数理解析研究所講究録 1277 巻 2002 年 78-83

Characterization of the interpolating sequences on a certain plane domain

大同工業大学　成田淳一郎　(Junichiro Narita)
Daido Institute of Technology

1. 序

複素平面 $\mathbb{C}$ の開集合 D に対し, D 上の有界正則関数の全体を $H^\infty(D)$, その極大イデアル空間を $\mathcal{M}(D)$ と表す。また, D 上の有界調和関数の全体を $h^\infty(D)$ と表す。

$\{z_j\}$ を D 内の点列とする。任意の有界数列 $\{a_j\}$ に対して

$$f(z_j) = a_j \quad (j = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

をみたす関数 $f \in H^\infty(D)$ が存在するとき, $\{z_j\}$ は補間点列 (または $H^\infty(D)$-補間点列) であると言う。同様に (1) をみたす関数 $f \in h^\infty(D)$ が存在するとき, $\{z_j\}$ は調和補間点列 (または $h^\infty(D)$-補間点列) であると言う。

単位円板 $\Delta = \{|z| < 1\}$ に対しては, Carleson [2] により Δ 内の点列 $\{z_j\}$ が補間点列であるための必要十分条件が

$$\inf_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_k z_j} \right| > 0 \tag{2}$$

であることが示されている。さらに単位円板に対しては, Garnett [6] により補間点列であることと調和補間点列であることが同値であることが示されている。

$X \subset \mathcal{M}(D)$ に対し,

$$I_X = \{f \in H^\infty(D) : \hat{f} = 0 \text{ on } X\}, \tag{3}$$

$$\mathrm{hull}(X) = \{x \in \mathcal{M}(D) : \hat{f}(x) = 0 \text{ for all } f \in I_X\} \tag{4}$$

D が有界開集合のとき, 座標関数 $Z(z)=z$ が $H^\infty(D)$ に含まれ, その Gelfand 変換 $\hat{Z}$ は $\mathcal{M}(D)$ から $\overline{D}$ の上への連続写像になり, $\hat{Z}^{-1}(D)$ 上単射である。$\hat{Z}^{-1}(D)$ を D と同一視することにより, $D \subset \mathcal{M}(D)$ とみなす。D が有界でないときも, $\hat{Z}$ の代わりになる $\mathcal{M}(D)$ から $\overline{D} \subset \hat{\mathbb{C}}$ への連続写像が存在し ([4, p.86]), 同様に $D \subset \mathcal{M}(D)$ とみなす。以下の定理で D 内の点列の閉包は $\mathcal{M}(D)$ で考えている。

一般の Banach algebra に対して成り立つ定理として次が知られている。

定理 1 ([8, p.205]) D 内の点列 $S=\{z_j\}$ が補間点列であるための必要十分条件は次の 3 つの条件を満たすことである : (i) S は離散集合である。(ii) $\overline{S}$ が S の Čech コンパクト化と同相である。(iii) $\mathrm{hull}(S)=\overline{S}$ である。

[8] の証明を読むと定理 1 は次のように表すことも出来ることが分かる。

定理 1′ D 内の点列 $S=\{z_j\}$ が補間点列であるための必要十分条件は次の 2 つの条件を満たすことである : (i) $S_1 \subset S$, $S_2 \subset S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ なら $\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 = \emptyset$ である。(ii) $\mathrm{hull}(S)=\overline{S}$ である。

特に単位円板 $\Delta=\{|z|<1\}$ に対しては, (ii) のみから補間点列が従うことが知られている。

定理 2 ([7, p.422]) Δ 内の点列 $S=\{z_j\}$ が補間点列であるための必要十分条件は次の条件を満たすことである : $S_1 \subset S$, $S_2 \subset S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ なら $\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 = \emptyset$ である。

2. 一般の平面領域

ここでは, これらの単位円に対する結果を一般の平面領域において考察する。

$\mathbb{C}\backslash D$ が 2 点以上からなるとき, D の普遍被覆面は単位円板 Δ となる。その被覆写像を $\pi:\Delta \to D$ とし, Δ 上の Poincaré distance を λ_Δ と表す。D に対する Poincaré distance $\lambda=\lambda_D$ は,

$$\lambda(a,b)=\inf\{\lambda_\Delta(c,d):\pi(c)=a,\pi(d)=b\} \tag{5}$$

により定義される。$\rho=\left(e^\lambda-1\right)/\left(e^\lambda+1\right)$ とおく。これは $D=\Delta$ のときは pseudo-hyperbolic distance $\rho(a,b)=|(a-b)/(1-a\bar{b})|$ と一致している。

平面領域 D と D 内の点列 $S=\{z_j\}$ に対し, 以下の性質を考える。D が単位円板の時には, D 内の点列に対しこれらの条件は同値であった。

(ip) S は補間点列である。

(hi) S は調和補間点列である。

(s) $S_1 \subset S$, $S_2 \subset S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ なら $\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 = \emptyset$ である。

(δ) $\delta = \delta(\{z_j\}; D) = \inf_k \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{\infty} \rho(z_j, z_k) > 0$

