

パターン形成と Max Plus 方程式

新沢 信彦 (都立大理) 志田 篤彦 高橋 大輔 (早稲田大理)

*N. Shinzawa, **A. Shida, **D. Takahashi

* Department of Physics, Tokyo Metropolitan University

** Department of Mathematical Sciences, Graduate School of Science And Engineering, Waseda University

1 はじめに

Max Plus 方程式は、足し算と掛け算の代わりに、Max と Plus だけで記述できるような、独立変数についても従属変数についても差分的な方程式である [6]。これらの方程式はもともと、無限個のソリトンを持つような cellular automaton (CA) の研究を通じて発見された方程式である。CA のルールを一つの方程式で表すことが出来るので、Max Plus 方程式を使うと、CA を見通し良く研究することが出来る。実際、従属変数が連続な差分可積分方程式で特別な極限を取ることで、Max Plus 方程式が得られ、このようにして差分可積分方程式と可積分な CA の深い関係が明らかにされている。一旦、このように Max Plus 方程式が発見されると、可積分でない他の CA に対しても、同じ手法を使えないかという期待が生じる。

一方で、ある種の化学反応や、神経パルス波、生物の競合などを表す系では、化学物質の濃度の違いなどが作る特徴的なパターンが、空間内に形成されることが知られている [2, 3, 4, 5]。現れるパターンは、ある点での振動が周囲に伝わって出来る同心円状のパターン (ターゲット)、一点に加えられた刺激が周囲に伝わる事で出来る円 (トリガー)、回転する渦巻き状のパターン (スパイラル) の三種類である。これらの系に共通する性質は、まず、化学物質の種類などを表す 2 種類以上の従属変数があり、それらの従属変数が非線形の相互作用をする事、更に、ある成分が空間内に局在しているも、時間と共にそれが拡散する事の 2 点である。このような性質から、これらの系は反応拡散系と呼ばれている。但し、"非線形の相互作用" はなんでも良いわけではなく、パターンが形成されるためにはある条件が満たされなければならない。例えば 2 つの従属変数 "U, V" をふくむ反応拡散系は次のようではなければならない。

- U は U を増やす
 - U は V を増やす
 - V は U を減らす
- (1)

そこでこの研究では、このような反応拡散系の性質を持つ、3 種類の Max Plus 方程式 2 成分の反応拡散系に相当するモデル

$$\begin{aligned} UT &= \text{Max}(\tilde{U}, U, V) - V \\ VT &= U \end{aligned} \tag{2}$$

ドメインを構成するモデル

$$\begin{aligned} UT &= \text{Max}(\tilde{U}, U, V) - V \\ VT &= \text{Max}(\tilde{V}, U, V) - U \end{aligned}$$

3 種共存モデル

$$\begin{aligned}
 UT &= \text{Max}(\tilde{U}, U, V) - V \\
 VT &= \text{Max}(\tilde{V}, V, W) - W \\
 WT &= \text{Max}(\tilde{W}, W, U) - U
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

を取り上げ、これらの方程式でどのようなパターンが生成されるのか、それらのパターンはどのような仕組みで生成されるのかを明らかにしたい。

2 2成分の反応拡散系に相当するモデル

さて、反応拡散方程式とは2個以上の成分が(1)のような仕方で相互作用し、かつ拡散項を含んでいるような方程式の事であった。そこでまず、2つの従属変数 U, V を含む、次のような Max Plus 方程式を考えてみたい [1]。

$$\begin{aligned}
 UT &= \text{Max}(\tilde{U}, U, V) - V \\
 VT &= U
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

ここで、 U は一つの時間変数 t と 2つの空間変数 i, j による従属変数で、 UT は時間を一つ進めると言うことを略記した記号、 \tilde{U} は点 (i, j) の最隣接点での U の値を集めたものである。

$$\begin{aligned}
 U &= U_{i,j}^t, \quad UT = U_{i,j}^{t+1} \\
 \tilde{U} &= (U_{i+1,j}^t, U_{i,j+1}^t, U_{i-1,j}^t, U_{i,j-1}^t)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

この方程式は、従属変数の値が1,0だけで閉じている cellular automaton であり、ある時刻にある点で $U = 1$ であると、次の時刻にその最隣接点でも $U = 1$ となるので、この方程式は拡散的な性質も持っていることが分かる。更に、 U は拡散項を通じて U 自身を増やし、 U は2番目の式を通じて V を増やし、 V は U を減らすので、 U, V は条件(1)も満足している。

