数理解析研究所講究録 1274 巻 2002 年 42-52

Beukers積分とその一般化について

東京大学数理科学研究科　佐藤晋　(Susumu Sato)
Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo

0　序文

この論文の目的は，次のような形の積分

$$I(h,i,j,k,l)=\int_0^1\int_0^1\frac{x^h(1-x)^iy^k(1-y)^j}{(1-xy)^{i+j-l}}\frac{dx\,dy}{1-xy}\quad (h,i,j,k,l\text{ は非負整数})$$

が $\zeta(2)$ と 1 の $\mathbb{Q}$ 係数結合でかける，という結果に関連した次の 2 つの問題を論ずることである．(ただし $\zeta(s)$ は Riemann の zeta 関数を表す．)

1. $I(h,i,j,k,l)$ の $\zeta(2)$ の係数

2. Rhin と Viola による論文 [8] の中に提出された 2 つの予想の否定的解決

詳細は序文の最後に述べる．

まず研究の動機を説明するため，Beukers 積分の歴史について簡単に振り返ってみよう．

Apéry [1] が初めて $\zeta(3)$ の無理性を示したのちに Beukers [2] はその別証を与えたが，その際に次のような多重積分

$$\iint_S\frac{P(x,y)}{1-xy}\,dx\,dy,\ \iiint_B\frac{P(x,y)}{1-(1-xy)u}\,dx\,dy\,du\quad (P(x,y)\in\mathbb{Z}[x,y])$$

を導入した．ただし $S=(0,1)^2$, $B=(0,1)^3$ である．この形の積分を Beukers 積分という．その後 Dvornicich, Viola, 畑政義, Rhin ら ([3][4][5][6][7][8]) は Beukers 積分を基にして，Riemann zeta 関数の特殊値である $\zeta(2)$ や $\zeta(3)$ の無理数度の評価の研究を重ねてきた．

Rhin と Viola は 1996 年に次のような一般化を試みた．([8])

$$I(h,i,j,k,l)=\iint_S\frac{x^h(1-x)^iy^k(1-y)^j}{(1-xy)^{i+j-l}}\frac{dx\,dy}{1-xy}\quad (h,i,j,k,l\text{ は非負整数}).$$

この形の積分を Beukers-Rhin-Viola 積分とよぼう．以下 BRV 積分と略する．上の積分は変数変換 τ を

$$\tau : \begin{cases} \xi = \dfrac{1-x}{1-xy} \\ \eta = 1-xy \end{cases}$$

によって施すことで

$$I(h,i,j,k,l) = I(i,j,k,l,h)$$

となることが容易に確かめられる．

また変数変換

$$\sigma : \begin{cases} \xi = y \\ \eta = x \end{cases}$$

によって

$$I(h,i,j,k,l) = I(k,j,i,h,l)$$

となることは明らかである．従って，τ, σ を 5 文字の集合 $\{h,i,j,k,l\}$ の置換と自然に同一視することができる．つまり

$$\tau = (h \quad i \quad j \quad k \quad l) \qquad , \qquad \sigma = (h \quad k)(i \quad j)$$

とみなせる．この 2 元は 5 次対称群の中で，位数 10 の 2 面体群と同型な部分群 T を生成している．この性質を使って Rhin と Viola は，冒頭で述べた事実にあたる次の定理を証明した．

定理 0.1. (Rhin-Viola)

(1) 任意の非負整数 h,i,j,k,l に対して $a_{h,i,j,k,l} \in \mathbb{Z}$, $b_{h,i,j,k,l} \in \mathbb{Q}$ が存在し，

$$I(h,i,j,k,l) = a_{h,i,j,k,l}\ \zeta(2) + b_{h,i,j,k,l}$$

と表せる．

(2) 上の表示において

$$\min\{h+i-k, i+j-l, j+k-h, k+l-i, l+h-j\} < 0$$

ならば $a_{h,i,j,k,l} = 0$,すなわち $I(h,i,j,k,l) \in \mathbb{Q}$ が成り立つ．

そこで，Rhin-Viola の結果の精密化と一般化をしてみようというのがこの論文の動機である．具体的に記述すると：

主結果 1. (係数の決定)

定理 0.1 の表示について次が成り立つ．

(i) $a_{h,i,j,k,l} \neq 0$ であれば

$$\mathrm{sgn}\,(a) = (-1)^{h+i+j+k+l} \quad (\mathrm{sgn}\,(a) \text{ は } a \text{ の符号})\ .$$

