性をもったり安定な解の数がパラメータによって変化するという事実は、図2において流量が上昇するにつれて出口の圧力が一度減少しそのあと上昇するという傾向をもつことと密接に関連している。この傾向の意味について、「出口の圧力」を「管の入口と出口の圧力差」に言い換えて考えてみよう。一般に管の流れの流量は、入口と出口の圧力差を付けることによって増加する。つまり、入口

と出口の圧力差という駆動力と摩擦抵抗がバランスして流量が決まっている。この関係は、電気回路において、抵抗に高い電圧をかけるほど大きな電流が流れる、という関係があることと定性的に同じことである。図2の傾向で注目すべき点は、入口と出口の圧力差が減少するにつれて流量が増加する区間が存在することである。このことは浸透性をもつ火道の流れが、駆動力をかければかけるほど摩擦抵抗が減る、という「負性抵抗」をもつことを意味している。一般に負性抵抗をもつ系は不安定であり、しばしば振動現象や不連続な状態変化などの特異な挙動を示すことが、電気回路の例などで良く知られている。噴火活動の複雑な側面は、負性抵抗を持つ系の複雑な挙動として捉えることができる。

#### 4 噴煙のダイナミクス

次に、視点を火道内部の流れから、火口から勢いよく噴出した火砕物の運動に移して、爆発的な噴火になった場合、噴煙として成層圏まで上昇しつづける噴火タイプになる場合と火砕流を発生するタイプに分かれる問題について考察する。ここでは、定常的に噴出している噴煙に対するモデルに基づいて、火砕流が発生する条件を再現することを試みる。

定常状態に達している噴煙の運動は、静止流体中を乱流状態で上昇する強制プルームに近似することができる<sup>[3,4]</sup>。乱流状態で上昇する強制プルームの重要な特徴は、乱流の渦によって周囲の大気を取り込み混合することである。爆発的な噴火では、殆どの火砕物が数mm以下の粒径まで破碎されているので、噴煙全体の運動に比べて個々の火砕物粒子と気相の相対速度は無視できるほど小さく、また火砕物粒子と気相は瞬時に熱平衡に達する。この場合、火砕物粒子と気相（火山ガス+空気）の混合物を、1つの相としてモデル化できる。ここでは、Woods (1988) に従って、噴煙の上昇運動を1次元定常モデルとして定式化する。

噴煙のダイナミクスでは、取り込まれた空気が加熱されて膨張することが本質的な役割を果たすので、圧力と混合物の密度の関係を得るために火砕物と空気の混合におけるエネルギーの保存式を立てなければならない。なお、噴煙の運動の場合、噴煙の各高さにおいて大気圧とつりあっているという境界条件をもつ。質量、運動量、エネルギーの保存式はそれぞれ

$$\begin{cases} \frac{d(\rho L^2 u)}{dz} = 2Lu_e \rho_{air} \\ \frac{d(\rho L^2 u^2)}{dz} = L^2(\rho_{air} - \rho)g \\ \frac{d}{dz} \left\{ \rho L^2 u \left( C_p T + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right\} = 2Lu_e \rho_{air} (C_a T_a + gz) \end{cases} \quad (7)$$

のように表すことができる。ここに、 $L$ は半径、 $u$ は噴煙の上昇速度、 $\rho$ 、 $\rho_{air}$ はそれぞれ噴煙と大気の密度、 $C_p$ 、 $C_a$ はそれぞれ噴煙と大気の定圧比熱、 $z$ は高さであ

る。  $u_e$  は渦による取り込まれる空気の数であり、 Woods(1988) は、各高さで乱流による取りこみが平均上昇速度に比例すると考え、

$$u_e = 0.09u \quad (8)$$

という関係を採用した。エネルギー保存の式から、噴煙内部のエンタルピーが決まれば、噴煙の温度がきまり、さらに状態方程式

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(n_0 + n_a)RT}{P} + \frac{1 - n_0 - n_a}{\rho_l} \quad (9)$$

