数理解析研究所講究録 1273 巻 2002 年 124-137

不偏推定量の分散に関する Chapman-Robbins 型不等式の拡張について

筑波大学・数学系　小池 健一 (Ken-ichi Koike)
Institute of Mathematics
University of Tsukuba

1. はじめに

未知母数の関数の不偏推定量に対して，一様最小分散不偏推定量 (UMVUE) が存在する場合，その推定量を用いて推定を行えばよい．一方，UMVUE が存在しない場合，ある不偏推定量の効率を測る手段に，分散に対する下界を与える式として，Cramér-Rao 型の不等式があり，さらに正則条件を課すことによりこの不等式を精密化した Bhattacharyya 型の不等式が成り立つことが知られている．

X を σ-有限測度 μ に関する密度関数 $f(x,\theta)$ $(\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1)$ を持つ確率変数とする．密度の台を $S(\theta) := \{x : f(x,\theta) > 0\}$ と表す．

g を恒等的に定数とはならない Θ 上の連続関数，$\hat{g}(X)$ を $E_\theta\{\hat{g}(X)^2\} < \infty$ を満たす $g(\theta)$ の不偏推定量とする．

Bhattacharyya 型の不等式は，ある正則条件 R_k (例えば Fend [F59]) の下で，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} &\geq \left(g^{(1)}(\theta), \ldots, g^{(k)}(\theta)\right) W^{-1}(\theta) \left(g^{(1)}(\theta), \ldots, g^{(k)}(\theta)\right)' \\ &=: B_k(\theta), \quad \text{say,} \end{aligned} \tag{1.1}$$

となることを示している．但し，$g^{(i)}(\theta) = \frac{d^i g(\theta)}{d\theta^i}$, $W(\theta) := \{w_{ij}(\theta)\}_{i,j=1,\ldots,k}$

$$w_{ij}(\theta) := E_\theta \left\{ f^{-2}(X,\theta) \frac{\partial^i f(X,\theta)}{\partial\theta^i} \frac{\partial^j f(X,\theta)}{\partial\theta^j} \right\} \quad (i,j = 1,\ldots,k)$$

とおく．良く知られているように $B_1(\theta)$ は Cramér-Rao 型の下界に一致し，$\theta \in \Theta$ について，この下界はその次数を大きくすれば単調に増大，すなわち$B_{k+1}(\theta) \geq B_k(\theta)$ $(k \geq 1)$ が成り立つ．しかも，局所最小分散不偏推定量によって与えられる分散に収束することが知られている (Blight and Rao [BR74])．

一方，「フィッシャー情報量が発散する」，「密度関数が未知母数に関して微分可能でない」等，Cramér-Rao 型や Bhattacharyya 型の不等式が成立しな

いような非正則な場合にも，上のような不等式が，Chapman and Robbins [CR51], Kiefer [Ki52] 等により示されている．Chapman-Robbins の不等式は，

$$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} \geq \sup_\phi \frac{\{g(\phi)-g(\theta)\}^2}{E_\theta\left\{\frac{f(X,\phi)-f(X,\theta)}{f(X,\theta)}\right\}^2} =: H(\theta), \quad \text{say}, \tag{1.2}$$

となることを示している．但し，$g(\phi) \neq g(\theta)$ かつ $S(\phi) \subset S(\theta)$ なる $\phi \in \Theta$ について sup をとるものとする．この不等式が成り立つためには，密度関数の台が(ある一定の条件下ではあるが) 未知母数に依存しても良く，密度関数の未知母数に関する偏微分が存在しなくてもよい．良く知られているように，$H(\theta) \geq B_1(\theta)$ が成り立つ([CR51] 参照)．

最近，Kshirsagar [Ks00] により，Chapman-Robbins 型の不等式を Bhattacharyya 型の不等式を得る場合の手法を用いて拡張した次のような不等式が示された：

$$\psi_r := \frac{f(x,\phi_r)-f(x,\theta)}{f(x,\theta)} \quad (r=1,2,\ldots,k) \tag{1.3}$$

とおくと，Kshirsagar の不等式は

$$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} \geq \sup_\phi \mathbf{w}\Sigma^{-1}\mathbf{w}' =: K_k(\theta), \quad \text{say} \tag{1.4}$$

で与えられる．但し，$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\theta,\phi_1,\ldots,\phi_k) := (g(\phi_1)-g(\theta),\ldots,g(\phi_k)-g(\theta))$, $\Sigma = \Sigma(\theta,\phi_1,\ldots,\phi_k) = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,k}$ $(\sigma_{ij} = \mathrm{cov}_\theta(\psi_i,\psi_j)$ $(i,j=1,\ldots,k))$ とし，$S(\phi_k) \subset S(\phi_{k-1}) \subset \cdots \subset S(\phi_1) \subset S(\theta)$ なる $\phi_i \in \Theta$ $(i=1,\ldots,k)$ で sup をとるものとする．しかし，この右辺において，sup をとる際には多変数関数の上界を求めることになり，実際には煩雑なことが多い．また，この論文では不等式が示されただけで，他の不等式との関連などについては全く言及されていない．

