数理解析研究所講究録 1274 巻 2002 年 247-250

ある Banach 環上の有界線型汎関数としての Dirichlet 級数について

名大多元　神谷諭一 (Yuichi Kamiya)
Graduate School of Mathematics
Nagoya University

1967 年に発表された Helson 氏の論文 [3] において、ある良い性質をもつ Banach 環上の有界線型汎関数として Dirichlet 級数を捉えようとする試みがなされた。本稿では彼の理論を簡単に解説し、若干の補足をしたいと思う。

以下を通して、複素変数 s は実数 σ、x を用いて $s=\sigma+ix$ と記すことにする。Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ を考えよう。$\sigma>1$ なる半平面では $\zeta(s)$ は絶対収束する Dirichlet 級数として表示されるので、$\sigma(>1)$ を固定し x の関数とみたとき $\zeta(\sigma+i\cdot)$ は有界である。ここで関数解析において良く知られている次の事実を思い出そう：$\mathbf{R}$ 上の $\mathbf{C}$ 値可測関数でその絶対値の $\mathbf{R}$ 上にわたる積分が有限であるようなもの全体を L^1 と記し、$\mathbf{R}$ 上の $\mathbf{C}$ 値可測関数で本質的に有界であるようなもの全体を L^∞ と記すとき、L^1 の共役空間 $(L^1)^*$ と L^∞ は Banach 空間として同型である。$\zeta(\sigma+i\cdot)$ は有界なのだから当然 L^∞ の元であり、この事実から $(L^1)^*$ の元 φ_σ を対応させることができた。具体的には φ_σ は

$$\varphi_\sigma(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\sigma+ix)f(x)dx,\quad f\in L^1$$

と表示される。

次に $1/2\le\sigma<1$ なる σ を固定し $\zeta(s)$ を x の関数とみよう。このとき $\zeta(\sigma+i\cdot)$ は有界でないことが知られている。従って上述の事実からは $\zeta(\sigma+i\cdot)$ を汎関数とはみなせない。しかし L^1 の部分 Banach 空間を考えれば、その共役空間は L^∞ より大きくなることが期待でき、$\zeta(\sigma+i\cdot)$ はその空間に入るのではないかと考えられる。そこで 1938 年の Beurling [1] によって定義された Banach 空間 $L^1_{\rho_\alpha}$ を導入しよう。α は 0 以上の実数とし重み関数 ρ_α を $\rho_\alpha(x)=(1+|x|)^\alpha$ によって与える。そして

$$L^1_{\rho_\alpha}=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{C};\text{可測で }\|f\|_{\rho_\alpha}=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\rho_\alpha(x)dx<\infty\}$$

と定義する。$\|\cdot\|_{\rho_\alpha}$ はノルムとなり $L^1_{\rho_\alpha}$ はこのノルムのもとで Banach 空間となる。明らかに $L^1_{\rho_\alpha}$ は Banach 空間として L^1 に含まれる (i.e. $L^1_{\rho_\alpha}\subset L^1$ かつ $\|f\|_{\rho_\alpha}\ge\|f\|_{L^1}$)。$L^1_{\rho_\alpha}$ の共役空間 $(L^1_{\rho_\alpha})^*$ について次が知られている。

事実 1 $L^\infty_{\rho_\alpha}=\{\Phi:\mathbf{R}\to\mathbf{C};\text{可測で }\|\Phi\|_{\rho_\alpha,\infty}=\mathrm{esssup}_{x\in\mathbf{R}}|\Phi(x)|/\rho_\alpha(x)<\infty\}$ とおく。このとき $(L^1_{\rho_\alpha})^*$ と $L^\infty_{\rho_\alpha}$ は Banach 空間として同型である。即ち、$\Phi\in L^\infty_{\rho_\alpha}$ に対し $\varphi\in(L^1_{\rho_\alpha})^*$ を

$$\varphi(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)f(x)dx,\quad f\in L^1_{\rho_\alpha}$$