補間点列なら調和補間点列であるが, 一般の平面領域では, 両者が一致しない例も知られている。([6], [1], [10])。即ち, (ip)$\Rightarrow$(hi) であるが, (hi)$\not\Rightarrow$(ip) である。また定理 1′ より (ip)$\Rightarrow$(s) である。他にわかっていることとして, [9, Theorem 2] で (ip)$\Rightarrow$(δ) が示されているが, 同様の証明で (hi)$\Rightarrow$(δ) であることもわかる。

(δ)$\not\Rightarrow$(hi) を示す例：$D = \Delta\backslash 0 = \{0 < |z| < 1\}$ とする。D 内の点列 $\{z_j\}$ を原点に収束するようにとると, 逆像 $\pi^{-1}(z_j)$ は単位円周の 1 点に収束する。z_j を十分早く原点に近づけることにより, $\rho(z_j, z_k)$ はいくらでも 1 に近い値をとるように出来るので, (δ) をみたすように取ることも出来る。一方, 1 点 $\{0\}$ は $h^\infty(D)$ に対する除去可能な特異点であるから, $\{z_j\}$ は $h^\infty(D)$-補間点列になり得ない。

(hi)$\not\Rightarrow$(s) を示す例：(hi)$\not\Rightarrow$(ip) を示す例のいくつかは, そのまま (hi)$\not\Rightarrow$(s) を示す例にもなっている。ここでは, ((hi)$\not\Rightarrow$(ip) を示す例としても) やや一般化した形で述べる。$\mathcal{M}(D)$ の $\zeta \in \mathbb{C}$ 上のファイバーを $\mathcal{M}_\zeta(D)$ と表す。D が有界の時は $\mathcal{M}_\zeta(D) = \mathcal{M}(D) \cap \hat{Z}^{-1}(\zeta)$ である。また一般に $E \subset \mathcal{M}(D)$ に対し, E 上 $\hat{f} = 1$, $\mathcal{M}(D)\backslash E$ 上 $|\hat{f}| < 1$ をみたす $f \in H^\infty(D)$ が存在するとき, E は peak set であると言われる。

定理 3 D を $\mathbb{C}$ の領域とする。D の境界点 ζ で, ζ は Dirichlet 問題に関する正則境界点であるが, $M_\zeta(D)$ が peak set でない点が存在するとする。このとき, D 内の ζ に収束する点列 $S = \{z_j\}$ で, 調和補間点列であるが条件 (s) をみたさないものが存在する。

［証明］$\mathcal{M}_\zeta(D)$ が peak set でないとき, D 内の ζ に収束する点列 $\{z_j\}$ を, $\mathcal{M}_\zeta(D)$ 内の distinguished homomorphism と呼ばれるある元 ψ に $(H^\infty(D))^*$ のノルムで収束するように取ることが出来る ([5, Section 5])。ζ が Dirichlet 問題に関する正則境界点であることから, $\{z_j\}$ の部分列 $S = \{z_{j_k}\}$ を $h^\infty(D)$-補間点列であるように選ぶことが出来る ([10, 定理 3.1] の証明参照)。$S_1 \subset S$, $S_2 \subset S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ を S_1, S_2 が共に無限集合になるように取ると, $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ が共に ψ を含むので $\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \neq \emptyset$ となり, S は性質 (s) をみたさない。［証明終］

一般の平面領域に関してこれ以外の包含関係はわかっていない。特に, (s)$\Rightarrow$(ip) は成り立つか？また, この答えが no であるとして, (s)$\Rightarrow$(hi) は成り立つか？を今後考えたい。

3. ある種の平面領域

ここでは, 次の条件をみたす平面領域を考察する。

(G) D は有界領域で, D の補集合 $\mathbb{C}\backslash D$ の各成分の直径の下限が正, 即ち $\inf\{\mathrm{diam}(E) : E$ は $\mathbb{C}\backslash D$ の成分$\} > 0$ をみたす。

(G) をみたす平面領域 D 内の点列に対して, (ip)$\Leftrightarrow$(ρ) であることは, [9, Theorem 2] で示されている。一般に (ip)$\Rightarrow$(hi)$\Rightarrow$(ρ) であったから, (G) をみたす平面領域 D 内の点列に対して, (ip), (hi), (ρ) の 3 条件は同値となる。さらに次のことも成り立つ。

定理 4 平面領域 D が (G) をみたすとき, D 内の点列 S に対して, 「$S_1 \subset S$, $S_2 \subset S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ なら $\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 = \emptyset$」が成り立てば, S は補間点列である。

証明には次の 2 つの局所化定理を用いる。

定理 5 ([3]) D, U を 有界開集合とする。$\Phi : \mathcal{M}(D \cap U) \to \mathcal{M}(D)$, を

$$\Phi(\varphi)(f) = \varphi(f|_{D\cap U}) \quad \big(\varphi \in \mathcal{M}(D \cap U),\ f \in H^\infty(D)\big)$$

と定義すると, Φ は $\mathcal{M}(D \cap U) \cap \hat{Z}^{-1}(U)$ を $\mathcal{M}(D) \cap \hat{Z}^{-1}(U)$ の上に同相に写す。

