数理解析研究所講究録 1283 巻 2002 年 42-47

Nesin の問題について

岡山大学理学部数学教室
田中 克己

1 はじめに

Ali Nesin は学位論文を書いていた頃，1980 年代後半，から次の予想を考えていた.

Nesin の予想 (以降，NC とよぶ)
連結で Morley rank 有限の群 G とその任意の元 a に対し，$C_G(a)$ は無限であろう.

この問題は，私が Irvine に滞在した 1995 年の時点でも未解決のままであり，彼自身「この問題は考えないほうがいい.」と言っていた. それは，おそらくこの問題が次の Cherlin-Zil'ber 予想に関わってくるからなのだろう漠然と思っていた.

Cherlin-Zil'ber 予想
Morley rank 有限な単純群は代数閉体上の代数群と同型であろう.

いつまでもこのままで放っておくのも気持ちが悪いので，この辺で，何が分かっていて，何が分かっていないのかを明らかにしておこうと思い立った. 現在でも open であるこの問題について攻略の足がかりを見つけたいと思う.

2 単純群

まず，この予想に反例があったとすると，単純群で取れることを示す. そのために，いくつか準備をする.

次の補題は [BCM] や [N] に見られる.

補題 1 連結な群 G が有限集合 X に作用しているとする. $\{g \in G \mid g.x = x \ \ \forall x \in X\}$ が G の定義可能部分群とする. このとき，G は X に自明に作用する.

証明 群の準同型写像 $f: G \longrightarrow Sym(X)$ を考える. ここで，$f(g) = f_g \ \ for \ g \in G$ で $f_g(x) = g.x \ \ for \ x \in X$ とする. このとき，$\ker f$ の G での指数は有限. $\ker f$ は 定義可能部分群だから G の連結性より，$G = \ker f$. つまり，G は X に自明に作用している. □

系 2 連結な群 G とその有限正規部分集合 X に対し，$X \subseteq Z(G)$.

系 3 G を連結な群，$Z_2(G)$ が有限とする．このとき，$Z_2(G) = Z(G)$ で $G/Z(G)$ は連結．

このことから，次が導かれる．

系 4 NC に反例が存在すれば，*centerless* な反例が存在する．

定理 5 NC に反例が存在すれば，単純群で反例が存在する．

証明 上の系より，centerless な反例の中で Morley rank が最小の群 G をとる．G の定義可能正規部分群 N を考える．N が有限のときは，系 2 より，N は G の中心に含まれる．G は centerless だから，$N = 1$.

N が無限のときは，連結成分 N^o も無限．いま，$a \in G$ にた対し，$C_G(a)$ が有限とする．$a \in N^o$ のとき，反例 G の Morley rank の最小性から，$G = N^o$.

$a \notin N^o$ のとき，G/N^o も NC の反例になる．なぜなら，$MR(G) = MR(a^G)$ (a^G は G で generic) だから，$\bar{a} = aN^o$，$\bar{G} = G/N^o$ として，$\bar{a}^{\bar{G}}$ は $\bar{G}$ で generic．よって，$C_{\bar{G}}(\bar{a})$ は有限．これは G のランクの最小性に反する．したがって G は単純群．□

3 $|\, a \,| \neq \infty$

いま，$a \in G$ に対し，$C_G(a)$ が有限とする．このとき，conjugacy class a^G は G で generic.

定理 6 G を NC の反例，a の中心化群が有限とするとき，$|\, a \,| \neq \infty$.

証明 G を NC の反例とする．$|\, a \,| = \infty$ とする．このとき，$a^n \in C_G(a)$ $\forall n \in \mathbf{N}$ で矛盾．□

4 $|\, a \,| \neq 2$

定理 7 G を NC の反例，a の中心化群が有限とするとき，$|\, a \,| \neq 2$.

証明 元 a は involution と仮定する．a^G は G で generic．$a^G = A$ とおくとき，aA も G で generic．よって，$aA \cap A$ も G で generic．したがって，$B = \{b \in A \mid ab \in A\}$ は G で generic．このとき，

$$aa^b = ab^{-1}ab = abab = (ab)^2 = 1.$$

ゆえに，$a^b = a$ となり，$b \in C_G(a)$．これは，$B \subseteq C_G(a)$ を意味し $C_G(a)$ の有限性に反

5 G は involution を持つ

ここで，$C_G(a) = C_G(a^{-1})$ より，$a^{-1} \in a^G$．したがって，ある元 $g \in G$ が存在して，

$$a^g = a^{-1}.$$

補題 8 $| g | \neq \infty$.

証明 $a^{g^{2n}} = a \ \forall n \in \mathrm{N}$ より，$g^{2n} \in C_G(a)$．これは，$C_G(a)$ の有限性に反する．□

補題 9 $| g |$ は偶数.