そこで、適当な初期値を選んでシミュレーションして見た結果、この方程式はターゲット、トリガー、スパイラルの全てのパターンを生成する事が分かった(図5, 3, 4)。どの様な仕組みでこれらのパターンが生成されるのだろうか。

一様解の解析

偏微分反応拡散方程式の場合には、どのようなパターンが生成されるかは、一様解の従属変数の空間での軌道にどのような物があるかによって、決定される事が知られている。一点で起こった”一様解”の振舞が、周囲に伝搬することによってパターンが形成されるからである。そこでまず、(5)式の持つ一様解について調べて見ることにしよう。

一様解を表す方程式は、(5)式で U が i, j に寄らないとする事で得られる、次の方程式である。

$$\begin{aligned}
 UT &= \text{Max}(U, V) - V \\
 VT &= U
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

この方程式は2階の常差分方程式で、 U, V 共に1,0の二つの値しか取らないので、解を求めるのは

簡単である。実際に調べてみると、 U, V の空間での解の軌道は、

$$\begin{array}{l} U: 1 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \dots \\ V: 0 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \dots \end{array} \quad (8)$$

のただ一つしかないことが分かる。これでは $U = V = 0$ という定常解に、すべての解が行き着くので、図4のトリガーを表す解しか説明できない。

そこで振り返って考えてみると、(5)式で、 U は拡散項を通じて自分自身を増やしていた。一樣解を考えると言うことは、ある一点のみに U, V を制限するのと同じであるので、拡散項を通じて自分自身を増やすという効果を捉えることが出来ない。最隣接点との相互作用も考えながら”一樣解の解析”をしなければ、全ての非線形効果を探り入れた事にはならないのである。幸いな事に今の場合、周期境界条件を課して2個の点での U, V の値を残しても、2個の点の外で $U = V = 0$ という境界条件を課して U, V の値を残しても、 U, V の満たす方程式は同じになり、 $U_{i,j} = U_1, U_{i+1,j} = U_2$ と置くと次の式を得る。

$$\begin{aligned} UT_1 &= \text{Max}(U_1, U_2, V_1) - V_1 \\ VT_1 &= U_1 \\ UT_2 &= \text{Max}(U_1, U_2, V_2) - V_2 \\ VT_2 &= U_2 \end{aligned} \quad (9)$$

この方程式の、 U_1, V_1, U_2, V_2 の空間での解の軌道を調べてみると、一樣解の(8)が周囲に伝搬して行く様子を表す軌道、

$$\begin{array}{l} U_1 \ U_2 : 0 \ 1 \rightarrow 1 \ 1 \rightarrow 1 \ 0 \rightarrow 0 \ 0 \rightarrow 0 \ 0 \\ V_1 \ V_2 : 0 \ 0 \rightarrow 0 \ 1 \rightarrow 1 \ 1 \rightarrow 1 \ 0 \rightarrow 0 \ 0 \end{array} \quad (10)$$

の他に、次の様な周期解の軌道

$$\begin{array}{l} 1 \ 0 \rightarrow 0 \ 1 \rightarrow 0 \ 1 \rightarrow 1 \ 0 \rightarrow 1 \ 0 \\ 1 \ 0 \rightarrow 1 \ 0 \rightarrow 0 \ 1 \rightarrow 0 \ 1 \rightarrow 1 \ 0 \end{array} \quad (11)$$

もあることが分かった。ターゲットパターンの中心とその最隣接点での U, V の振舞を見てみると、 U, V はまさしく今得られた軌道をめぐっていることが観察出来る。この様にしてもこの手法を拡張することによって、”一樣解の解析”という意味では、ターゲットを表す解とトリガーを表す解の両方を説明できる事が分かった。

パルス的な進行波

そこで問題となるのは、いかにして一点で起こったこの様な振舞が、周囲に伝搬するのかである。もし考えている方程式が微分方程式であったなら、動径方向へのリダクションを通じて方程式の次元を一つ減らす事が出来た。しかし、考えている方程式が差分方程式の場合には、そのようなリダクションは一般には出来ない。差分方程式では、図1からも分かるように、角の所と辺の所で最隣接点のかかわりあい方が異なってしまうからである。所が今の場合、最隣接点での U の値は一つの Max の中に入っているの、この違いは解消出来、図1に示した線上で U, V は一定とする事が出来る。この結果、動径方向の座標を r と置いて、次の方程式を得る。

$$U_r^{t+1} = \text{Max}(U_{r+1}^t, U_r^t, U_{r-1}^t, U_r^{t-1}) - U_r^{t-1} \quad (12)$$