定理 6 ([9, Theorem 1]) D を複素平面 $\mathbb{C}$ の有界開集合, $S = \{z_j\}$ を D 内の点列とする。任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して ζ のある近傍 U が存在して $S \cap U$ が $H^\infty(D \cap U)$-補間点列であれば, S は $H^\infty(D)$-補間点列である。

［定理 4 の証明］ まず D の各成分が単連結領域の場合を示す。定理の仮定, 結論共に等角写像により不変であるから,

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{z : \frac{1}{n+1} < \mathrm{Re}\, z < \frac{1}{n},\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 1\Big\}$$

としてよい。

$$U_1 = \{z : 0 < \mathrm{Re}\, z < 1,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 1/5\},$$
$$V_1 = \{z : 0 < \mathrm{Re}\, z < 1,\ 2/5 < \mathrm{Im}\, z < 1\},$$
$$U_2 = \{z : 0 < \mathrm{Re}\, z < 1,\ 4/5 < \mathrm{Im}\, z < 1\},$$
$$V_2 = \{z : 0 < \mathrm{Re}\, z < 1,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 3/5\}$$

とおく。$S \cap V_1$ が $H^\infty(D \cup U_1)$-補間点列であることを示す。S_1, S_2 を $S \cap V_1$ の互いに交わらない部分列とする。仮定より $\mathcal{M}(D)$ 内では $\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 = \emptyset$ であるが, このことと

定理5により $\mathcal{M}(D\cup U_1)$ 内でも $\overline{S}_1\cap\overline{S}_2=\emptyset$ であることがわかる。ここで $D\cup U_1$ は単連結領域であるから, 定理2より $S\cap V_1$ は $H^\infty(D\cup U_1)$-補間点列であり, よってまた $H^\infty(D\cap V_1)$-補間点列でもある。同様に $S\cap V_2$ が $H^\infty(D\cap V_2)$-補間点列であることも示されるので, 定理6により S は $H^\infty(D)$-補間点列である。

次に D が (G) をみたす一般の平面領域の時を示す。$\inf\{\mathrm{diam}(E):E$ は $\mathbb{C}\backslash D$ の成分$\}=\varepsilon$ とし, 任意の $\zeta\in\mathbb{C}$ に対し, $U=\{|z-\zeta|<\varepsilon/2\}$ とおくと, $D\cap U$ の各成分は単連結である。S_1, S_2 を $S\cap U$ の互いに交わらない部分列とする。仮定より $\mathcal{M}(D)$ 内で $\overline{S}_1\cap\overline{S}_2=\emptyset$ である。定理5の写像を $\Phi:\mathcal{M}(D\cap U)\to\mathcal{M}(D)$ とおく。もし, $\mathcal{M}(D\cap U)$ 内に点 $p\in\overline{S}_1\cap\overline{S}_2$ が存在すれば, Φ の連続性より $\mathcal{M}(D)$ 内でも $\Phi(p)\in\overline{S}_1\cap\overline{S}_2$ となり, 矛盾が生じるので, $\mathcal{M}(D\cap U)$ 内でも $\overline{S}_1\cap\overline{S}_2=\emptyset$ である。よって先の D の各成分が単連結のときの結論より $S\cap U$ は $H^\infty(D\cap U)$-補間点列であり, 定理6により S は $H^\infty(D)$-補間点列である。[証明終]

これにより, 条件 (G) をみたす平面領域 D 内の点列に対して, (ip), (hi), (ρ), (s) の4条件は全て同値となる。なお条件 (G) は, 複素平面の球面距離を考えることにより次の条件に置き換えてもよい。この場合も4条件が全て同値になることがほぼ同様に示される。

(G′) D は $\hat{\mathbb{C}}$ の領域で, D の補集合 $\mathbb{C}\backslash D$ の各成分の 球面距離による直径の下限が正である。

(ip)⇔(hi) が成り立つ領域の例としては, この他にも Behrens [1] において, ある条件を満たす Zalcman 領域の中で, (ip)⇔(hi) が成り立つための必要十分条件が示されている。より一般に (ip), (hi), (ρ), (s) の4条件 (の適当な2つ) が同値になるための平面領域の条件を今後考えたい。

参考文献

[1] M. Behrens, *Interpolation and Gleason parts in L-domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **286** (1984), 203–225.

[2] L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math. **80** (1958), 921–930.

[3] T. Gamelin, *Localization of the corona problem*, Pacific J. Math. **34** (1970), 73–81.

[4] ———, *Lectures on $H^{\infty}(D)$*, Univ. Nacional de la Plata, Argentine, 1972.

[5] T. Gamelin and J. Garnett, *Distinguished homomorphisms and fiber algebras*, Amer. J. Math. **92** (1970), 455–474.

[6] J. Garnett, *Interpolating sesquences for bounded harmonic functions*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1971), 187–192.

[7] ———, *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York, 1981.

[8] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[9] J. Narita, *Interpolating sesquences on plane domains*, Kodai Math. J. **13** (1990), 311–316.

[10] ———, *Interpolating sequenced on plane domains with hyperbolically rare boundary*, 数理解析研究所講究録 **1137** (2000), 71–78.