ここでは，Chapman-Robbins 型の不等式を，[Ks00] と同様の方法で拡張した別の不等式を示す．同様の結果は，Akahira et al. [APT86], Akahira and Takeuchi [AT87] にもあるが，正則条件が違っているため，異なる結果となっている．また，得られた不等式を用いて，通常の Bhattacharyya 型や Kshirsagar の下界との比較を行い，得られた不等式の達成に関していくつかの命題を示す．

2．不偏推定量の分散に対する別の不等式

X を，ある σ-有限測度に関する密度関数 $f(x,\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ をもつ確率変

数とする．但し，Θ は $\mathbb{R}^1$ の開集合とする．Θ 上で定義された，定数関数でない，ある実数値関数 $g(\theta)$ の不偏推定問題を考える．$S(\theta)$ を $f(x,\theta)$ の台とし，$S(\theta) \supset S(\theta + i\delta)$ $(i = 1, \ldots, k)$ となるように $\theta + i\delta \in \Theta$ $(i = 1, \ldots, k)$ がとれるものとする．ここで

$$\Psi_i = \Psi_i(x,\theta,\delta) := \left(\frac{-1}{\delta}\right)^i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (-1)^l \frac{f(x,\theta+l\delta)}{f(x,\theta)} \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{2.1}$$

$$G_i = G_i(\theta,\delta) := \left(\frac{-1}{\delta}\right)^i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (-1)^l g(\theta+l\delta) \quad (i = 1, \ldots, k),$$

$$V = V(\theta,\delta) = \{v_{ij}(\theta,\delta)\},$$
$$v_{ij}(\theta,\delta) := E_\theta(\Psi_i\Psi_j) \quad (i,j = 1, \ldots, k) \tag{2.2}$$

とすると，次の定理を得る．

定理 1． $\hat{g}(X)$ を$g(\theta)$ の不偏推定量とすると，

$$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} \geq \sup_{\delta\in\Delta} \mathbf{g}V^{-1}\mathbf{g}' =: D_k(\theta), \quad \text{say} \tag{2.3}$$

が成り立つ．但し，$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\theta,\delta) := (G_1, \ldots, G_k)$ かつ $\Delta = \{\delta : S(\theta) \supset S(\theta + i\delta) \quad (i = 1, \ldots, k), |V(\theta,\delta)| \neq 0\}$ とし，$\Delta = \emptyset$ のとき，右辺 $=$ 0 とする．

証明． 一般性を失わずに $\Delta \neq \emptyset$ としてよい．$\delta \in \Delta$ を固定する．$S(\theta) \supset S(\theta + i\delta)$ $(i = 1, \ldots, k)$ より

$$\begin{aligned}
E_\theta\{\Psi_i(X,\theta,\delta)\} &= \left(\frac{-1}{\delta}\right)^i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (-1)^l E_\theta\left\{\frac{f(X,\theta+l\delta)}{f(X,\theta)}\right\} \\
&= \left(\frac{-1}{\delta}\right)^i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (-1)^l \int_{S(\theta)} f(x,\theta+l\delta)d\mu \\
&= \left(\frac{-1}{\delta}\right)^i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (-1)^l \\
&= \left(\frac{-1}{\delta}\right)^i (1-1)^i = 0
\end{aligned}$$

となり，$\hat{g}(X)$ は $g(\theta)$ の不偏推定量なので

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}_\theta(\hat{g}(X), \Psi_i(X,\theta,\Delta)) \\
&=E_\theta\{\hat{g}(X)\Psi_i(X,\theta,\Delta)\} \\
&=\left(\frac{-1}{\delta}\right)^i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (-1)^l \int_{S(\theta)} \hat{g}(x) f(x,\theta+l\theta) d\mu \\
&=\left(\frac{-1}{\delta}\right)^i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (-1)^l g(\theta+l\delta) \\
&=G_i
\end{aligned}$$

となる．従って $(\hat{g}(X), \Psi_1(X,\theta,\delta), \dots, \Psi_k(X,\theta,\delta))$ の共分散行列 U を考えると，U は対称で

$$U = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} & G_1 & \cdots & G_k \\ G_1 & V_{11}(\theta,\delta) & \cdots & V_{1k}(\theta,\delta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_k & V_{k1}(\theta,\delta) & \cdots & V_{kk}(\theta,\delta) \end{pmatrix}$$

となる．U は非負値で $|V|>0$ だから

$$|U| = |V| \left| \mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} - \mathbf{g}V^{-1}\mathbf{g}' \right|$$

となり，

$$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} \geq \mathbf{g}V^{-1}\mathbf{g}' \tag{2.4}$$