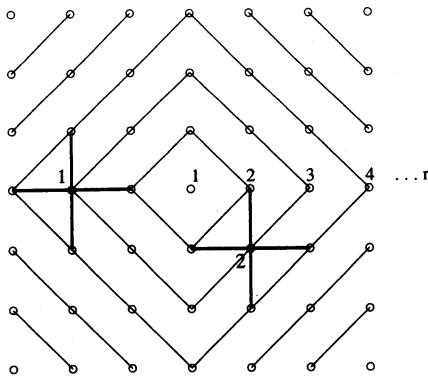


図 1: ターゲットパターン

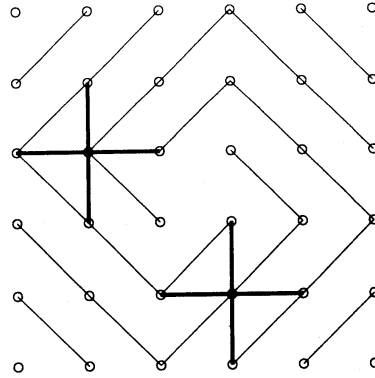


図 2: スパイラル

更に、実際のシミュレーションの結果から、早さ 1 の進行波を仮定し、 $U_{r+1}^{t+1} = U_r^t$ とすると、最終的に次の常差分方程式を得る。

$$U_{r+1} + U_{r-1} = \text{Max}(U_{r+1}, U_r, U_{r-1}) \quad (13)$$

再び、この常差分方程式は解くことが出来て、

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ U: \dots 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ \dots \\ V: \dots 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \end{array} \quad (14)$$

の形のパルス的な進行波の列が解である事が分かる [1]。

このパルス的な進行波と一様解の解析で得られた、(8) や (11) を較べると、 U, V の空間での解の並び順が同じである。これで、一点に加えられた刺激や振動が、どのように周囲に伝搬するのも理解できた。

実はスパイラルパターンも、同じ進行波を使って理解することが出来る。実際、今と同じ事情で、中心でも矛盾せずに、図 2 の線上で U, V が一定と置くことが出来、その様にして得られる式は、(12) 式そのものである。そして、図 1 の一本の線からその隣の線へと伝わって行く進行波が、ターゲットパターンを表す解になっているのである。

このようにして、このモデルに現れる 3 種類のパターンが、どのようにして形成されるのかを理解することが出来た。

3 ドメインを構成するモデル

さて前節では、 U にのみ拡散項が含まれる、反応拡散的な Max Plus 方程式を考えたが、 U と V 共に拡散項を持つようなモデルも考えることも出来る。

$$\begin{array}{l} UT = \text{Max}(\tilde{U}, U, V) - V \\ VT = \text{Max}(\tilde{V}, U, V) - U \end{array} \quad (15)$$

このモデルでは、 U は U 自身を増やし V は U を減らす、 U は V を減らし、(1) の条件は満たさない。しかし、適当な初期値を選ぶと、これまでに現れたターゲットパターンの他に安定したドメインという興味深いパターンを生成することが分かった。(図 6, 7) そこで、3 種共存モデルを考える前に、このモデルについて、いかにしてドメインが生成されるのかを考えてみたい。

一様解の解析

前節の議論にならって、まず一様解を構成してみる。(15) 式に対する一様解が満たす微分方程式は以下のものである。

$$\begin{aligned} UT &= \text{Max}(U, V) - V \\ VT &= \text{Max}(U, V) - U \end{aligned} \quad (16)$$

この微分方程式を実際に解いてみた結果、 $U = V = 0$ という定常解に落ち着く軌道

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \\ & & 1 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \end{array} \quad (17)$$

の他に、次のような 2 つの定常解があることが分かった。

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 1 & , & 0 & \rightarrow & 0 \\ 0 & \rightarrow & 0 & , & 1 & \rightarrow & 1 \end{array} \quad (18)$$

これと、シュミレーションで得られたドメインとを較べてみると、両者が同じものであることが観察できる。 U, V 共に拡散を通じて自分を増やすので、一旦出来たドメインは時間と共に周囲に広がって行く。ドメイン同士が接すると U, V 共に他を減らすので、安定したドメインが形成される。この様にして、どのようにドメインが構成されるのかが理解できた。