証明 $| g | = n$ が奇数とする.

$$a = a^{g^n} = a^{(-1)^n} = a^{-1}$$

で矛盾．□

定理 10 *NC の反例は involution を持つ.*

証明 $| g | = n = 2m$ とする．このとき，g^m は involution．□

6 $| a | \neq 3$

前のセクションで分かったことから，NC の反例 G の exponent は 3 にはならない．しかし，このことは以下で紹介する Wagner の結果からも導かれる．ここでなされる議論は，この問題を考えるとき有効だと思われるので，ここに証明と合わせて紹介する．

定理 11 (Wagner[W]) *安定な群が位数 3 の generic な元 g をもつとき，nilpotent-by-finite.*

証明 $x \in G$ で g は x 上 generic とする．このとき，ga と xg^{-1} も generic．このとき，

$$x^{g^2} x^g x = gxgxgx = 1 = xg^{-1}xg^{-1}xg^{-1} = xx^g x^{g^2}$$

したがって，$xx^g = (x^{g^2})^{-1} = x^g x$．安定性から，$C_G(x^G) = C_G(x^{g_1}, \cdots, x^{g_n})\ \exists g_1, \cdots, g_n \in G$．$g$ が独立で generic ならば，$g_1 g, \cdots, g_n g$ も generic．よって，g はすべての $x^{g_i g}$ と可換．したがって，$x^{g^{-1}}$ はすべての x^{g_i} と可換．ゆえに，$x^{g^{-1}}$ x^G と可換．したがって，$x \in C_G(x^G)^g = C_G(x^G)$．よって，$x^G$ は可換な正規部分群を生成する．[W] の Theorem 1.1.12 より，G は nilpotent.

G の任意の 2 元 x，y から生成される群は 2-step nilpotent．なぜなら，$[x, y] = x^{-1}x^y = y^{-x}y$ は x とも y とも可換．任意の x と x 上 generic な任意の y に対し，xy は generic．よって，

$$1 = (xy)^3 = x^3y^3[y, x]^3 = x^3[y, x]^3$$

また，x 上独立で generic な別の z に対し，yz も x 上 generic. $x^3=1$ と，$\langle x^G\rangle$ の中の commutator は可換であることに注意すると，

$$x^3=[x,y]^3=[x,z]^3=[x,yz]^3=([x,y]^z[x,z])^3=([x,y]^z)^3[x,z]^3.$$

したがって，G の exponent は 3. □

この結果は，Poizat による次の予想の部分解になっている.

Poizat の予想　G を Morley rank 有限な連結群，$\varphi(x)$ を atomic な論理式で G のある generic な元を解にもつとする．このとき，G の任意の元は $\varphi(x)$ の解になる.

7　$|\, a \,| \neq 2^2$?

このセクションでは，表題のことが成り立つのか考察を試みる．次の議論は M. Hall によるバーンサイド問題の部分的解決である「$B(r,4)$ の有限性」の証明と同じ方針で行う.

定理 12　G を NC の反例，a を位数 4 の G の元でその中心化群は有限とする．このとき，a を含む局所有限な群が存在する.

証明　$a^G=A$ とおく．A は G で generic. いま，$a=x_1$ とおく.

Claim　H を G の有限部分群，$x\in G$ は $x^2\in H$ をみたすものとする．このとき，$\langle H,x\rangle$ は有限.

この Claim が正しいとすると，$H=\langle x_1\rangle$ とおく．${x_2}^4=1$ ならば，$x=x_2^2$ とおけば，$\langle x_1,x_2^2\rangle$ は有限．次に，$H=\langle x_1,x_2^2\rangle$，$x=x_2$ とおけば，$\langle x_1,x_2\rangle$ は有限．同様に，$\langle x_1,x_2,x_3^2\rangle$，$\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ と続ければよい.

Claim の証明　$\langle H,x\rangle$ の任意の元は

$$h_1xh_2xh_3x\cdots h_{n-1}xh_n, \tag{1}$$

ここで，$n\geq 1, h_1,\cdots,h_n\in H$ で，$h_2,\cdots,h_{n-1}$ は non-trivial とする．x を $A\cap\bigcap_{h\in H}Ah^{-1}$ から取れば，$(xh)^4=x^4=1$ より，

$$xhx=h^{-1}x^{-1}h^{-1}x^{-1}h^{-1}=h^{-1}x(x^2h^{-1}x^2)xh^{-1}=h^{-1}xkxh^{-1} \tag{2}$$