を得る．δ に関して sup をとり，題意を得た． □

注． $D_1(\theta)=K_1(\theta)=H(\theta)$ が成り立つ．

(1.4) と (2.3) の関係は次のようになる．

定理 2． ある $\delta \neq 0$ について，$S(\theta+i\delta) \subset S(\theta)$ $(i=1,\dots,k)$ となるとき，

$$\begin{aligned}
&\mathbf{w}(\theta,\theta+\delta,\dots,\theta+k\delta)\{\Sigma(\theta,\theta+\delta,\dots,\theta+k\delta)\}^{-1} \\
&\qquad\qquad \cdot \mathbf{w}(\theta,\theta+\delta,\dots,\theta+k\delta)' \\
&=\mathbf{g}(\theta,\delta)\{V(\theta,\delta)\}^{-1}\mathbf{g}(\theta,\delta)'
\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明． 式 (1.3) において $\phi_i=\theta+i\delta$ $(i=1,\dots,k, \delta\neq 0)$ とおき，$\mathbf{g}(\theta,\delta)V^{-1}\mathbf{g}(\theta,\delta)' = \mathbf{w}\Sigma^{-1}\mathbf{w}'$ を示す．G_i の定義から，$i=1,\dots,k$につ

$$G_i = \left(\frac{-1}{\delta}\right)^i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (-1)^l g(\theta + l\delta)$$
$$= \left(\frac{-1}{\delta}\right)^i \sum_{l=1}^{i} \binom{i}{l} (-1)^l \{g(\theta + l\delta) - g(\theta)\}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} =& (G_1, \ldots, G_k) \\
=& \left(\left(\frac{-1}{\delta}\right)^1 \sum_{l=1}^{1} \binom{1}{l} (-1)^l \{g(\theta + l\delta) - g(\theta)\}, \ldots, \right. \\
& \left. \left(\frac{-1}{\delta}\right)^k \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l \{g(\theta + l\delta) - g(\theta)\} \right) \\
=& (g(\theta+\delta) - g(\theta), \ldots, g(\theta + k\delta) - g(\theta)) \\
& \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{\delta}\right)^1 \binom{1}{1}(-1)^1 & \left(\frac{-1}{\delta}\right)^2 \binom{2}{1}(-1)^1 & \cdots & \left(\frac{-1}{\delta}\right)^k \binom{k}{1}(-1)^1 \\ 0 & \left(\frac{-1}{\delta}\right)^2 \binom{2}{2}(-1)^2 & \cdots & \left(\frac{-1}{\delta}\right)^k \binom{k}{2}(-1)^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{-1}{\delta}\right)^k \binom{k}{k}(-1)^k \end{pmatrix} \\
=& \mathbf{w} \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{\delta}\right)^1 \binom{1}{1}(-1)^1 & \left(\frac{-1}{\delta}\right)^2 \binom{2}{1}(-1)^1 & \cdots & \left(\frac{-1}{\delta}\right)^k \binom{k}{1}(-1)^1 \\ 0 & \left(\frac{-1}{\delta}\right)^2 \binom{2}{2}(-1)^2 & \cdots & \left(\frac{-1}{\delta}\right)^k \binom{k}{2}(-1)^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{-1}{\delta}\right)^k \binom{k}{k}(-1)^k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と表せるので

$$\mathbf{g}V^{-1}\mathbf{g}' = \mathbf{w}FV^{-1}F'\mathbf{w}' = \mathbf{w}((F')^{-1}VF^{-1})^{-1}\mathbf{w}'$$

となる．但し，$F = \{f_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,k}$は

$$f_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{-1}{\delta}\right)^j \binom{j}{i} (-1)^i & (i \leq j), \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

なる正則行列とする．従って，題意を示すには，$(F')^{-1}VF^{-1} = \Sigma$，すな

わち $V = F'\Sigma F$を示せばよい．F の定義から，$F'\Sigma F$ の (i,j) 成分は

$$\left(\frac{-1}{\delta}\right)^{i+j}\sum_{m=1}^{i}\sum_{n=1}^{j}(-1)^{m+n}\binom{i}{m}\binom{j}{n}\sigma_{mn} \tag{2.5}$$

となる．$\sigma_{mn} = E_\theta\{f(X,\theta+m\delta)f(X,\theta+n\delta)/f^2(X,\theta)\}-1$ なので，任意の m と n について，$\sigma_{m0} = \sigma_{0n} = 0$となる．よって (2.5) は，

$$\sum_{n=0}^{j}(-1)^n\binom{j}{n} = (1-1)^j = 0$$

を用いて

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{-1}{\delta}\right)^{i+j}\sum_{m=0}^{i}\sum_{n=0}^{j}(-1)^{m+n}\binom{i}{m}\binom{j}{n}\\
&\qquad\qquad\cdot\left[E_\theta\left\{\frac{f(X,\theta+m\delta)f(X,\theta+n\delta)}{f^2(X,\theta)}\right\}-1\right]\\
=&\left(\frac{-1}{\delta}\right)^{i+j}\sum_{m=0}^{i}\sum_{n=0}^{j}(-1)^{m+n}\binom{i}{m}\binom{j}{n}\\
&\qquad\qquad\cdot E_\theta\left\{\frac{f(X,\theta+m\delta)f(X,\theta+n\delta)}{f^2(X,\theta)}\right\}\\
=&E_\theta(\Psi_i\Psi_j)
\end{aligned}$$