同様に、最隣接点も含めて“一様解”の解析をしてみると、上記の一様解に帰着されるものの他に、次のような周期的な軌道もあることが分かる。

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \rightarrow & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \rightarrow & 0 & 1 \end{array} \quad (19)$$

これはちょうど、このモデルに現れるターゲットパターンの振舞に一致している。従ってこの場合にも、一様解の解析と最隣接点も含めた解析を考えることで、すべてのパターンを説明できることが分かった。

4 3 種共存モデル

反応拡散方程式はある種の化学反応のみでなく、生物の競合や動物の皮膚の模様など、広い範囲の現象を記述する方程式であり、従属変数の個数も 2 つ以上あってよい。この節では、3 個の従属変数を含んでいるような次の方程式をとりあげたい。

$$\begin{aligned} UT &= \text{Max}(\tilde{U}, U, V) - V \\ VT &= \text{Max}(\tilde{V}, V, W) - W \\ WT &= \text{Max}(\tilde{W}, W, U) - U \end{aligned} \quad (20)$$

このモデルでは、 U, V, W 共に、拡散項を通じて自分自身を増やすが、同時に U は W を減らし、 V は U を減らすという様に、 U, V, W の間に循環的な強弱関係がある。従って、このモデルは3種類の生物が互いに他を食べながら競争するような3種共存のモデルだと考えることが出来る。このモデルで初期値を適当に選び、実際にシミュレーションしてみた結果、動くドメインとスパイラルおよび2周期のターゲットが存在することが分かった。(図 8, 9)

一様解の解析

そこでまず、ドメインとスパイラルの事を理解すべく、一様解を考えてみたい。一様解を表す常微分方程式は、(20) 式で空間依存性を取り除く事で得られる、次の方程式である。

$$\begin{aligned} UT &= \text{Max}(U, V) - V \\ VT &= \text{Max}(V, W) - W \\ WT &= \text{Max}(W, U) - U \end{aligned} \quad (21)$$

実際にこの方程式の解を調べてみると、 U, V, W の空間が、4種類の定常解に落ち着くような四個の軌道に分割出来ることが分る。

$$\begin{array}{cccccc} U: & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V: & 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 & , & 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 & & & \\ W: & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 \rightarrow 0 \rightarrow 0 & , & 1 \rightarrow 0 & & \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad (22)$$

この中で、 $U = V = W = 0$ の解は自明な定常解に相当するが、それ以外に、 U, V, W の内の一つだけが1であるような定常解もある。実際にシミュレーションで得られたドメインと較べてみることで、これらの定常解がドメインを構成している事が分かった。

前節のモデルで現れたドメインとの違いは、ドメイン同士の境界が移動することである。これは、次のように考えれば理解できる。まず、一旦出来たドメインは U, V, W が拡散しながら自分を増やすので周囲に広がって行く。所が2つのドメインが接すると、 U, V, W の間に強弱関係があるので、一方が他方を減らし、このようにしてドメインが移動するのである。

実は今の場合、この移動するドメインが一点での振舞を周囲に伝える進行波の役割も果たしている。実際、3種類のドメインが接すると、 U, V, W の間の循環的な強弱関係に従ってドメインが回転しだし、スパイラルパターンが形成されるが、そこで進行波の役割を果たしているのは移動するドメインである。

最隣接点も加えた解析

これらの進行波やスパイラルを観察してみると、最も短い進行波は長さ6、スパイラルの周期も6であることが分かる。この様に長い周期を持ったターゲットパターンは存在しないのだろうか？そこで、ターゲットパターンの事をもっと詳しく調べて見るために、隣り合う2点のみを残すように方程式をリダクションしてみることにする。周期境界条件を取っても、2点以外で $U = V = W = 0$ と置いても、同じ式が得られるのは以前と同じである。

$$\begin{aligned} UT_1 &= \text{Max}(U_1, U_2, V_1) - V_1 \\ VT_1 &= \text{Max}(V_1, V_2, W_1) - W_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
WT_1 &= \text{Max}(W_1, W_2, U_1) - U_1 \\
UT_2 &= \text{Max}(U_1, U_2, V_2) - V_2 \\
VT_2 &= \text{Max}(V_1, V_2, W_2) - W_2 \\
WT_2 &= \text{Max}(W_1, W_2, U_2) - U_2
\end{aligned} \tag{23}$$

