数理解析研究所講究録 1280 巻 2002 年 56-59

楕円差分 Painlevé 方程式と楕円超幾何級数

坂井 秀隆　　東大数理

1 はじめに

この講演は, 村田実貴生, 米田仁両氏 (東大数理) との共同研究に基づいております. といっても, ここでは得られた結果の話ではなくて, 私の個人的な問題提起の話をしたいと思います. つまり, 楕円超幾何級数というのは, 既に得られてしまったものではなくて, これからこういうものが得られるのではないかという期待に過ぎないわけです.

2 関数と方程式

常微分方程式の授業をやっていて, Newton のやったことというような題で話をしました. Kepler が既に惑星の運動を正しく記述していて, Newton がやったのはそれを法則の形で記述しなおしたことだという話です. これを数学の言葉で見ると関数に対して, 微分方程式を与えるということになるわけです.

運動/関数 $\Longleftrightarrow$ 法則/(微分) 方程式

微分方程式という領域では, 与えられた方程式を解くということだけが問題なのではなくて, いろいろな視点や記述方式をどのように結びつけるかということも頭のすみに置いて欲しいということを言ったわけです.

さて, 私がはじめて超幾何微分方程式を目にしたのは, 神保道夫先生の常微分方程式概論の授業でした. そのときの話の筋は, 方程式の特異点の分類から, 確定特異点が三つの微分方程式は Gauss の超幾何方程式に帰着できるというものでした.[1] これは方程式から関数へという視点です.

しかし, きちんと調べたわけではないのですが, 歴史的にはこれは逆のように見えます. 超幾何級数が与えられたとき, それが満たす微分方程式を導くのはより見やすいものとなっています. 巾級数 $F\left({\alpha,\beta \atop \gamma};z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k(1)_k}z^k$ に対して, 係数 $a_k=\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k(1)_k}$ の満たす簡単な式

$$(k+1)(k+\gamma)a_{k+1}-(k+\alpha)(k+\beta)a_k=0$$

から, 級数の満たす微分方程式が分かるというものです. 実際, Euler 作用素 $\delta=z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ の多項式 $S(\delta)$ の z^k への作用が

$$S(\delta)z^k=S(k)z^k$$

[1] この視点で差分超幾何系を特徴づけるという理論を, 私は寡聞にして聞いたことがありません. たとえば, (問題 1) q-超幾何関数に帰着できる二階線形 q-差分方程式はどのようなクラスをなしているか. 特徴づけよ.

と書けることから,

$$[\delta(\delta+\gamma-1)-z(\delta+\alpha)(\delta+\beta)]\quad F\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};z\right)=0$$

がわかります ([4] 等).

こちらの方の視点は q-超幾何でも同様でして, q-超幾何の満たす二階線形 q-差分方程式 (Heine の方程式) は, Gauss の方程式をそのまま q-差分化したと見るよりは (もちろんそう見ることもできますが), 級数の q-アナログが満たす方程式と思った方がしっくりきます.[2]

3 楕円差分 Painlevé 方程式

もともと私は, 非線形の常微分方程式である Painlevé 方程式を幾何的に特徴づけようというような話をやっていたのですが, そちらの方でごく自然に三つの差分系のクラスが現れることが分かりました [3]. これらは楕円曲線の退化に対応していて, それぞれ楕円的, 乗法的, 加法的な群の作用から, 楕円差分, q-差分, 差分と呼ぶ離散力学系をなします. ここで今回の話につながるのは, そうして得られた離散 Painlevé 方程式の特殊解として, q-超幾何級数や Gauss の超幾何級数で記述できるものが現れるからです. それでは残りのクラスである楕円差分の場合, 超幾何級数の知られていない拡張が得られるのではないかと考えるのは自然だと思います. まず, もともとの非線形の差分方程式である楕円差分 Painlevé 方程式を見てみましょう.[3] たくさんある離散 Painlevé 方程式の中で楕円型に分類されるのはこれ一つで, その他の全てのクラスの離散 Painlevé, さらには Painlevé 常微分方程式は全てこの方程式の退化として得られます.