となる．これは V の (i,j) 成分に等しく，題意を得た． □

上の定理から，Kshirsagar の不等式 (1.4) において，φ_i を特別な取り方をすれば，定理 1 の不等式が出てくることが分かる．

Bhattacharyya 型の不等式 (1.1) が成立するための正則条件 R_k を仮定する，すなわち，台 $S(\theta)$ が θ と無関係で，下式において，θ に関する k 次導関数が，左辺において積分記号下で k 回偏微分することにより得られる：

$$\int_{S(\theta)} f(x,\theta)d\mu = 1, \quad \int_{S(\theta)} \hat{g}(x)f(x,\theta)d\mu = g(\theta).$$

このとき次を得る．

系 3． 正則条件 R_k の下で次が成り立つ．

$$B_k(\theta) \le D_k(\theta) \le K_k(\theta) \qquad (k \ge 1).$$

証明． 最初に左の不等式を示す．補題 1 から，$i = 1,\dots,k,$ について，

$\delta \to 0$ のとき

$$G_i \to g^{(i)}(\theta),$$

$$\Psi_i = \left(\frac{-1}{\delta}\right)^i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (-1)^l \frac{f(x, \theta + l\delta)}{f(x, \theta)} \to \frac{\partial^i f(x, \theta)/\partial\theta^i}{f(x, \theta)}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} v_{ij}(\theta, \delta) = \lim_{\delta\to 0} E_\theta(\Psi_i \Psi_j) = E_\theta\left(\lim_{\delta\to 0} \Psi_i \Psi_j\right) \\ = E_\theta\left\{\frac{\partial^i f(X, \theta)/\partial\theta^i}{f(X, \theta)} \frac{\partial^j f(X, \theta)/\partial\theta^j}{f(X, \theta)}\right\}\end{aligned}$$

となる．よって (2.4) の右辺の極限をとれば

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} \mathbf{g}V^{-1}\mathbf{g}' &= \lim_{\delta\to 0}(G_1, \ldots, G_k)V^{-1}(G_1, \ldots, G_k)' \\ &= (g^{(1)}(\theta), \ldots, g^{(k)}(\theta))W^{-1}(\theta)(g^{(1)}(\theta), \ldots, g^{(k)}(\theta))'\end{aligned}$$

を得る．但し，$W = W(\theta) = \{w_{ij}(\theta)\}$ で

$$w_{ij}(\theta) := E_\theta\left[\frac{\frac{\partial^i}{\partial\theta^i} f(X, \theta)}{f(X, \theta)} \cdot \frac{\frac{\partial^j}{\partial\theta^j} f(X, \theta)}{f(X, \theta)}\right] \quad (i, j = 1, \ldots, k)$$

とする．従って

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} \mathbf{g}V^{-1}\mathbf{g}' &= (g^{(1)}(\theta), \ldots, g^{(k)}(\theta))W^{-1}(\theta)(g^{(1)}(\theta), \ldots, g^{(k)}(\theta))' \\ &\le \sup_{\delta\in\Delta} \mathbf{g}V^{-1}\mathbf{g}'\end{aligned}$$

となり，(2.3) の下界は，少なくとも Bhattacharyya の下界と同等である．

右の不等式については定理２を用いればよい． □

3．例

ここでは定理１と２に関するいくつかの例を示す．

例１． X_1, X_2 を，互いに独立にいずれも平均 0, 分散 θ^2 $(\theta > 0)$ をもつ正規分布に従う確率変数とする．$s^2 = (X_1^2 + X_2^2)/2$ は θ に対する完備十分統計量なので，$\hat{g}(X_1, X_2) = 2s/\sqrt{\pi}$ は，分散 $\{(4/\pi) - 1\}\theta^2 \approx 0.2732\theta^2$ をもつ，θ の UMVUE である．単純な計算により，$B_1(\theta) = 0.25\theta^2$, $B_2(\theta) = 17\theta^2/64 \approx 0.2656\theta^2$ を得る．一方，[Ks00] により，$\phi_i = \theta + i\delta$ $(i = 1, \ldots, k)$ とおいて $K_k(\theta)$ が計算されている．この場合，定理２より，(2.3) において $\mathbf{g}V^{-1}\mathbf{g}'$ が (1.2) における $\mathbf{w}\Sigma^{-1}\mathbf{w}'$ に等しく，[Ks00] の Table

1の値と一致する．例えば，$H(\theta) = K_1(\theta) = D_1(\theta) \approx 0.2698\theta^2 > B_2(\theta)$ となる．