(ii) $a_{h,i,j,k,l}=0$ であることと $\min\{h+i-k, i+j-l, j+k-h, k+l-i, l+h-j\}<0$ であることは同値である.（定理 0.1(2) の逆の成立）

(iii) $j\geq l$ と仮定するとき

$$|a_{h,i,j,k,l}|=\sum_{s=0}^{l}\begin{pmatrix} l \\ s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k+s \\ l+h-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k-i+s \end{pmatrix}.$$

ただし 2 項係数 $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ は $n<r$ または $r<0$ に対して $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}=0$ と定める.

従って (i) と (iii) をあわせると

$$a_{h,i,j,k,l}=(-1)^{h+i+j+k+l}\sum_{s=0}^{l}\begin{pmatrix} l \\ s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k+s \\ l+h-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k-i+s \end{pmatrix}$$

と係数が決定される.

主結果 2 を述べるには Rhin-Viola の予想 [8] の説明が必要である．まず，5 文字の集合 $\{h,i,j,k,l\}$ の置換としての 5 次対称群 $\mathfrak{S}_5$ は自然に積分の集合 $\{I(h,i,j,k,l)|h,i,j,k,l$ は非負整数 $\}$ に

$${}^{\rho}I(h,i,j,k,l)=I(\rho(h),\rho(i),\rho(j),\rho(k),\rho(l)) \qquad (\rho\in\mathfrak{S}_5)$$

と作用していると考えられる．特に $\rho\in T$ であれば，前述の性質から

$${}^{\rho}I(h,i,j,k,l)=I(\rho(h),\rho(i),\rho(j),\rho(k),\rho(l))=I(h,i,j,k,l).$$

すなわち T は積分の集合に値を不変にするように作用している．これを踏まえて，彼らは逆が成立することを予想した.

予想 1. h,i,j,k,l,h',i',j',k',l' が非負整数であって

$$I(h,i,j,k,l)=I(h',i',j',k',l')$$

をみたせば，ある $\rho\in T$ が存在して

$$\rho(h)=h',\ \rho(i)=i',\ \rho(j)=j',\ \rho(k)=k',\ \rho(l)=l'.$$

予想 2 を正確に述べるのは準備が多く必要なので，ここではふれないが,

$$\frac{I(h,i,j,k,l)}{I(h',i',j',k',l')}\in\mathbb{Q}$$

をみたすような (h,i,j,k,l) と (h',i',j',k',l') との対の条件に関する予想であるということだけ言っておこう．ここまで用意しておいて，次が主結果 2 である.

主結果 2. 予想 1，予想 2 にはいずれも反例がある．従って成立しない.

1　主結果1の証明

この章では序文で述べた主結果1の証明を与える．その前にいくつかの準備をしよう．まず $I(h,i,j,k,l)$ の基本性質について述べる．改めて断っておくが，この論文では h,i,j,k,l などは常に非負整数を表すものとする．

(i) $I(h,i,j,k,l)>0,\ I(0,0,0,0,0)=\zeta(2)$.

(ii) $I(h,i,j,k,l)=I(i,j,k,l,h)=I(j,k,l,h,i)=I(k,l,h,i,j)$
$=I(l,h,i,j,k)=I(l,k,j,i,h)=I(h,l,k,j,i)=I(i,h,l,k,j)$
$=I(j,i,h,l,k)=I(k,j,i,h,l)$.

(iii) $\min\{h+i-k,i+j-l,j+k-h,k+l-i,l+h-j\}<0$ ならば $I(h,i,j,k,l)\in\mathbb{Q}$.

(iv) $h>0,j>0$ のとき次の関係式が成り立つ．

$$I(h,i,j,k,l)=I(h-1,i,j-1,k,l)-I(h-1,i+1,j-1,k,l)\ .$$

次に言葉を導入する．5つの非負整数の組 (h,i,j,k,l) はベクトル $v=(h,i,j,k,l)\in\mathbb{N}^5$ とみなしておく．また $(0,0,0,0,0)$ はベクトルとして 0 と略記する．

