数理解析研究所講究録 1280 巻 2002 年 71-75

一般的双線型方程式の Bäcklund 変換方程式

新澤 信彦 (早大理) , 広田 良吾 (早大理)

1 一般的双線型方程式

物理や数学には、様々な非線型偏微分方程式が現れる。これらの方程式を、解の性質を保ったまま差分化することは、大抵の場合、難しい。しかし、可積分方程式は厳密解を持っていることも幸いして、時間空間共に差分化する事が可能であり、そうした方が見通しが良い。特に、広田・三輪 方程式は (3) のような簡潔な形をした方程式であるが、知られている多くの可積分方程式を連続極限に含んでおり、可積分方程式に限らない様々な分野で重要な役割を果たすことが知られている。ここでは、広田・三輪方程式に更に 1 つ項を加えた以下の様な方程式

$$
\begin{aligned}
(Z_1 exp(D_1) + Z_2 exp(D_2) + Z_3 exp(D_3) + Z_4 exp(D_4)) f \cdot f = 0 \\
Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 0 \\
D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

を取り上げ、特にこの方程式の Bäcklund 変換方程式について調べる。以下ではこの方程式の事を一般的双線型方程式と呼ぶことにする。[1]

Bäcklund 変換方程式に移る前に、一般的双線型方程式がいろいろな可積分方程式を含んでいることを示す。

- **広田・三輪方程式**

広田・三輪方程式を得るためには、単に $Z_4 = 0$ を課せば良い。残りの係数と変数を

$$
\begin{aligned}
Z_1 = a(b-c) \quad , \quad Z_2 = b(c-a) \quad , \quad Z_3 = c(a-b) \\
D_1 = \frac{1}{2}(-D_p + D_q + D_r) \\
D_2 = \frac{1}{2}(D_p - D_q + D_r) \\
D_3 = \frac{1}{2}(D_p + D_q - D_r)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

の様に撰ぶと、良く知られた型の広田・三輪方程式が得られる。

$$
Z_1 f_p f_{qr} + Z_2 f_q f_{pr} + Z_3 f_r f_{pq} = 0 \tag{3}
$$

- **離散 BKP 方程式**

係数を特殊化することで、離散 BKP 方程式を得ることも出来る 。

$$
\begin{aligned}
Z_1 = (b-c)(a+b)(a+c), Z_2 = (c-a)(b+c)(b+a), \\
Z_3 = (a-b)(c+a)(c+b), Z_3 = (a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

変数変換

$$
D_1 = \frac{1}{2}(-D_p + D_q + D_r)
$$

$$D_2 = \frac{1}{2}(D_p - D_q + D_r)$$
$$D_3 = \frac{1}{2}(D_p + D_q - D_r)$$
$$D_4 = \frac{1}{2}(-D_p - D_q - D_r) \tag{5}$$

をすると、離散BKP方程式

$$(b-c)(a+b)(a+c)f_p f_{qr} + (c-a)(b+c)(b+a)f_q f_{pr}$$
$$+(a-b)(c+a)(c+b)f_r f_{pq} + (a-b)(b-c)(c+b)f f_{pqr} = 0 \tag{6}$$

が得られる。

• **離散 KdV+Sawada-Kotera equation**

係数を

$$Z_1 = \delta^{-1}, Z_2 = -\delta^1 - a_3,$$
$$Z_3 = a_3 - a_4, Z_4 = a_4 \tag{7}$$

のように撰び、

$$D_1 = \frac{1}{2}D_n + \delta D_t,$$
$$D_2 = \frac{1}{2}D_n$$
$$D_3 = \frac{2}{3}D_n + \delta D_t$$
$$D_4 = \frac{5}{2}D_n - 2\delta D_t \tag{8}$$

と変数変換することで、次の様な差分方程式が得られる。

$$\sinh(\frac{1}{2}(D_n + \delta D_t)$$
$$(\frac{1}{2}\sinh(\frac{1}{2}\delta D_t) + a_3 \sinh(\frac{1}{2}(2D_n + \delta D_t)) + a_4 \sinh(\frac{1}{2}(4D_n + 3\delta D_t)))f \cdot f = 0 \tag{9}$$