例2． X を $(0, \theta)$ 上の一様分布に従う確率変数とする．(i) $g(\theta) = \theta$ のとき，X は θ に対する完備十分統計量なので，$\hat{g}(X) = 2X$ は，分散 $\theta^2/3 \approx 0.333\theta^2$ を持つ $g(\theta)$ のUMVUEである．また，

$$H(\theta) = K_1(\theta) = 0.25\theta^2 < K_2(\theta) = D_2(\theta) \approx 0.296\theta^3$$

となる．

(ii) $g(\theta) = \theta^2$ のとき，$\hat{g}(X) = 3X^2$ は，分散 $0.8\theta^4$ を持つ，$g(\theta)$ のUMVUEである．また．

$$H(\theta) = K_1(\theta) \approx 0.620\theta^4 < D_2(\theta) \approx 0.721\theta^4 < K_2(\theta) \approx 0.723\theta^4$$

を得る．

4．下界の比較に関して

まず第2節で示した下界の達成について，Sen and Ghosh [SG76] に従って，いくつかの命題を示す．まず，定理1より次を得る．

定理5． $\hat{g}(X)$ を$g(\theta)$ の不偏推定量とすると，任意の $\delta \in \Delta$ について

$$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} \geq \mathbf{g}V^{-1}\mathbf{g}' =: D_k(\theta, \delta), \quad \text{say} \tag{4.1}$$

かつ

$$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} \geq \mathbf{w}\Sigma^{-1}\mathbf{w}' =: K_k(\theta, \phi_1, \ldots, \phi_k), \quad \text{say} \tag{4.2}$$

が成り立つ．(4.1) において，等号は，$\delta \in \Delta$ について

$$\begin{aligned}\hat{g}(X) - g(\theta) =& (G_1(\theta,\delta), \ldots, G_k(\theta,\delta))V^{-1}(\theta,\delta) \\ &\cdot (\Psi_1, \ldots, \Psi_k)'\end{aligned} \tag{4.3}$$

が成り立つこと，(4.2) において，等号は，$S(\phi_k) \subset S(\phi_{k-1}) \subset \cdots \subset S(\phi_1) \subset S(\theta)$ なる $\phi_i \in \Theta$ $(i = 1, \ldots, k)$ について

$$\begin{aligned}\hat{g}(X) - g(\theta) =& (g(\phi_1) - g(\theta), \ldots, g(\phi_k) - g(\theta))\Sigma^{-1}(\theta, \phi_1, \ldots, \phi_k) \\ &\cdot (\psi_1, \ldots, \psi_k)'\end{aligned} \tag{4.4}$$

が成り立つことと同値である．

証明は式 (2.4) から明らか．

定理5から，次の2つの命題がただちに分かる．

系6． 式 (4.3) がある $\delta = \delta^*(\theta) \in \Delta$ で成り立つならば，$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} = D_k(\theta)$ となり，(2.3) におけるsup は $\delta = \delta^*(\theta)$ で達成し，式 (4.4) があ

る $(\phi_1,\dots,\phi_k)=(\phi_1^*(\theta),\dots,\phi_k^*(\theta))$ で成り立つならば，$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\}=K_k(\theta)$ となり，(1.4) における sup は$(\phi_1,\dots,\phi_k)=(\phi_1^*(\theta),\dots,\phi_k^*(\theta))$ で達成する．

系 7． 正則条件 R_k が成り立つとき，$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\}=D_k(\theta,0)$ であれば，(4.3) が $\delta=0$ で成立して，(2.3) で等号が成り立つ．逆に，(4.3) が $\delta=0$ で成立すれば，$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\}=D_k(\theta,0)=D_k(\theta)$ となる．

これらの系を用いると，次が分かる．

定理 8． 自然数 k と $\theta_1,\theta_1+k\delta\in\Theta$ $(\delta\neq 0)$ について，$S(\theta_1)\supset S(\theta_1+l\delta)$, $|\Sigma(\theta_1,\delta,\dots,l\delta)|\neq 0$ $(1\le l\le k)$ とする．このとき $\hat{g}(X)=f(X,\theta_1+l\delta)/f(X,\theta_1)$ は $g(\theta)=E_\theta\{f(X,\theta_1+l\delta)/f(X,\theta_1)\}$ の θ_1 における 局所最小分散不偏推定量となる $(1\le l\le k)$.