定義 1. $v=(h,i,j,k,l)\in\mathbb{N}^5$ に対し，その高さ $H(v)$ を

$$H(v)=h+i+j+k+l$$

で定める．

定義 2. $v=(h,i,j,k,l)\in\mathbb{N}^5$ が非原始的であるとは，

①$h>0,j>0$　②$i>0,k>0$　③$j>0,l>0$
④$k>0,h>0$　⑤$l>0,i>0$

のどれかが成り立つことと定める．

言いかえると v が非原始的であるとは，T の作用を除いて (iv) の関係式が作れるようなものであることを意味する．v が原始的であるとは①②③④⑤のどれ1つとして成り立たないことと定める．

定義 3. $v=(h,i,j,k,l)\in\mathbb{N}^5$ が三角的であるとは，$\min\{h+i-k,i+j-l,j+k-h,k+l-i,l+h-j\}\geq 0$ であることと定める．非三角的であるとは三角的でないことと定める．

注 1. "三角的"という言葉は "三角不等式が成立するような"という意味に由来する．

以下 $v=(h,i,j,k,l)$ に対して $I(h,i,j,k,l)$ を $I(v)$ と略記する.

補題 1. $v\neq 0$ が原始的であれば，v は非三角的である．従って $I(v)\in\mathbb{Q}$.

証明. v が原始的であるとは定義から

"$h=0$ または $j=0$", "$i=0$ または $k=0$", "$j=0$ または $l=0$",
"$k=0$ または $h=0$", "$l=0$ または $i=0$"

を意味する.
一般性を失わず $h=0$ とすると,

"$i=0$ または $k=0$", "$j=0$ または $l=0$", "$l=0$ または $i=0$" .

l と i は h に関して対称だから $i=0$ としてよく，故に

$h=i=0$ かつ "$j=0$ または $l=0$" .

j と l は h,i に関して対称だから $j=0$ としてよく，故に $h=i=j=0$ となる．$v\neq 0$ より $k>0$ または $l>0$ ．従って $h+i-k<0$ または $i+j-l<0$ が成り立ち，故に v は非三角的である．後半は (iii) より明らか. □

主結果 1 の証明をはじめよう.

定理 1.1. (主結果 1 (i)) $I(v)\notin\mathbb{Q}$,すなわち $a=a_v\neq 0$ と仮定する.
このとき $\mathrm{sgn}\,(a_v)=(-1)^{H(v)}$ ($\mathrm{sgn}\,(a)$ は a の符号) .

証明. $v=(h,i,j,k,l)$ が原始的であったとする．このとき $I(v)\notin\mathbb{Q}$ であるためには補題 1 から $v=0$ でなければならない．すると (i) から $I(0)=\zeta(2)$ となり，この場合に主張は正しい.
つぎに v が非原始的であったとし，高さ $H(v)$ に関する帰納法を用いる．もし $H(v)\leq 1$ であったならば v は原始的であるか 0 だから，$H(v)\geq 2$ としてよい．一般性を失わず $h>0, j>0$ とする．上述の (iv) の関係式

$$I(h,i,j,k,l)=I(h-1,i,j-1,k,l)-I(h-1,i+1,j-1,k,l)$$

を用いれば，帰納法の仮定から

$$\mathrm{sgn}\,(a_{h-1,i,j-1,k,l})=(-1)^{h+i+j+k+l} \text{ または } 0$$
$$\mathrm{sgn}\,(a_{h-1,i+1,j-1,k,l})=(-1)^{h+i+j+k+l+1} \text{ または } 0\ .$$

$a_{h,i,j,k,l}\neq 0$ という仮定から $a_{h-1,i,j-1,k,l}$ と $a_{h-1,i+1,j-1,k,l}$ のいずれかは 0 でないから，結局 $\mathrm{sgn}\,(a_{h,i,j,k,l})=(-1)^{h+i+j+k+l}$ が示された. □

定理 1.2. (主結果 1 (ii))

$I(v) \in \mathbb{Q}$ であることと v が非三角的であるであることは同値である.