によって与える写像は全単射かつ等長である。

$1/2 \leq \sigma < 1$ なる σ に対し、$\zeta(\sigma + i\cdot)$ は $|x|$ について多項式オーダーで押さえられるので、α を適当にとることにより、この事実における同型写像によって $\zeta(\sigma+i\cdot)$ に対して $(L^1_{\rho_\alpha})^*$ の元を対応させることができる。

以上によって、ある Banach 空間上の有界線型汎関数として $\zeta(\sigma+i\cdot)$ を捉えることができたが、$\zeta(s)$ が $\sigma > 1$ で Dirichlet 級数表示をもつという性質を関数解析的にどのように表現するかが重要になってくる。この部分の定義の仕方が Helson [3] の絶妙なところであると思う。まず L^1 の部分 Banach 環 A で [3] における仮定を満たすものを考える。この仮定については、紙面の都合上、原論文を参照していただくことにするが、$L^1_{\rho_\alpha}$ がそのモデルとなっていることを注意したい。即ち、$L^1_{\rho_\alpha}$ は合成積による積を導入することにより Banach 環となり、仮定された条件を性質としてもつ。次に A_0 を A の元でその Fourier 変換はコンパクト台をもつようなものからなる集合とする。A の共役空間を A^* と記す。

定義 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbf{C}$ とする。$\varphi \in A^*$ が Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n/n^{ix}$ をもつとは、すべての $f \in A_0$ に対し

$$\varphi(f) = \sum a_n \widehat{f}(\log n)$$

が成り立つときをいう。[1]

この定義を用い、最終的に次の定理に到達している。

定理（[3] の Theorem 5） $\varphi \in A^*$ が Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n/n^{ix}$ をもつとする。このとき $\sigma > 0$ なる任意の σ に対しある $\varphi_\sigma \in A^*$ が存在し φ_σ は Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n/n^{\sigma+ix}$ をもつ。さらに φ_σ は三角多項式に対応する汎関数によって (作用素ノルムのもとで) 近似される。

著者はこの結果は重要であると思うので、以下にその根拠を述べることにする。$\zeta(s)$ に関連して

$$\zeta_1(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s)$$

を考えよう。$\zeta(s)$ を直接考えないのは、この関数が $s=1$ に一位の極をもち、これによって不都合が起こるからである。$\zeta_1(s)$ は $\sigma > 1$ において

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \tag{1}$$

なる Dirichlet 級数表示をもつことがすぐわかる。さて、$\zeta(s)$ に対して次の事実が知られている。

事実 2 $1/2 < \sigma \leq 1$ なる σ に対し

$$\sup_{R>1} \left(\frac{1}{R} \int_1^R |\zeta(\sigma+ix)|^{2k} dx \right) \ll 1 \tag{2}$$

が $k = 1, 2$ について成立する。すべての自然数 k について (2) が成立することと Lindelöf 予想が正しいこととは同値である。

[1] 厳密には原論文と少しだけ定義が異なる。

次が証明できる。

補題 k は (2) を満たすような自然数とする。b を $b > 1/2$ に固定して選び s は $\sigma > b$ を満たすものとする。このとき k と b と σ に依存する正定数 $C_{k,b,\sigma}$ が存在し

$$\left|\zeta_1(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}\left(1-\left(\frac{n}{N}\right)^{2(\sigma-b)}\right)\right| \le C_{k,b,\sigma}\frac{(1+|x|)^{1/(2k)}}{N^{\sigma-b}} \tag{3}$$

が成り立つ。

この補題は 1922 年の Carlson [2] における関数論的な手法を修正することによって証明できる。[2] 大雑把にいえば、(3) の左辺の Dirichlet 多項式の部分を Perron の公式を用いて積分表示し、積分路をシフトすることによって $\zeta_1(s)$ を被積分関数の留数として拾い、残った積分を性質 (2) を用いて評価していけばよい。尚、補題における不等式は

$$\left\|\zeta_1(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}\left(1-\left(\frac{n}{N}\right)^{2(\sigma-b)}\right)\right\|_{\rho_{1/(2k)},\infty} \le \frac{C_{k,b,\sigma}}{N^{\sigma-b}} \tag{4}$$