$$\mathrm{ell}.P\ :\ (x(s+p):y(s+p):z(s+p))=P_{(\hat{\theta_4},\hat{\theta_5},\hat{\theta_6})}\circ P_{(\check{\theta_7},\check{\theta_8},\check{\theta_9})}\circ P_{(\tilde{\theta_4},\tilde{\theta_5},\tilde{\theta_6})}\circ P_{(\theta_1,\theta_2,\theta_3)}(x(s):y(s):z(s)), \tag{1}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
p=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{9}a_i,\qquad \theta_i&=2s+a_i\ \ (i=1,2,3),\qquad \tilde{\theta_j}=s+a_j+\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)\ \ (j=4,5,6),\\
\check{\theta_k}&=2s+a_k+\frac{2}{3}(a_1+a_2+a_3)+\frac{1}{3}(a_4+a_5+a_6)\ \ (k=7,8,9),\\
\hat{\theta_j}&=s+a_j-\frac{2}{3}(a_4+a_5+a_6)+p\ \ (j=4,5,6),
\end{aligned}\tag{2}$$

---

[2]同様のことを, q-差分ではなく, 普通の差分でできないかということを神保先生や青本先生に聞いたところ, それは普通の超幾何級数になるはずだと言われ納得できなくていろいろ計算したことがあるのですが, 結論はやはり両先生が正しかったということで納得しました. 級数の和のところを積分に変えることで超幾何の積分表示のようなものがでてきて, 似たような議論で超幾何の接続関係式がでてきました.

[3]東大数理の村田実貴生氏の計算で, より見やすい形に書き換えられることが分かっています.

$$
\begin{aligned}
P_{(\alpha,\beta,\gamma)}(x:y:z) &= L_{\alpha,\beta,\gamma}(x:y:z)\begin{pmatrix} l_{0,\beta,\gamma}\cdot l_{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},\frac{-2\alpha+\beta-2\gamma}{3},\frac{-2\alpha-2\beta+\gamma}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & l_{0,\gamma,\alpha}\cdot l_{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},\frac{-2\alpha-2\beta+\gamma}{3},\frac{\alpha-2\beta-2\gamma}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & l_{0,\alpha,\beta}\cdot l_{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},\frac{\alpha-2\beta-2\gamma}{3},\frac{-2\alpha+\beta-2\gamma}{3}} \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot\begin{pmatrix} \wp(\frac{\alpha-2\beta-2\gamma}{3}) & \wp'(\frac{\alpha-2\beta-2\gamma}{3}) & 1 \\ \wp(\frac{-2\alpha+\beta-2\gamma}{3}) & \wp'(\frac{-2\alpha+\beta-2\gamma}{3}) & 1 \\ \wp(\frac{-2\alpha-2\beta+\gamma}{3}) & \wp'(\frac{-2\alpha-2\beta+\gamma}{3}) & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3) \\
L_{\alpha,\beta,\gamma}(x:y:z) &= \begin{pmatrix} l_{\gamma,\alpha}(x:y:z)\cdot l_{\alpha,\beta}(x:y:z) : l_{\alpha,\beta}(x:y:z)\cdot l_{\beta,\gamma}(x:y:z) : \\ : l_{\beta,\gamma}(x:y:z)\cdot l_{\gamma,\alpha}(x:y:z) \end{pmatrix}, \\
l_{\alpha,\beta}(x:y:z) &= \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ \wp(\alpha) & \wp'(\alpha) & 1 \\ \wp(\beta) & \wp'(\beta) & 1 \end{pmatrix}, \qquad l_{\alpha,\beta,\gamma} = \det\begin{pmatrix} \wp(\alpha) & \wp'(\alpha) & 1 \\ \wp(\beta) & \wp'(\beta) & 1 \\ \wp(\gamma) & \wp'(\gamma) & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

4 特殊解を記述する線形方程式

この離散力学系は射影平面上の時間発展を記述しているわけですが，これを楕円曲線上に制限してやると，そこでは運動が自明に見えます．これから特殊解を作ることができます。

定理 1 (村田-坂井-米田) 楕円曲線 $y^2z = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3$ は，ell.P の時間発展で不変に保たれ，さらに

$$(x:y:z) = (\wp(\theta) : \wp'(\theta) : 1),$$

は，ell.P の解となる．ここで $\theta = \frac{3s^2}{p} + \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{p} - 1\right)s + \alpha$ であり，α は任意定数．