証明. 十分性は (iii) そのものであるから必要性を示す. $I(v) \in \mathbb{Q}$ と仮定しよう. (i) より $v \neq 0$ である. もし $v = (h,i,j,k,l)$ が原始的であれば補題 1 から主張がしたがう. 故に v は非原始的と仮定してよく, $h > 0, j > 0$ としてよい. また定理 1.1 と同じ議論で $H(v) \geq 2$ と仮定してよく, そこで再び $H(v)$ に関する帰納法を用いる. 再び (iv) の関係式

$$I(h,i,j,k,l) = I(h-1,i,j-1,k,l) - I(h-1,i+1,j-1,k,l)$$

を用いる. 右辺の 2 つの積分の値が同時に $\mathbb{Q}$ に属していないと仮定すると, 定理 1.1 よりその 2 つの $\zeta(2)$ の係数の値は符号が異なる. 故に $I(v) \in \mathbb{Q}$ という仮定に矛盾するので,

$$I(h-1,i,j-1,k,l) \in \mathbb{Q}, I(h-1,i+1,j-1,k,l) \in \mathbb{Q}$$

でなければならない. よって帰納法の仮定から

$$\min\{h+i-k-1, i+j-l-1, j+k-h, k+l-i, l+h-j\} < 0,$$

$$\min\{h+i-k, i+j-l, j+k-h, k+l-i-1, l+h-j\} < 0 .$$

ここで $v = (h,i,j,k,l)$ が三角的, すなわち

$$\min\{h+i-k, i+j-l, j+k-h, k+l-i, l+h-j\} \geq 0$$

と仮定すれば

$$k+l-i = 0 \text{ かつ “} h+i-k = 0 \text{ または } i+j-l = 0\text{”}$$

となり, 前者が成り立てば $l = k = 0$, 後者が成り立てば $j = k = 0$ となっていずれも $h > 0, j > 0$ に矛盾である. 故に v が非三角的であることが示せた. □

今までの結果で $a_{h,i,j,k,l}$ の符号は完全に定まったので, 次に $a_{h,i,j,k,l}$ の絶対値を決定することを考える. そこで $a_{h,i,j,k,l}$ の絶対値を

$$\omega(v) = \omega(h,i,j,k,l) = |a_{h,i,j,k,l}| = (-1)^{h+i+j+k+l} a_{h,i,j,k,l}$$

で定義する. 上述の (iv) の条件を ω を使ってかきかえると

$$\omega(h,i,j,k,l) = \omega(h-1,i,j-1,k,l) + \omega(h-1,i+1,j-1,k,l) \quad (h > 0, j > 0)$$

と足し算の形にかける. このように $v = (h,i,j,k,l)$ が非原始的なときに $\omega(v)$ を右辺のように 2 つの ω の値の和にかくことを “還元する” とよぶこ

とにし，さらに上の場合では還元を行った結果 h と j のところの値が減っているので，このような還元を “h と j による還元” あるいは “1番目と3番目による還元” とよぶことにする．

さて，還元は高さを減らしていることから還元を有限回繰り返すことで任意の $\omega(h,i,j,k,l)$ は

$$\omega(h,i,j,k,l)=\sum_{v:\text{原始的}}\beta_v\,\omega(v)\quad(\beta_v\text{は正の整数})$$

という形にかけることがわかる．これを原始的表示とよぼう．原始的表示については，次の著しい性質が成り立つ．

定理 1.3. $\omega(h,i,j,k,l)$ の還元による原始的表示は還元のとりかたによらず一意である．

証明は難しくないので割愛する．

さて，いよいよ $\omega(h,i,j,k,l)$ を具体的に計算しよう．

定理 1.4. (主結果1 (iii)) $j\geq l$ と仮定するとき

$$\omega(h,i,j,k,l)=\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}\binom{k+s}{l+h-j}\binom{h}{k-i+s}.$$

ただし2項係数 $\binom{n}{r}$ は $n<r$ または $r<0$ に対して $\binom{n}{r}=0$ と定める．

証明．簡単な場合から計算していく．

Step 1. $\omega(h,i,j,0,0)=\delta_{i0}\delta_{hj}$.

$$\omega(h,i,j,0,0)=\delta_{i0}\,\omega(h,0,j,0,0)=\delta_{i0}\delta_{hj}\,\omega(h,0,h,0,0)$$

は非三角的の条件 (iii) からすぐ出る．さらに

$$\omega(h,0,h,0,0)=\sum_{s=0}^{h}\binom{h}{s}\omega(0,s,0,0,0)$$

となることが1番目と3番目について h 回還元することでわかる．$s>0$ であれば $\omega(0,s,0,0,0)=0$ だから右辺 $=1$．以上で Step 1 が示せた．

Step 2. $\omega(h,i,0,k,0)=\dfrac{k!}{(h+i-k)!(k-h)!(k-i)!}$.