証明． $\hat{g}(X)=f(X,\theta_1+l\delta)/f(X,\theta_1)$, $g(\theta)=E_\theta\{\hat{g}(X)\}$ おく．定理 2から，$K_l(\theta_1,\theta_1+\delta,\dots,\theta_1+l\delta)=D_l(\theta_1,\delta)$ となるから，ここでは $K_l(\theta_1,\theta_1+\delta,\dots,\theta_1+l\delta)$ を用いて示す．

$$\begin{aligned}
g(\theta_1+i\delta)=&E_{\theta_1+i\delta}\left\{\frac{f(X,\theta_1+l\delta)}{f(X,\theta_1)}\right\}\\
=&E_{\theta_1}\left\{\frac{f(X,\theta_1+i\delta)}{f(X,\theta_1)}\frac{f(X,\theta_1+l\delta)}{f(X,\theta_1)}\right\}\\
=&\sigma_{il}+1\quad(1\le i\le k),\\
g(\theta_1)=&E_{\theta_1}\left\{\frac{f(X,\theta_1+l\delta)}{f(X,\theta_1)}\right\}=1
\end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned}
&(g(\theta_1+\delta)-g(\theta_1),\dots,g(\theta_1+l\delta)-g(\theta_1))\\
&\cdot\Sigma^{-1}(\theta_1,\theta_1+\delta,\dots,\theta_1+l\delta)\\
&\cdot(\{f(X,\theta_1+\delta)/f(X,\theta_1)\}-1,\dots,\{f(X,\theta_1+l\delta)/f(X,\theta_1)\}-1))'\\
&=(\sigma_{1l},\dots,\sigma_{ll})\,\Sigma^{-1}(\theta_1,\theta_1+\delta,\dots,\theta_1+l\delta)\\
&\cdot(\{f(X,\theta_1+\delta)/f(X,\theta_1)\}-1,\dots,\{f(X,\theta_1+l\delta)/f(X,\theta_1)\}-1))'\\
&=(0,\dots,0,1)\\
&\cdot(\{f(X,\theta_1+\delta)/f(X,\theta_1)\}-1,\dots,\{f(X,\theta_1+l\delta)/f(X,\theta_1)\}-1))'\\
&=\{f(X,\theta_1+l\delta)/f(X,\theta_1)\}-1\\
&=\hat{g}(X)-g(\theta_1)
\end{aligned}$$

となるので，式 (4.4) が成立する．よって系 6から題意が成立． □

定理 9． 密度関数 $f(x,\theta)$ が

$$f(x,\theta) = \alpha(\theta)a(x)\exp\{\gamma(\theta)b(x)\} \tag{4.5}$$

で与えられるとする．ただし，$\alpha(\theta) > 0$ であり，$\gamma(\theta)$ は θ の単調な連続微分可能な関数，Γ をγ の値域とする．自然数 k と $\theta_1, \theta_1 + k\delta \in \Theta$ $(\delta \neq 0)$ について，任意の $\theta \in \Theta$ について，$2\gamma(\theta_1 + k\delta) - 2\gamma(\theta_1) + \gamma(\theta) \in \Gamma$ であるとき

$$\hat{g}(X) = \exp[\{\gamma(\theta_1 + l\delta) - \gamma(\theta_1)\}b(X)] \tag{4.6}$$

は $g(\theta) = \alpha(\theta)/\alpha[\gamma^{-1}\{\gamma(\theta_1 + l\delta) - 2\gamma(\theta_1) - \gamma(\theta)\}]$ のUMVUE であり，任意の θ について $\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} = D_k(\theta)$ を満たす $(1 \leq l \leq k)$.

証明． γ の単調性から Γ は区間となり，任意の $\theta \in \Theta$ について，$2\gamma(\theta_1 + k\delta) - 2\gamma(\theta_1) + \gamma(\theta) \in \Gamma$ であるとき，$\gamma(\theta_1 + k\delta) - \gamma(\theta_1) + \gamma(\theta) \in \Gamma$ となる．式 (4.6) のように $\hat{g}$ を定義すれば，

$$\begin{aligned} E_\theta\{\hat{g}(X)\} =& \alpha(\theta) \int a(x) \\ & \cdot \exp[\{\gamma(\theta_1 + l\delta) - \gamma(\theta_1) + \gamma(\theta)\}b(x)]\mu(dx) \\ =& g(\theta), \\ \mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} =& [\alpha(\theta)/\alpha(\gamma\{2\gamma(\theta_1 + l\delta) - \gamma(\theta_1) + \gamma(\theta)\})] - g^2(\theta) \end{aligned}$$

となる．任意の $\theta \in \Theta$ について，$\phi^*(\theta) := \gamma^{-1}\{\gamma(\theta_1 + l\delta) - \gamma(\theta_1) - \gamma(\theta)\}$ とおけば，定理 8 と同様に (4.4) を満たすことが示される．よって，系 6 から $\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} = D_k(\theta)$ が任意の $\theta \in \Theta$ で成立し題意を得る． □