これは K-dV + Sawada-Kotera 方程式の差分化である。

2 Bäcklund 変換方程式

さてそこで、一般的な双線型方程式 (1) の Bäcklund 変換方程式を求めたい。Bäcklund 変換方程式は、ある方程式の解を同じ方程式の別の解に移す変換 (auto Bäcklund 変換) を生成する方程式で、N soliton 解 と N+1 soliton 解を結ぶ重要な方程式である。ここでは更に、行列とベクトルのかけ算の形に方程式を表示出来る、“Symmetric Bäcklund 変換方程式” を導く。

Bäcklund 変換方程式

まず、ふたつの従属変数 f,g を準備し、f に対する一般化双線型方程式と、g に対する一般化双線型方程式を、次のように足しあわせる 。

$$\begin{aligned}&\{(Z_1e^{D_1}+Z_2e^{D_2}+Z_3e^{D_3}+Z_4e^{D_4})f\cdot f\}\{e^{D_4}g\cdot g\}\\&-\{(Z_1e^{D_1}+Z_2e^{D_2}+Z_3e^{D_3}+Z_4e^{D_4})g\cdot g\}\{e^{D_4}f\cdot f\}=0\end{aligned}\tag{10}$$

明らかに、f,g がこの方程式を満たし、f が一般的双線型方程式を満たすなら、g も一般的双線型方程式を満たさなければならない。

f,g の交換公式

$$\begin{aligned}&(e^{D_\lambda}f\cdot f)(e^{D_\mu}g\cdot g)\\&=\exp(-\frac{1}{2}(D_\lambda+D_\mu))(\exp(\frac{1}{2}(D_\lambda-D_\mu))f\cdot g)\cdot(\exp(-\frac{1}{2}(D_\lambda-D_\mu))f\cdot g)\end{aligned}\tag{11}$$

を使うと、(10) 式は、次のように書き変えられる。

$$\begin{aligned}&Z_1(-\sinh(-\frac{1}{2}(D_1+D_4))(\exp(\frac{1}{2}(D_1-D_4))f\cdot g)\cdot(\exp(-\frac{1}{2}(D_1-D_4))f\cdot g))\\&+Z_2(-\sinh(-\frac{1}{2}(D_2+D_4))(\exp(\frac{1}{2}(D_2-D_4))f\cdot g)\cdot(\exp(-\frac{1}{2}(D_2-D_4))f\cdot g))\\&+Z_3(-\sinh(-\frac{1}{2}(D_3+D_4))(\exp(\frac{1}{2}(D_3-D_4))f\cdot g)\cdot(\exp(-\frac{1}{2}(D_3-D_4))f\cdot g))\\&=0\end{aligned}\tag{12}$$

さらに D オペレーターの恒等式を使うと、この方程式にいくつかの項を付け加えることが可能である。まず、任意の F に対して $\sinh(D)F\cdot F=0$ が成り立つことを使うと、$\exp(-\frac{1}{2}(D_i-D_4))f\cdot f(i=1,2,3)$ の所に $\exp(\frac{1}{2}(D_i-D_4))$ に比例する項を付け加えることが出来る。さらに、交換公式

$$\begin{aligned}&e^{D_\lambda}(e^{D_\mu}f\cdot g)\cdot(e^{D_\nu}f\cdot g)\\&=\exp(\frac{1}{2}(D_\mu-D_\nu))(\exp(D_\lambda+\frac{1}{2}(D_\mu+D_\nu))f\cdot g)\cdot(\exp(-D_\lambda+\frac{1}{2}(D_\mu+D_\nu))f\cdot g)\end{aligned}\tag{13}$$