これは任意の a_i について存在する解ですが，これとは別に a_i たちが特別の関係にあるとき，線形差分方程式の解を使って特殊解を構成できます．

定理 2 (村田-坂井-米田) [4] 条件 $a_1 + a_4 + a_7 = 0$ を満たすとき，ell.P は特殊解

$$\left(\frac{x(s)}{z(s)}, \frac{y(s)}{z(s)}\right) = \left(\frac{v_1(s)}{v_2(s)}, \frac{\{\wp'(a_4-s) - \wp'(a_7-s)\}v_1(s) + \{\wp(a_4-s)\wp'(a_7-s) - \wp(a_7-s)\wp'(a_4-s)\}v_2(s)}{\{\wp(a_4-s) - \wp(a_7-s)\}v_2(s)}\right)$$

をもつ．ここで $v_1(s)$ と $v_2(s)$ は次の線形方程式の解．

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_1(s+p) \\ v_2(s+p) \end{pmatrix} &= U_{\overline{\theta_1},\overline{\theta_7}} D^{\hat{\theta_4},\hat{\theta_5},\hat{\theta_6}}_{\hat{\theta_1},\hat{\theta_7}} U^{-1}_{\hat{\theta_1},\hat{\theta_7}} U_{\hat{\theta_1},\hat{\theta_4}} D^{\check{\theta_7},\check{\theta_8},\check{\theta_9}}_{\check{\theta_1},\check{\theta_4}} U^{-1}_{\check{\theta_1},\check{\theta_4}} U_{\check{\theta_1},\check{\theta_7}} \\
&\quad D^{\tilde{\theta_4},\tilde{\theta_5},\tilde{\theta_6}}_{\tilde{\theta_1},\tilde{\theta_7}} U^{-1}_{\tilde{\theta_1},\tilde{\theta_7}} U_{\tilde{\theta_4},\tilde{\theta_7}} D^{\theta_1,\theta_2,\theta_3}_{\theta_4,\theta_7} U^{-1}_{\theta_4,\theta_7} \begin{pmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \end{pmatrix}, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$U_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \wp(\alpha) & \wp(\beta) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D^{\alpha,\beta,\gamma}_{\delta,\epsilon} = \mathrm{diag}\left(\frac{\sigma(\delta-\beta)\sigma(\delta-\gamma)\sigma(\delta+\Box)^3}{\sigma(\delta)^3}, \frac{\sigma(\epsilon-\beta)\sigma(\epsilon-\gamma)\sigma(\epsilon+\Box)^3}{\sigma(\epsilon)^3}\right),$$

[4]これも村田実貴生氏の修士論文において，より簡明な形に書き換えられました．

$$\square = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

ここで現れた線形差分方程式 (5) は, q-超幾何級数の満たす Heine の方程式や, Gauss の超幾何方程式を退化極限として持ちます. そこで, 超幾何の方程式, 級数, 積分表示といった一連のセッティングをこのような方程式まで一般化できないかということになるのです.

5 いろいろな問題

級数から方程式へ 超幾何級数や q-超幾何級数の場合, 級数からそれが満たす方程式を構成するのは非常に簡単だったわけです. それではより一般の場合である楕円差分の場合, このような構成がどうなっているのかということは興味のある話題です. [5]

方程式の特徴づけ 超幾何のとき, 確定特異点が三つというのが方程式の特徴づけになりました. 同様なことの差分理論は q の場合についても私は知りません. 似たようなことがあれば便利なのですが.

接続問題 線形 q-差分方程式は $x=0$ と $x=\infty$ にのみ分岐点を持ち, 両者の近傍で定義された級数解の間に, テータ関数で記述される接続行列が定義される. Fuchs 型微分方程式のモノドロミー行列と同様に, 一般化された Riemann 問題を考えることができる [1] が, このような理論は楕円差分の場合はどうなっているのだろうか.

諸公式集の作成 超幾何の場合の積分表示の類似, 隣接関係式, 特殊値の計算など.

参考文献

[1] G. D. Birkhoff, The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations, *Proc.Am.Acad.Arts and Sciences*, **49** (1914) 521–568.

[2] G. Felder, V. Tarasov and A. Varchenko, Monodromy of solutions of the elliptic quantum Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard difference equations, *Interna. J. Math.* **10** (1999) no.8, 943–975.

[3] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, *Commun. Math. Phys.* **220** (2001) 165–229.

[4] 高野恭一, 常微分方程式, 朝倉書店 (1994)

[5] 表現論の方で KZ 方程式の楕円差分化のようなことが考えられていて, これの形式的級数表示のようなものは得られている [2] ということを神保先生から教えていただきました.