から、火砕物+火山ガス+空気の混合物の密度と圧力の関係を得ることができる。なお、  $n_0$ 、  $n_a$  はそれぞれ火山ガスと空気の重量分率である。

図3には、この1次元定常モデルによる噴煙の上昇速度、密度の鉛直分布の計算結果を示す。火道中で膨張し加速された細粒の火砕物とガスの混合物は、数百 m/s の速度の乱流ジェットとして噴出する。この時点で火砕物+火山ガスの混合物の密度は空気の密度の数倍から十倍程度の値をもつ。したがって、火口から吹き上げられた噴煙は、下向きの浮力を受け急減速する。しかし、この間、噴煙は乱流の渦によって周囲の空気を取り込む。取り込まれた空気は火砕物からの熱によって瞬時に温められ、膨張し、噴煙全体の密度が上昇とともに急速に減少する。もし、十分な空気を取り込み、噴煙が大気密度より小さくなれば、噴煙は浮力によって大気中を上昇することになる。周囲の大気密度は高度とともに減少するので、上昇した噴煙は高層大気で再び周囲の大気と同じ密度となる。ここで噴煙はふたたび上向きの運動量を失い、水平方向に広がる。このように高層大気まで噴煙が成長する状況を示したのが、図3の実線である。一方、火口周辺で十分大気を取りこむことが出来ない場合、浮力を得る前に上向きの運動量を失う(図3の点線)。この場合、噴煙は上昇せず、高温かつ高密度を保ったまま火山の斜面を流れ下り火砕流となる。以上のように、火山噴煙が大気中を上昇するか、崩壊して火砕流となるかは、噴煙の上向きの運動量がなくなる前に、噴煙の密度が大気密度より小さくなるか否かで決定することがわかる。

ここで重要なことは、境界条件となるパラメータが徐々に変化したとしても、現象としては不連続に変化することである。例えば図3を見ると、他の条件を一定にしたまま火口における速度を徐々に減少させると、火口から数 km のところに見られる速度の極小値が減少し、極小値の値が0に達したところで、噴煙の振る舞いが突然変わる。我々が「噴煙の上昇」と「火砕流の発生」を異なる噴火タイプとして認識することができることは、このように解の性質が不連続に変化するという観点から数理的に説明することが可能である。

## 5 まとめ

本論では、噴火現象を1次元の流体力学モデルという観点から概観した。我々は、多様な噴火現象を経験することを通じて、それらを異なる噴火タイプとして認識し、

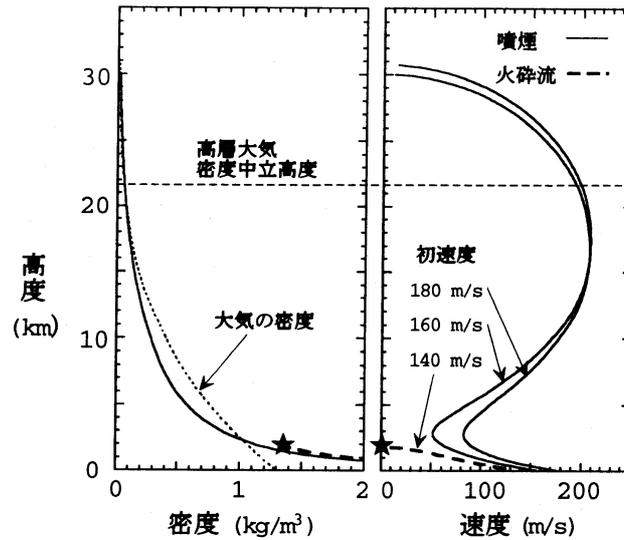


図 3: 火山噴煙の 1 次元定常モデルの数値計算結果. (a) 上昇速度, (b) 噴煙の密度と大気密度. この条件 (噴出率が  $5 \times 10^8 \text{ km/s}$ ) では, 初速度が 140 m/s になると, 噴煙の密度が大気密度よりも小さくなる前に, 上昇速度が 0 になり, 火砕流を発生する.

それを博物学的に分類してきた. ここで述べたことは, これらの火山噴火タイプの博物学的分類は, 必ずしも便宜的なものではなく, その背後にマグマの上昇や噴煙のダイナミックスの物理・数理的性質の裏付けがあることを示している. 勝手気ままな振る舞いをするように見える自然現象が, このような単純な数理モデルによって分類が可能であることは, 極めて興味深いものであり, また同時に驚きでもある. 噴火現象の数理モデル化は, 未だ始まったばかりであり, ここで述べたことは多様な現象のある一側面にすぎない. 膨大な野外観測データを新たな視点から眺め直すことによって, 一見複雑な自然現象の背後にある数理構造を明らかにすることができればと考えている.

#### 参考文献

- [1] Jaupart, C., Allegre, C.: Earth Planet. Sci. Lett., 102, 413-429 (1991).
- [2] Woods, A.W., Koyaguchi, T.: Nature, 370, 641-644 (1994).
- [3] Wilson, L. et al.: J. Geophys. Res., 83, 1829-1836 (1978).
- [4] Woods, A.W.: Bull. Volcanol., 50, 169-193 (1988).