を使うと、同じところに以下の α,β,γ に比例する 3 組の項をつけ加える事が出来て、次の式を得る。

$$\begin{aligned}&Z_1\sinh(\frac{1}{2}(D_1+D_4))\{\exp(\frac{1}{2}(D_1-D_4)f\cdot g)\}\cdot\{\exp(-\frac{1}{2}(D_1-D_4))+\lambda_1\exp(\frac{1}{2}(D_1-D_4))\\&\qquad+Z_2\alpha\exp(\frac{1}{2}(D_1+2D_2+D_4)-Z_3\gamma\exp(\frac{1}{2}(D_1+2D_2+D_4))\}f\cdot g\\&+Z_2\sinh(\frac{1}{2}(D_2+D_4))\{\exp(\frac{1}{2}(D_2-D_4))f\cdot g)\}\cdot\{\exp(-\frac{1}{2}(D_2-D_4))+\lambda_2\exp(\frac{1}{2}(D_2-D_4))\\&\qquad-Z_1\alpha\exp(\frac{1}{2}(2D_1+D_2+D_4)+Z_3\beta\exp(\frac{1}{2}(D_2+2D_3+D_4))\}f\cdot g\\&+Z_3\sinh(\frac{1}{2}(D_3+D_4)\{\exp(\frac{1}{2}(D_3-D_4)f\cdot g)\}\cdot\{\exp(-\frac{1}{2}(D_3-D_4))+\lambda_3\exp(\frac{1}{2}(D_1-D_4))\\&\qquad+Z_1\alpha\exp(\frac{1}{2}(2D_1+D_3+D_4)-Z_2\gamma\exp(\frac{1}{2}(D_2+2D_3+D_4))\}f\cdot g=0\end{aligned}\tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
&\exp(-\frac{1}{2}(D_1 - D_4)) + \lambda_1 \exp(\frac{1}{2}(D_1 - D_4)) \\
+Z_2\alpha \exp(\frac{1}{2}(D_1 + 2D_2 + D_4) - Z_3\gamma \exp(\frac{1}{2}(D_1 + 2D_2 + D_4))\} f \cdot g = 0 \\
&\{\exp(-\frac{1}{2}(D_2 - D_4)) + \lambda_2 \exp(\frac{1}{2}(D_2 - D_4)) \\
-Z_1\alpha \exp(\frac{1}{2}(2D_1 + D_2 + D_4) + Z_3\beta \exp(\frac{1}{2}(D_2 + 2D_3 + D_4))\} f \cdot g = 0 \\
&\{\exp(-\frac{1}{2}(D_3 - D_4)) + \lambda_3 \exp(\frac{1}{2}(D_1 - D_4)) \\
+Z_1\alpha \exp(\frac{1}{2}(2D_1 + D_3 + D_4) - Z_2\gamma \exp(\frac{1}{2}(D_2 + 2D_3 + D_4))\} f \cdot g = 0 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

が一般的双線型方程式の Bäcklund 変換方程式になっている事が分かった。変数変換 (5) をすると、これらの式は次のように書き変えることが出来る。

$$
\begin{aligned}
f g_{qr} + Z_1 Z_4 \alpha\gamma f_{qr} g + Z_2 \alpha f_r g_q - Z_3 \gamma f_q g_r &= 0 \\
f g_{pr} + Z_2 Z_4 \alpha\beta f_{pr} g - Z_1 \alpha f_r g_p + Z_3 \beta f_p g_r &= 0 \\
f g_{pq} + Z_3 Z_4 \gamma\beta f_{pq} g + Z_1 \gamma f_q g_p - Z_2 \beta f_p g_q &= 0 \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Bäcklund 変換方程式の行列表示

さて、この Bäcklund 変換方程式は f が一般的双線型方程式を満たしていれば、g も一般的双線型方程式を満たしていることを保証するが、f が一般的双線型方程式を満たしていないときには、そのような事はいえない。Bäcklund 変換方程式を行列とベクトルだけで表すことが出来ると、無矛盾条件を見通し良く求めることが出来、そのような事がいえる。実際、広田・三輪方程式の場合には、

行列 × ベクトル = 0

と表せる Bäcklund 変換方程式があり、無矛盾条件をこの行列の行列式=0 とあらわす事が出来る。[2]

今の場合、(16) 式だけでは、この様な表示は得られない。しかし、f と g のいづれかが一般的双線型方程式を満たすと仮定すると新たな補助方程式を得ることが出来る。

実際、一般的双線型方程式

$$
Z_1 f_p f_{qr} + Z_2 f_q f_{pr} + Z_3 f_r f_{pq} + Z_4 f f_{pqr} = 0 \qquad (17)
$$

に (16) 式の f_{pr}, f_{qr}, f_{pq} を代入すると、

$$
\begin{aligned}
f_p(\frac{f g_{qr} + Z_2\alpha f_r g_q - Z_3\gamma f_q g_r}{Z_4\alpha\gamma g}) + f_q(\frac{f g_{pr} - Z_1\alpha f_r g_p + Z_3\beta f_p g_r}{Z_4\alpha\beta g}) \\
f_r(\frac{f g_{pq} + Z_1\gamma f_q g_p - Z_2\beta f_p g_q}{Z_4\gamma\beta g}) + Z_4 f f_{pqr} \\
= \frac{f}{Z_4\alpha\beta\gamma}(\beta f_p g_{qr} + \gamma f q g_{pr} + f_r g_{pq} + Z_4^2 f_{pqr} g) \\
= 0 \qquad (18)
\end{aligned}
$$