のようにも表示されることに注意されたい。この表示と Helson 氏の定理の主張とを比べてほしい。

ところで (1) の和を有限で切ったものが $\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}/n^s$ であるが、直接これを考えずに重み $(1-(n/N)^{2(\sigma-b)})$ を施すことによって (3) の右辺の表示 (N の負巾で押さえられている) が得られるのである。Helson 氏の Dirichlet 級数の定義がこの重みを反映していることを確認しよう。

$\sigma > 1/2$ とし、b を $1/2 < b < \sigma$ なるようにとっておく。まず (4) で $N = 1$ ととることにより $\zeta_1(\sigma + i\cdot) \in L^{\infty}_{\rho_{1/(2k)}}$ がわかる。そこで事実 1 から

$$\varphi_{\sigma,k}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1(\sigma+ix)f(x)dx, \quad f \in L^1_{\rho_{1/(2k)}} \tag{5}$$

とおけば $\varphi_{\sigma,k} \in (L^1_{\rho_{1/(2k)}})^*$ である。補題により任意の $f \in L^1_{\rho_{1/(2k)}}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\left|\varphi_{\sigma,k}(f) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\sigma}\left(1-\left(\frac{n}{N}\right)^{2(\sigma-b)}\right)\hat{f}(\log n)\right| \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty}\left|\zeta_1(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}\left(1-\left(\frac{n}{N}\right)^{2(\sigma-b)}\right)\right| \cdot |f(x)|dx \\
&\le C_{k,b,\sigma}\frac{\|f\|_{\rho_{1/(2k)}}}{N^{\sigma-b}}
\end{aligned} \tag{6}$$

となる。次に $f \in (L^1_{\rho_{1/(2k)}})_0$ と制限しよう。このとき、ある正数 M_f で $n > M_f$ なるすべての自然数 n に対し $\hat{f}(\log n) = 0$ となるものが存在する。そこで (6)

[2] 講演では Carlson の手法と関数解析的な手法を織り交ぜて証明したが関数論的手法のみで証明できることが最近わかった。

$$\begin{aligned}
&\left|\varphi_{\sigma,k}(f)-\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\sigma}}\widehat{f}(\log n)\right| \\
&\leq\left|\varphi_{\sigma,k}(f)-\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\sigma}}\left(1-\left(\frac{n}{N}\right)^{2(\sigma-b)}\right)\widehat{f}(\log n)\right| \\
&\quad+\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\sigma}}\left(\frac{n}{N}\right)^{2(\sigma-b)}\widehat{f}(\log n)\right| \\
&\leq C_{k,b,\sigma}\frac{\|f\|_{\rho_{1/(2k)}}}{N^{\sigma-b}}+\frac{1}{N^{2(\sigma-b)}}\sum_{n\leq M_f}n^{\sigma-2b}|\widehat{f}(\log n)|
\end{aligned}$$

を得る。この両辺で $N\to\infty$ とすれば、すべての $f\in(L^1_{\rho_{1/(2k)}})_0$ に対し

$$\varphi_{\sigma,k}(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\sigma}}\widehat{f}(\log n)$$

が成り立つことがわかった。即ち

定理 k は (2) を満たすような自然数とする。$1/2<\sigma\leq 1$ なる任意の σ に対し (5) で定義される $\varphi_{\sigma,k}$ は $(L^1_{\rho_{1/(2k)}})^*$ に属し Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n^{\sigma+ix}$ をもつ。

ここに至って Helson 氏の定理の重要性は認識されるのではないだろうか。つまり Dirichlet 級数の絶妙な定義から出発して、関数解析的な手法を用いて (関数論的な手法は使わずに) 上述の補題を反映する結果にたどり着いたものが Helson 氏の定理である。

References

[1] A. Beurling, *Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle*, Ninth Congrès des Math. Scand., Helsingfors, 1938.

[2] F. Carlson, *Contributions à la théorie des séries de Dirichlet*. I., Ark. Mat. Ast. Fys., **16** (1922), 1–19.

[3] H. Helson, *Foundations of the theory of Dirichlet series*, Acta Math. **118** (1967), 61–77.