高さに関する帰納法を用いる．まず h,i,k のいずれかが 0 であるときは Step 1 から主張が成り立つことがすぐわかる．故に $h,i,k\geq 1$ とし，

$h+i+k \leq n-1$ なる h,i,k に対しては主張が成り立つと仮定する．このとき

$$\begin{aligned}&\omega(h,i,0,k,0)\\ =\ &\omega(h-1,i,0,k-1,0)+\omega(h-1,i-1,0,k-1,0)+\omega(h,i-1,0,k-1,0)\end{aligned}$$

を用いて帰納法の仮定を使って計算すれば主張がしたがう．

以上で Step 2 が示せた．

Step 3. $\omega(h,i,j,k,0)=\begin{pmatrix} h \\ h+i-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ j+k-h \end{pmatrix}.$

まず $i>k$ または $j>h$ であれば2項係数が0になるので主張が成り立つ．ゆえに $i \leq k, j \leq h$ としてよい．１番目と３番目について j 回還元し，さらに Step 2 の結果を用いることで次の式が得られる．

$$\begin{aligned}\omega(h,i,j,k,0) &= \sum_{s=0}^{j}\begin{pmatrix} j \\ s \end{pmatrix}\omega(h-j,i+s,0,k,0)\\ &= \sum_{s=0}^{j}\begin{pmatrix} j \\ s \end{pmatrix}\frac{k!}{(h+i-j-k+s)!(j+k-h)!(k-i-s)!}\\ &= \frac{k!}{(h+i-k)!(j+k-h)!(k-i)!}\\ &\qquad \cdot\sum_{s=0}^{j}\begin{pmatrix} j \\ s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h+i-k \\ j-s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k-i \\ s \end{pmatrix}\cdot(j-s)!s!\\ &= \frac{j!k!}{(h+i-k)!(j+k-h)!(k-i)!}\sum_{s=0}^{j}\begin{pmatrix} h+i-k \\ j-s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k-i \\ s \end{pmatrix}\\ &= \frac{j!k!}{(h+i-k)!(j+k-h)!(k-i)!}\begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} h \\ h+i-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ j+k-h \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

以上で Step 3 が示せた．

Step 4. $\omega(h,i,j,k,l)=\sum_{s=0}^{l}\begin{pmatrix} l \\ s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k+s \\ l+h-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k-i+s \end{pmatrix}.$

$j \geq l$ と仮定したとき，３番目と５番目について l 回還元し，さらに Step

3 の結果を用いることで次の式が得られる.

$$\begin{aligned}\omega(h,i,j,k,l) &= \sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}\omega(h,i,j-l,k+s,0)\\ &= \sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}\binom{k+s}{j+k-l-h+s}\binom{h}{h+i-k-s}\\ &= \sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}\binom{k+s}{l+h-j}\binom{h}{k-i+s}\end{aligned}$$

以上で証明が完了した. □

定理 1.1 と定理 1.4 によって $I(h,i,j,k,l)$ の $\zeta(2)$ の係数は

$$a_{h,i,j,k,l} = (-1)^{h+i+j+k+l}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}\binom{k+s}{l+h-j}\binom{h}{k-i+s}$$

とかき表された.

定理 1.4 は定理 1.2 をふくんでいる. 実際定理 1.4 の証明の中で, Step 3 の場合においては定理 1.2 をふくんでいることは容易であり, 定理 1.4 は最終的にそれを使って示してあるので結局すべての場合において定理 1.2 をふくんでいることがわかる.

2 主結果 2 の証明 (Rhin-Viola 予想とその反例)

この章では Rhin と Viola が 1996 年に提出した予想について述べ, そしてその反例を挙げる.

彼らの論文 ([8],p.37) にある通り, 超幾何関数の積分表示を用いて

$$\frac{I(h,i,j,k,l)}{h!i!j!k!l!} = \frac{I(i+j-l,l+h-j,j,k,l)}{(i+j-l)!(l+h-j)!j!k!l!}$$

となることがわかっている. ただしここでは (h,i,j,k,l) は三角的, すなわち $h+i-k, i+j-l, j+k-h, k+l-i, l+h-j$ がすべて非負であるようなものを考える.

