数理解析研究所講究録 1280 巻 2002 年 76-78

SU(2) 自己双対 Yang-Mills 方程式の離散化について

広大・工　太田　泰広 (Yasuhiro Ohta)
Graduate School of Engineering, Hiroshima Univ.

1 はじめに

自己双対 Yang-Mills 方程式は、独立変数を4つもつ多次元の可積分系としてよく知られている。KP 系列のソリトン方程式がアフィン Lie 代数の表現から得られるのに対し、自己双対 Yang-Mills 方程式はトロイダル Lie 代数（特に、3-トロイダル Lie 代数）の対称性によって記述される。[1] KP 系列の場合に連続のソリトン方程式を離散化しようと思ったら、原理的には Miwa 変換を用いることにより、少なくとも一つの可積分離散アナログを構成することができる。それに対して、トロイダル Lie 代数に付随する方程式に対しては、（アフィンの対称性を起源とする独立変数でなく、トロイダル固有のフローを記述する独立変数を）離散化する方法は、現在まで知られていない。それは、KP 系列の場合のような、連続の独立変数の母函数としての離散独立変数が、トロイダルの場合には定義できないためであると言える。このような方程式の離散化を研究することは、トロイダルに付随する系の性質を明らかにするという点からも、また様々な多次元可積分系の構成可能性を探るという意味からも、興味深い。

本稿では、SU(2) 自己双対 Yang-Mills 方程式の Hankel 行列式解 [2] から出発して、方程式と解の離散アナログを構成する。実際には、Yang-Mills 方程式自体が離散化されたわけではなく、Yang-Mills 方程式を二つの等価な式に分離したときの、一方のみが離散化された。すなわち、3-トロイダルの離散化ではなく、2-トロイダルの離散化を行ったことに相当する。

2 SU(2) 自己双対 Yang-Mills 方程式の Hankel 行列式解

SU(2) 自己双対 Yang-Mills 方程式を

$$(J_yJ^{-1})_{\bar{y}} + (J_{\bar{z}}J^{-1})_z = 0$$

$$\det J = 1 \tag{1}$$

の形に書こう。ここで、J は 2×2 行列であり、独立変数として $y, z, \bar{y}, \bar{z}$ の四つをもつ。上の第一式は次の二式に分離される。

$$\begin{aligned} J_yJ^{-1} &= K_z \\ J_{\bar{z}}J^{-1} &= -K_{\bar{y}} \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、K は 2×2 行列であり、あるポテンシャル函数を表す。上の二式は等価な形をしており、$(\bar{z}, -\bar{y})$ は単に (y, z) のコピーであるとみなせる。すなわち、発展方程式 (2) に可換な時間発展として、無数の (y, z) のコピーを導入することができ、そのうちの一つを $(\bar{z}, -\bar{y})$ と書いた、と思ってよい。変数変換

$$J = \frac{1}{\tau_N^0}\begin{pmatrix} \tau_N^1 & \tau_{N+1}^{-1} \\ \tau_{N-1}^1 & \tau_N^{-1} \end{pmatrix} \quad K = \frac{1}{\tau_N^0}\begin{pmatrix} \tau_{N\Box}^0 & \tau_{N+1}^0 \\ \tau_{N-1}^0 & -\tau_{N\Box}^0 \end{pmatrix}$$

により、規格化条件 (1) と分離された Yang-Mills 方程式の一方 (2) は、双線形方程式

$$\begin{aligned}
&\tau_N^{n+1}\tau_N^{n-1} - \tau_{N+1}^{n-1}\tau_{N-1}^{n+1} = \tau_N^n\tau_N^n \\
&D_y\tau_{N+1}^{n-1}\cdot\tau_N^{n+1} = D_z\tau_{N+1}^n\cdot\tau_N^n \\
&D_y(\tau_N^{n+1}\cdot\tau_N^{n-1} - \tau_{N+1}^{n-1}\cdot\tau_{N-1}^{n+1}) = 2D_z\tau_{N\square}^n\cdot\tau_N^n
\end{aligned} \tag{3}$$