のようになって、f, g に対する双線型方程式がもう 1 つ得られる。

同様に、(16) 式のそれぞれを、p 方向、q 方向、r 方向に並進すると

$$\begin{aligned} f_p g_{pqr} + \lambda_1 f_{pqr} g_p + Z_2 \alpha f_{pr} g_{pq} - Z_3 \gamma f_{pq} g_{pr} &= 0 \\ f_q g_{pqr} + \lambda_2 f_{pqr} g_q - Z_1 \alpha f_{qr} g_{pq} + Z_3 \beta f_{pq} g_{qr} &= 0 \\ f_r g_{pqr} + \lambda_3 f_{pqr} g_r + Z_1 \gamma f_{qr} g_{pr} - Z_2 \beta f_{pr} g_{qr} &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

が得られるが、この式の f_p, f_q, f_r を一般的双線型方程式に代入すると、次の双線型方程式が得られる。

$$Z_1^2 \alpha\gamma f_{qr} g_p + Z_2^2 \alpha\beta f_{pr} g_q + Z_3^2 \gamma\beta f_{pq} g_r + f g_{pqr} = 0 \tag{20}$$

これら 8 個の式をまとめると、以下の様に (8×8 行列)×(8 成分ベクトル)=0 の形に式を表すことが出来る。

$$\begin{matrix} 0 & Z_1\alpha\gamma f_{qr} & Z_2\alpha\beta f_{pr} & Z_3\gamma\beta f_{pq} & f & 0 & 0 & 0 \\ -Z_1\alpha\gamma f_{qr} & 0 & \alpha f_r & -\gamma f_q & 0 & f & 0 & 0 \\ -Z_2\alpha\beta f_{pr} & -\alpha f_r & 0 & -\gamma f_q & 0 & 0 & f & 0 \\ -Z_3\gamma\beta f_{pq} & \gamma f_q & -\beta f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ -Z_4\alpha\beta\gamma f_{pqr} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta f_p & -\gamma f_q & -\alpha f_r \\ 0 & -Z_4\alpha\beta\gamma f_{pqr} & 0 & 0 & \beta f_p & 0 & -Z_3\beta\gamma f_{pq} & -Z_2\alpha\beta f_{pr} \\ 0 & 0 & -Z_4\alpha\beta\gamma f_{pqr} & 0 & \gamma f_q & Z_3\beta\gamma f_{pq} & 0 & -Z_1\alpha\gamma f_{qr} \\ 0 & 0 & 0 & -Z_4\alpha\beta\gamma f_{pqr} & \alpha f_r & -Z_2\alpha\beta f_{pr} & Z_1\alpha\gamma f_{qr} & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} Z_4 g \\ Z_1 g_p \\ Z_2 g_q \\ Z_3 g_r \\ g_{pqr} \\ g_{qr} \\ g_{pr} \\ g_{pq} \end{matrix} = 0$$

これらの方程式が 0 でない解を持つためには、この行列の行列式が 0 でなければならない。実際に計算してみると、

$$(Z_1 f_p f_{qr} + Z_2 f_q f_{pr} + Z_3 f_r f_{pq} + Z_4 f f_{pqr})^4 = 0 \tag{21}$$

となって、一般的双線型方程式の 4 乗を与える事が分かる。このようにして、一般的双線型方程式の場合にも、行列 × ベクトル = 0 と表せるような、"Symmetric Bäcklund 変換方程式" がある事が分かった。

3 結論

広田・三輪方程式 に一つ項をくわえた、一般的な双線型方程式の Bäcklund 変換方程式を調べた。特に、一般的双線型方程式と Bäcklund 変換方程式を組にして考えると、新たに補助的な双線型式が得られることを示した。これらの補助的な式ともとの Bäcklund 変換方程式を合わせて、行列とベクトルの積の形に表せる Bäcklund 変換方程式を得た。

参考文献

[1] Hirota R 1981 J. Phys. Soc. Jpn. **50** 3787

[2] N. Shinzawa and S. Saito 1998 J. Phys. A **31** 4533-4540