を得る．ただし，$k\in H$.
だから，(2) を使うと (1) を

$$h_1xh_2\cdots xh_{i-1}h_i^{-1}xkxh_i^{-1}h_{i+1}x\cdots xh_n \tag{3}$$

の形に長さを大きくせずに変形できる．
(2) を繰り返し使うことによって h_{i-1} を $h_{i-1}h_i^{-1}$ に，h_{i-2} を $h_{i-2}(h_{i-1}h_i^{-1})^{-1} = h_{i-2}h_ih_{i-1}^{-1}$，… と置き換えることができる．このようにすると，h_2 は以下のどれとでも置き換えることができる；

$$h_2,\ h_2h_3^{-1},\ h_2h_4h_3^{-1},\ h_2h_4h_5^{-1}h_3^{-1}, \cdots$$
$$h_2h_4\cdots h_{2s}h_{2s-1}^{-1}\cdots h_5^{-1}h_3^{-1},\ h_2h_4\cdots h_{2s}h_{2s+1}^{-1}h_{2s-1}^{-1}\cdots h_5^{-1}h_3^{-1},$$

ここで，s は $2s+1<n$ を満たしさえすればいくらでも大きく取れる．これらのうちどれか一つでも 1 に等しければ，(1) の長さを短くできる．しかし，もし $n \geq |H|+3$ ならば，これらのうち一つは 1 になるか，いづれか二つが H で等しくなる．後者の場合，次のうちどれかが成立；

$$\begin{aligned}
h_2\cdots h_{2r}h_{2r-1}^{-1}\cdots h_3^{-1} &= h_2\cdots h_{2r}h_{2r+1}^{-1}h_{2r-1}^{-1}\cdots h_3^{-1};\\
h_2\cdots h_{2r}h_{2r-1}^{-1}\cdots h_3^{-1} &= h_2\cdots h_{2r}\cdots h_{2s}h_{2s-1}^{-1}\cdots h_{2r-1}^{-1}\cdots h_3^{-1};\\
h_2\cdots h_{2r}h_{2r-1}^{-1}\cdots h_3^{-1} &= h_2\cdots h_{2r}\cdots h_{2s}h_{2s+1}^{-1}\cdots h_{2r-1}^{-1}\cdots h_3^{-1};\\
h_2\cdots h_{2r}h_{2r+1}^{-1}\cdots h_3^{-1} &= h_2\cdots h_{2r}\cdots h_{2s}h_{2s-1}^{-1}\cdots h_{2r+1}^{-1}\cdots h_3^{-1};\\
h_2\cdots h_{2r}h_{2r+1}^{-1}\cdots h_3^{-1} &= h_2\cdots h_{2r}\cdots h_{2s}h_{2s+1}^{-1}\cdots h_{2r+1}^{-1}\cdots h_3^{-1}.
\end{aligned}$$

初めの場合は，$h_{2r+1}=1$ となり，(1) の条件に反する．２番目の場合は，

$$h_{2r+2}\cdots h_{2s}h_{2s-1}^{-1}\cdots h_{2r+1}^{-1} = 1.$$

これより，(1) で h_{2r+1} は 1 で置き換えることができ表現が短くなる．残りの三つの場合もこれと同様．

もし，$n \geq |H|+3$ ならば，(1) の表現の長さを短くすることができる．これを繰り返すと，$\langle H, x\rangle$ の任意の元は (1) で $n \leq |H|+2$ なる表現をもつ．よって，$\langle H, x\rangle$ は有限．□

さて，定理 12 で構成した局所有限群（L とする）について考察する．まず次の質問から始めよう．

Q1 L の exponent は 4 か？

もし答えが Yes ならば，L は locally-nilpotent となる．すると，

補題 13 (T.Yen, e.g.[B]) *lacally nilpotent な* $\mathcal{M}_C$-*群は solvable.*

より，L は solvable．このとき，L の definable closure $\bar{L}$ も solvable．そこで次の質問

Q2 $a \in \bar{L}^o$ か？

に移る．もし答えが Yes ならば，a の中心化群は無限になり，最終的な矛盾が導かれる．

参考文献

[B] Roger M. Bryant *Groups with the Minimal Condition on Centralizers*, J. Algebra 60(1979)371-383.

[BS] J.Baldwin and J.Saxl *Logical stability in group theory*, J. Austral. Math. Soc 21(1976)267-276.

[BCM] W.Baur, G.Cherlin and A.Macintyre *Totally categorical groups and rings*, J. Algebra 57(1979)407-440.

[H] Wilfrid Hodges *Model Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[N] Ali Nesin *Solvable Groups of Finite Morley Rank*, J. Algebra 121(1989)26-39.

[S] S.Shelah *Stable theories*, Israel J. of Math 7(1969)187-202.

[W] F.Wagner *Stable Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series 240, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.