以下では，正則条件 R_k を仮定する．$D_k(\theta)$ と $B_k(\theta)$ を比較すると，定理 2 より，任意の$\theta \in \Theta$ について $D_k(\theta) \geq B_k(\theta)$ が成り立つ．また，[F59] より，確率変数 X の密度関数が (4.5) に従い $\hat{g}(X) = b^l(x)$ のとき，任意の $\theta \in \Theta$ について $D_k(\theta) = B_k(\theta)$ が成り立つ．ではどのような場合に，$D_k(\theta) > B_k(\theta)$ となるか否かに関して，$k = 1$ の場合，Sen and Ghosh [SG76] によって $H(\theta) > B_1(\theta)$ が成り立つための十分条件が示されているが，ここではそれを $k = 2$ の場合に拡張する．

$$\begin{aligned} & a(ijkl) \\ :=& E_\theta\left[\left\{\frac{\partial f(X,\theta)}{\partial\theta}\right\}^i \left\{\frac{\partial^2 f(X,\theta)}{\partial\theta^2}\right\}^j \left\{\frac{\partial^3 f(X,\theta)}{\partial\theta^3}\right\}^k \left\{\frac{\partial^4 f(X,\theta)}{\partial\theta^4}\right\}^l\right] \end{aligned}$$

とおく $(i,j,k,l = 0,1,2)$ と，次が成り立つ．

定理１０． 正則条件 R_5 の条件下で，

$$
\begin{aligned}
&2\{a(1100)\,g'(\theta)-a(2000)\,g''(\theta)\}\\
&\cdot[a(0110)\,\{-a(1100)g'(\theta)+a(2000)g''(\theta)\}\\
&+a(1100)\{-a(1010)g''(\theta)+a(1100)g'''(\theta)\}\\
&+a(0200)\{a(1010)g'(\theta)-a(2000)g'''(\theta)\}]>0
\end{aligned}
$$

ならば，$D_2(\theta)>B_2(\theta)$ となる．特に，$f(x,\theta)=f_0(x-\theta)$ で，f_0 が 0 について対称であるとき，$-g''(\theta)\{a(1010)g'(\theta)-a(2000)g'''(\theta)\}>0$ であれば，$D_2(\theta)>B_2(\theta)$ となる．

証明． ここでは簡単のため，$g'=g'(\theta), g''=g''(\theta)$ 等と記す．
（前半）正則条件 R_5 の下で，十分小なる $|h|>0$ について

$$
G_1^2=\left\{\frac{g(\theta+h)-g(\theta)}{h}\right\}^2
$$

$$
=g'^2+\frac{h}{2}g'g''+h^2(g''^2/4+g'g'''/3)+o\left(h^2\right),
$$

$$
G_2^2=\left\{\frac{g(\theta+2h)+g(\theta)-2g(\theta+h)}{h^2}\right\}^2
$$

$$
=g''^2+2hg''g'''+h^2\{g'''^2+g''g^4(7/6)\}+o\left(h^2\right),
$$

$$
\mathrm{Var}_\theta\{G_1\}=\mathrm{Var}_\theta\left\{\frac{f(X,\theta+h)-f(X,\theta)}{f(X,\theta)}\right\}
$$

$$
=a(2000)+a(1100)h+\{(1/4)a(0200)+(1/3)a(1010)\}\,h^2+o\left(h^2\right),
$$

$$
\mathrm{Var}_\theta\{G_2\}=\mathrm{Var}_\theta\left\{\frac{f(X,\theta+2h)+f(X,\theta)-2f(X,\theta+h)}{f(X,\theta)}\right\}
$$

$$
=a(0200)+2a(0110)h+\{a(0020)+(7/6)a(0101)\}\,h^2+o\left(h^2\right),
$$

$$
\mathrm{Cov}_\theta\{G_1,G_2\}
$$

$$
\begin{aligned}
=&a(1100)+\{a(1010)+(1/2)a(0200)\}\,h\\
&+\{(7/12)a(1001)+(2/3)a(0110)\}\,h^2+o\left(h^2\right),
\end{aligned}
$$

となるから，

$$
\begin{aligned}
&D_2(\theta, h)\\
=&\frac{a(0200)\,g'(\theta)^2 - 2\,a(1100)\,g'(\theta)\,g''(\theta) + a(2000)\,g''(\theta)^2}{-a(1100)^2 + a(0200)\,a(2000)}\\
&+ 2\{a(1100)\,g'(\theta) - a(2000)\,g''(\theta)\}\\
&\cdot [a(0110)\,\{-a(1100)g'(\theta) + a(2000)g''(\theta)\}\\
&+ a(1100)\{-a(1010)g''(\theta) + a(1100)g'''(\theta)\}\\
&+ a(0200)\{a(1010)g'(\theta) - a(2000)g'''(\theta)\}]\\
&\cdot \frac{h}{\{a(1100)^2 - a(0200)a(2000)\}^2} + o(h)\\
=&B_2(\theta) + (*)\frac{h}{\{a(1100)^2 - a(0200)a(2000)\}^2} \quad \text{(say)} \quad (h \to 0)
\end{aligned}
$$

より，$(*) > 0$ ならば $D_2(\theta) > B_2(\theta)$.