に変換される。ここで、N, n は表記を簡単にするために便宜上導入した添字にすぎない。

上の双線形方程式の解は、次の Hankel 行列式で与えられる。[2)]

$$\tau_N^n = \begin{vmatrix} \varphi_n & \varphi_{n+1} & \cdots & \varphi_{n+N-1} \\ \varphi_{n+1} & \varphi_{n+2} & \cdots & \varphi_{n+N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n+N-1} & \varphi_{n+N} & \cdots & \varphi_{n+2N-2} \end{vmatrix}$$

$$\tau_{N\square}^n = \begin{vmatrix} \varphi_n & \varphi_{n+1} & \cdots & \varphi_{n+N-2} & \varphi_{n+N} \\ \varphi_{n+1} & \varphi_{n+2} & \cdots & \varphi_{n+N-1} & \varphi_{n+N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n+N-1} & \varphi_{n+N} & \cdots & \varphi_{n+2N-3} & \varphi_{n+2N-1} \end{vmatrix} \tag{4}$$

ここで、φ_n は

$$\partial_y\varphi_n = \partial_z\varphi_{n+1} \tag{5}$$

をみたす任意函数である。

3 (SU(2) 自己双対 Yang-Mills 方程式)/2 の離散化

上で与えられた Hankel 行列式解を離散化する。独立変数 y, z を離散化した変数を k, l と書こう。このとき線形分散関係式 (5) の離散化は

$$\varphi_n(k,l) - \varphi_n(k-1,l) = \varphi_{n+1}(k,l+1) - \varphi_{n+1}(k,l)$$

で与えられる。ここで簡単のため、差分間隔は 1 に規格化した。τ 函数 (4) の離散化は、Hankel 行列式の各成分の引数を、次のようにシフトした行列式で与えられる。

$$\tau_N^n(k,l) = \begin{vmatrix} \varphi_n(k,l) & \varphi_{n+1}(k+1,l) & \cdots & \varphi_{n+N-1}(k+N-1,l) \\ \varphi_{n+1}(k,l+1) & \varphi_{n+2}(k+1,l+1) & \cdots & \varphi_{n+N}(k+N-1,l+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n+N-1}(k,l+N-1) & \varphi_{n+N}(k+1,l+N-1) & \cdots & \varphi_{n+2N-2}(k+N-1,l+N-1) \end{vmatrix}$$

$$\tau_{N\square}^n(k,l) = \begin{vmatrix} \varphi_n(k,l) & \cdots & \varphi_{n+N-2}(k+N-2,l) & \varphi_{n+N}(k+N,l) \\ \varphi_{n+1}(k,l+1) & \cdots & \varphi_{n+N-1}(k+N-2,l+1) & \varphi_{n+N+1}(k+N,l+1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n+N-1}(k,l+N-1) & \cdots & \varphi_{n+2N-3}(k+N-2,l+N-1) & \varphi_{n+2N-1}(k+N,l+N-1) \end{vmatrix}$$

$$\tau_{N\diamond}^n(k,l) = \begin{vmatrix} \varphi_n(k,l) & \varphi_{n+1}(k+1,l) & \cdots & \varphi_{n+N-1}(k+N-1,l) \\ \varphi_{n+1}(k,l+1) & \varphi_{n+2}(k+1,l+1) & \cdots & \varphi_{n+N}(k+N-1,l+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n+N-2}(k,l+N-2) & \varphi_{n+N-1}(k+1,l+N-2) & \cdots & \varphi_{n+2N-3}(k+N-1,l+N-2) \\ \varphi_{n+N}(k,l+N) & \varphi_{n+N+1}(k+1,l+N) & \cdots & \varphi_{n+2N-1}(k+N-1,l+N) \end{vmatrix}$$