再び、簡単な計算で $U_1 \sim W_2$ の空間での解の軌道を調べてみた結果、2周期の周期軌道、

$$\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & \rightarrow & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1
\end{array} \tag{24}$$

の他に、6周期の軌道

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & \rightarrow & 1 & 0 & \rightarrow & 1 & 0 & \rightarrow & 1 & 0 & \rightarrow & 0 & 1 & \rightarrow & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array} \tag{25}$$

もあることが分かった。従って、中心となる点とその最隣接点で”位相”のずれがこうなるように、うまく初期値を選んでやれば、6周期のターゲットが形成されるはずである。実際にそうすることができ、結果、図 10 に示すような、6周期のターゲットパターンを得ることが出来た。

5 結論

以上のようにして、反応拡散的な性質をもつ Max Plus 方程式で、確かにパターンが形成されること、そのパターンがどのようにして形成されるかとうことを明らかに出来た。

具体的には、2成分反応拡散系に相当するモデル、ドメインを構成するモデル、3種共存モデルの3種類のモデルを例にあげ、以下の事を明らかにした。

- ある点で起こった振動や、刺激がどのようにして周囲に伝搬するかということは、Max Plus 方程式の特性と、進行波の事を考えることで説明できる。特にターゲットパターンはこの進行波によって完全に理解できることが分かった。2成分反応拡散系に相当するモデルでは、この進行波はパルス的な進行波であり、3種共存モデルでは、移動するドメインが進行波の役割を果たす。
- トリガーやターゲットのパターンの中心での振舞は、一様解の解析と、一様解の解析を最隣接点まで含めるように拡張した解析から説明できる。特に3種共存モデルでは、簡単なシミュレーションからは発見できなかった、6周期のターゲットパターンを、このような解析から発見することが出来た。

今後の研究では、このような一様解による解析がどの程度の一般性を持つかを明らかにしたい。また、ここでは取り上げなかった、動物の皮膚の模様など、より大きいスケールで現れるパターンについても研究を進めて行きたい。

参考文献

- [1] Daisuke Takahashi, Atsuhiko Shida and Motohiro Usami, *Journal of Physics B*, **34** No. 23 (14 December 2001)
- [2] 太田 隆夫, 「界面ダイナミクスの数理」(チュートリアル/応用数理の最前線), 日本評論社 (1997)
- [3] 西浦 廉政, 「非線形問題 1 パターン形成の数理」(岩波講座 現代数学の新展開), 岩波書店 (1999)
- [4] 三池 秀俊, 森 義人, 山口 智彦, 「非平衡系の化学 III 反応・拡散系のダイナミクス」, 講談社サイエンティフィック (1998)
- [5] 森 肇, 蔵本 由紀, 「散逸構造とカオス」(岩波講座 現在の物理学 15), 岩波書店 (1994)
- [6] 高橋 大輔, 「超離散からくり」, *数理科学* **435** (1999) 12-17