（後半）$f(x,\theta) = f_0(x-\theta)$ で f_0 が 0 について対称とすると，$f_0(x) = f_0(-x), f_0'(x) = -f_0'(-x), f_0'''(x) = f'''(-x)$ となるため，$a(1100) = \int f'f''/f d\mu = 0$. 同様に，$a(0110) = 0$ なので，題意を得る．
□

定理１１． 式 (4.5), (4.6) の設定下で，任意の $k \geq 1$ と$\theta \in \Theta$ について $\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} = D_1(\theta) > B_k(\theta)$ となる．

証明． 式 (4.5), (4.6) のようにおくと，任意の $\theta \in \Theta$ について $E_\theta\{\hat{g}(X)\} = g(\theta)$ かつ $\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} = D_k(\theta)$ を満たす．特に，$k=1$ でも成立するので，$\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} = D_1(\theta)$ となる．一方，$\hat{g}(X)$ は $b(X)$ の多項式でないので，Fend [F59] より $\mathrm{Var}_\theta\{\hat{g}(X)\} > B_k(\theta)$. よって題意を得る． □

参考文献

[A95] Akahira, M.: The Bhattacharyya type bound for the asymptotic variance and the sequential discretized likelihood estimation procedure. *Sequential Analysis*, **14**, (1995), 193–204.

[APT86] Akahira, M., Puri, M. and Takeuchi, K.: Bhattacharyya bound of variances of unbiased estimators in non-regular cases, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **38**, (1986), 35–44.

[AT87] Akahira, M. and Takeuchi, K.: The lower bound for the variance of unbiased estimators for one-directional family of distributions, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **39**, (1987), 593–610.

[B46] Bhattacharyya, A.: On some analogues of the amount of information and their uses in statistical estimation. *Sankhyā*, *8*, (1946), 1–14, 201–218, 315–328.

[BR74] Blight, J. N. and Rao, P. V.: The convergence of Bhattacharyya bounds. *Biometrika*, **61**, (1974), 137–142.

[BS80] Borovkov, A. A. and Sakhanienko, A. U.: On estimates of the expected quadratic risk (in Russian). *Probab. Math. Statist.*, **1**, (1980),185–195.

[BG90] Brown, L. D. and Gajek, L.: Information inequalities for the Bayes risk. *Ann. Statist.*, **18**, (1990), 1578–1594.

[CR51] Chapman, D. G. and Robbins, H. E.: Minimum variance estimation without regularity assumptions. *Ann. Math. Statist.*, **22**, (1951), 581–586.

[C45] Cramér, H.: *Mathematical Methods of Statistics.* Princeton Univ. Press, 1945.

[F59] Fend, A. V. On the attainment of Cramér-Rao and Bhattacharyya bounds for the variance of an estimate, *Ann. Math. Statist.*, **30**, (1959), 381–388.

[H50] Hammersley, J. M.: On estimating restricted parameters. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **12**, (1950), 192–240.

[Ki52] Kiefer, J.: On minimum variance estimation. *Ann. Math. Statist.*, **23**, (1952), 627–629.

[Ko97] Koike, K.: On the Bhattacharyya type inequality in the sequential estimation. *J. Japan Statist. Soc.*, **27**, (1997), 65–75.

[Ko99] Koike, K.: A lower bound for the Bayes risk in the sequential case. *Commun. Statist.-Theory Meth.* **28**, (1999), 857–871.

[Ko02] Koike, K.: On the inequality of Kshirsagar. To appear in *Commun. Statist.-Theory Meth.* **31**, (2002).

[Ks00] Kshirsagar, A. M.: An extension of the Chapman-Robbins inequality, *J. Indian Statist. Assoc.*, **38**, (2000), 355–362.

[LC98] Lehmann, E. L. and Casella, G.: *Theory of Point Estimation* (2nd ed.). Springer, New York, 1998.

[P92] Prakasa Rao, B. L. S.: Cramer-Rao type integral inequalities for estimators of multidimensional parameter. *Sankhyā Ser. A*, **54**, (1992), 53–73.

[R45] Rao, C. R.: Information and accuracy attainable in estimation of statistical parameters. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **37**, (1945), 81–91.

[SA96] Sato, M. and Akahira, M.: An information inequality for the Bayes risk. *Ann. Statist.*, **24**, (1996), 2288–2295.

[SG76] Sen, P. K. and Ghosh, B. K.: Comparison of some bounds in estimation theory. *Ann. Statist.*, **4**, (1976), 755–765.

[S49] Seth, G. R.: On the variance of estimates. *Ann. Math. Statist.*, **20**, (1949), 1–27.

[V92] Vincze, I.: On nonparametric Cramér-Rao inequalities. *Order Statistics and Nonparametrics* (P. K. Sen and I. A. Salaman, eds.). Elsevier, North Holland, 1992, 439–454.

[W47] Wolfowitz, J.: The efficiency of sequential estimates and Wald's equation for sequential process. *Ann. Math. Statist.*, **18**, (1947), 215–230.