このτ函数に対し、以下の双線形方程式が成り立つ。

$$\tau_N^{n+1}(k+1,l)\tau_N^{n-1}(k,l-1)-\tau_{N+1}^{n-1}(k,l-1)\tau_{N-1}^{n+1}(k+1,l)=\tau_N^n(k,l)\tau_N^n(k+1,l-1)$$

$$\tau_{N+1}^{n-1}(k,l-1)\tau_N^{n+1}(k,l)-\tau_{N+1}^{n-1}(k-1,l-1)\tau_N^{n+1}(k+1,l)$$
$$=\tau_{N+1}^n(k,l)\tau_N^n(k,l-1)-\tau_{N+1}^n(k,l-1)\tau_N^n(k,l)$$

$$\tau_N^{n+1}(k+1,l)\tau_N^{n-1}(k-1,l-1)-\tau_N^n(k,l)\tau_N^n(k,l-1)-\tau_{N+1}^{n-1}(k,l-1)\tau_{N-1}^{n+1}(k,l)$$
$$=\tau_{N\square}^n(k,l)\tau_N^n(k,l-1)-\tau_{N\square}^n(k,l-1)\tau_N^n(k,l)$$

$$\tau_N^{n+1}(k,l)\tau_N^{n-1}(k,l-1)-\tau_N^n(k,l)\tau_N^n(k,l-1)-\tau_{N+1}^{n-1}(k-1,l-1)\tau_{N-1}^{n+1}(k+1,l)$$
$$=\tau_{N\diamond}^n(k,l-1)\tau_N^n(k,l)-\tau_{N\diamond}^n(k,l)\tau_N^n(k,l-1)$$

これが、2-トロイダルの双線形方程式 (3) の離散化を与えている。

最後に、変数変換

$$J(k,l)=\frac{1}{\tau_N^0(k,l)}\begin{pmatrix}\tau_N^1(k+1,l) & \tau_{N+1}^{-1}(k,l-1)\\ \tau_{N-1}^1(k+1,l) & \tau_N^{-1}(k,l-1)\end{pmatrix}\quad K(k,l)=\frac{1}{\tau_N^0(k,l)}\begin{pmatrix}\tau_{N\square}^0(k,l) & \tau_{N+1}^0(k,l)\\ \tau_{N-1}^0(k,l) & -\tau_{N\diamond}^0(k,l)\end{pmatrix}$$

を導入することにより、非線形方程式

$$\Big(J(k,l)-J(k-1,l)\Big)J^{-1}(k-1,l)=K(k,l)-K(k,l-1)$$

が得られ、方程式 (2) とその解の離散アナログが構成されたことになる。ここで、離散化の際に行列式の各成分の引数がシフトされて、もはや Hankel 行列式ではなくなったため、離散系においては (1) 式は成り立たない。その代わりに、シフトされた式

$$\det J(k,l)=\frac{\tau_N^0(k+1,l-1)}{\tau_N^0(k,l)}$$

が成立する。

4 まとめ

SU(2) 自己双対 Yang-Mills 方程式を二つの式に分離し、その一方の方程式を離散化することに成功した。解は、Hankel 行列式の各成分の引数を適当にシフトした行列式によって与えられる。この引数のシフトによって、連続の SU(2) 自己双対 Yang-Mills 方程式がもっていた、トロイダルやアフィンの対称性は、変形され失われてしまった。そのため、連続の場合のように、独立変数 (k,l) のコピーを可換な時間発展として、同じ解に対して導入することは、離散系の場合にはこのままではできない。すなわち、現時点では 2-トロイダルの離散化はできたが、3-トロイダルの離散化はまだできていない。従って、自己双対 Yang-Mills 方程式自体の離散化は、まだ未完成であり今後の課題である。本研究に関して、有益な議論をしていただいた筧三郎氏に感謝いたします。

References

1) S. Kakei, T. Ikeda and K. Takasaki, nlin.SI/0107065.

2) E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. G. Yates and P. Goddard, Comm. Math. Phys. **58** (1978)