• 2成分反応拡散系に相当するモデル

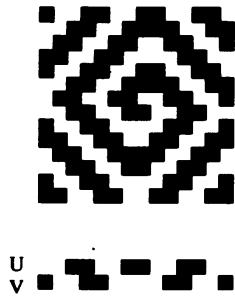


図 3: スパイラル

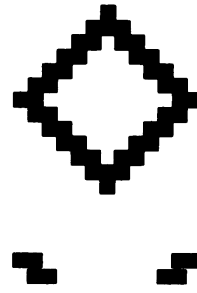


図 4: トリガー

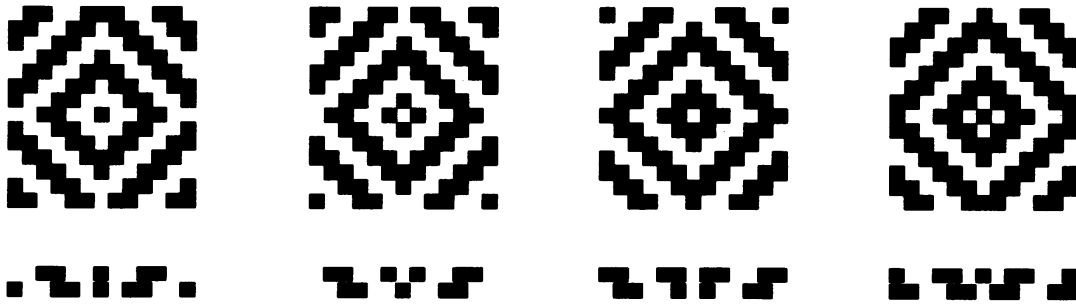


図 5: ターゲットパターン

それぞれの図で、上の部分は U のプロットで、黒い部分が 1 を白い部分が 0 を表す。下の部分は中心を通る水平線での U, V のプロットである。

●ドメインを形成するモデル

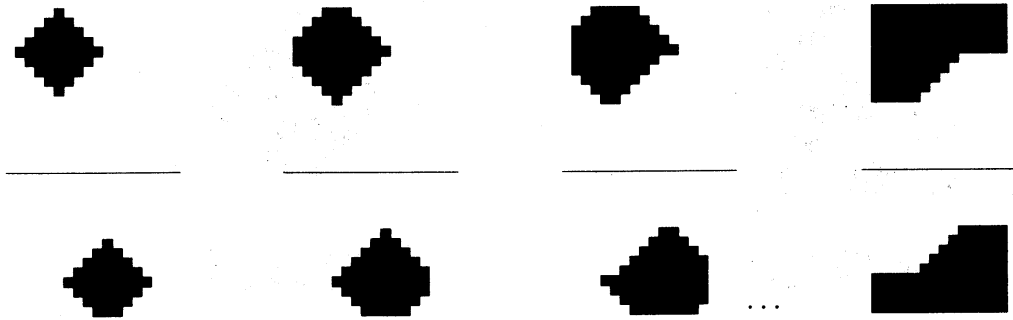


図 6: ドメイン

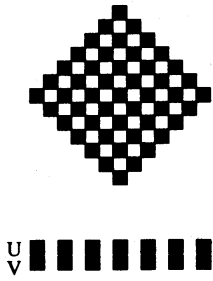


図 7: ターゲット

図 6 は上が U のプロット、下が V のプロットである。

● 三種共存モデル

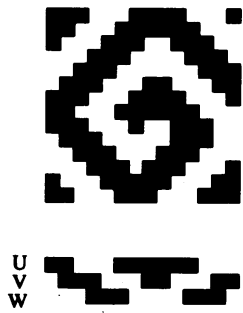


図 8: スパイラルパターン

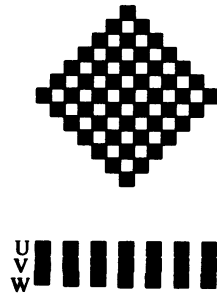


図 9: 2周期のターゲット

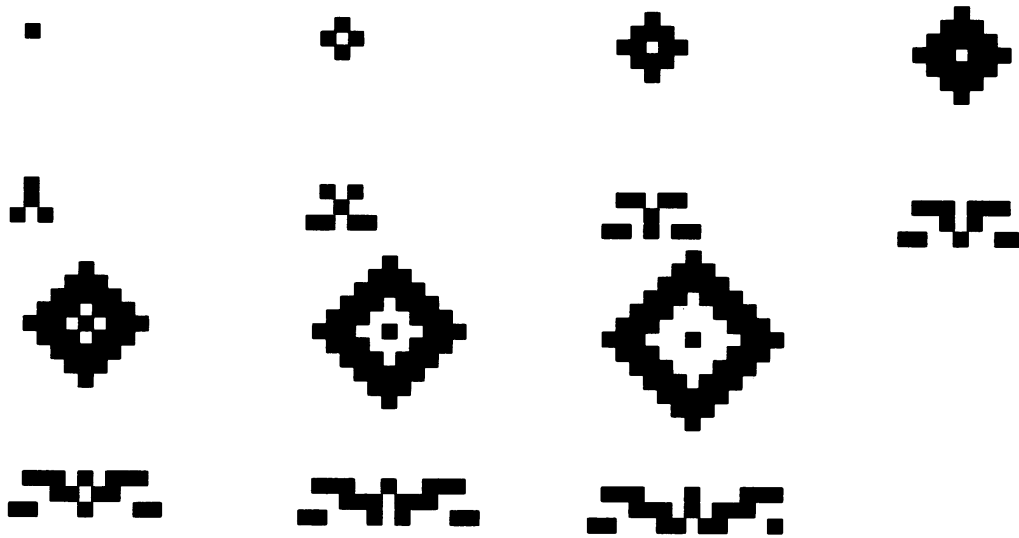


図 10: 6周期のターゲット