すると 10 元集合 $\{h,i,j,k,l,h+i-k,i+j-l,j+k-h,k+l-i,l+h-j\}$ の置換 φ として

$$\varphi = (h\quad i+j-l)(i\quad l+h-j)(j+k-h\quad k+l-i)$$

を考えて, φ が積分 $I(h,i,j,k,l)$ に

$$^{\varphi}I(h,i,j,k,l) = I(i+j-l,l+h-j,j,k,l)$$

と作用していると考えると，${}^{\varphi}I(h,i,j,k,l)$ は上の式によって $I(h,i,j,k,l)$ の有理数倍となる．今まであった τ,σ も上の 10 元集合の置換に自然に拡張して

$$\tau=(h\quad i\quad j\quad k\quad l)(h+i-k\quad i+j-l\quad j+k-h\quad k+l-i\quad l+h-j)$$

$$\sigma=(h\quad k)(i\quad j)(j+k-h\quad h+i-k)(k+l-i\quad l+h-j)$$

を考えると，10 次対称群の中で φ,τ,σ は 5 次対称群と同型な部分群 Φ を生成することがわかっている．

従ってまとめると，Φ は上のような積分 $I(h,i,j,k,l)$ の集合に作用し，積分値は有理数倍になる．また T はその集合に値を不変にするように作用している．そこで彼らはこの事実の逆の成立を予想した．([8],p.43)

予想 1. h,i,j,k,l,h',i',j',k',l' が

$$I(h,i,j,k,l)=I(h',i',j',k',l')$$

をみたせば，ある $\rho\in T$ が存在して

$$\rho(h)=h',\rho(i)=i',\rho(j)=j',\rho(k)=k',\rho(l)=l'\ .$$

予想 2. (h,i,j,k,l) も (h',i',j',k',l') も三角的であると仮定する．そこで

$$\frac{I(h,i,j,k,l)}{I(h',i',j',k',l')}\in\mathbb{Q}$$

をみたせば，ある $\chi\in\Phi$ が存在して

$$\chi(h)=h',\chi(i)=i',\chi(j)=j',\chi(k)=k',\chi(l)=l'\ .$$

以下，予想の反例を挙げる．

例 1. (主結果 2) 予想 1 と予想 2 を同時に否定する例

$$\begin{aligned}
I(1,1,1,1,1)&=I(3,1,1,2,0)=5-3\zeta(2)\\
I(3,1,3,1,0)&=I(3,2,1,2,0)=\zeta(2)-\tfrac{29}{18}\\
I(3,0,3,1,1)&=I(3,3,1,2,1)=\zeta(2)-\tfrac{59}{36}\\
I(3,1,2,1,1)&=I(3,3,1,3,0)=3\zeta(2)-\tfrac{59}{12}\\
I(3,2,2,2,1)&=I(5,1,3,2,1)=10\zeta(2)-\tfrac{148}{9}\\
I(3,1,2,2,1)&=I(4,2,2,3,0)=\tfrac{79}{4}-12\zeta(2)\ .
\end{aligned}$$

T は 5 個の数字の置換でしかないから，6 つの例が予想 1 の反例となっていることは明らかである．また Φ の作用に関して高さ $H(v)=h+i+j+k+l$ が不変量であることから 2 つ目以外の例が予想 2 の反例となることがわかる．逆にいうと $I(3,1,3,1,0)$ と $I(3,2,1,2,0)$ は値が等しく，かつ高さも等しいのに Φ の作用で移らない例になっている．移らないことの証明は [8] の中にある具体的な式 (p.40) によって直接計算することで得られる．

参考文献

[1] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque 61 (1979), 11-13.

[2] F. Beukers, *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Bull. London math. Soc.11 (1979), 268-272.

[3] R. Dvornicich and C. Viola, *Some remarks on Beukers' integrals*, in: Number Theory, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 51, North-Holland, 1987, 637-657.

[4] M. Hata, *Legendre type polynomials and irrationality measures*, J. Reine Angew. Math. 407 (1990), 99-125.

[5] M. Hata, *A note on Beukers' integral*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 58 (1995), 143-153.

[6] M. Hata, *A new irrationality measure for $\zeta(3)$*, Acta Arithmetica XCII.1 (2000), 47-57.

[7] G. Rhin and C. Viola, *On the irrationality measure of $\zeta(2)$*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), 85-109.

[8] G. Rhin and C. Viola, *On a permutaion group related to $\zeta(2)$*, Acta Arithmetica LXXVII.1 (1996), 23-56.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, KOMABA, MEGURO, TOKYO 153-8914, JAPAN
E-mail address: ayame@318uo.ms.u-tokyo.ac.jp