

## 2次元超音速翼列に生じる流れ場の自励振動

愛媛大学工学部 岩本 幸治(Yukiharu Iwamoto)  
Faculty of Mechanical Engineering,  
Ehime University

## 1. はじめに

遷音速圧縮機（ロータから見た流入速度がハブ側で亜音速，ティップ側で超音速になる軸流圧縮機）のティップ側では，超音速翼列と呼ばれる翼列形状が用いられている．超音速翼列の主な圧力上昇は翼列入口部または翼間に発生する衝撃波によって達成される．

一般に圧縮機では，回転数一定のもとで流量を減少させると（チョークしている場合は背圧を増加させると）運転限界である失速線に達し，旋回失速やサージなどの流れ場の自励振動が発生する．微小じょう乱線形安定解析では，流れ場の自励振動は定常性能曲線（横軸流量－縦軸背圧）の右上がり勾配で発生し，（流量増加に伴って）勾配が右上がりから右下がりに切り替わる点が失速線に対応づけられる．そのため定常性能曲線の正確な勾配を取得することが流れ場の自励振動を予測する上で重要な鍵になる．しかし超音速翼列を用いている実際の遷音速圧縮機では勾配が0に近くなる前に運転不能になるため，超音速翼列においても右上がり勾配が流れ場の自励振動に関与しているかを調べるができなかった．

Freeman and Cumpsty は，超音速翼列に用いられる翼の反りや厚みが小さい特徴を考慮して翼弦方向の運動量保存式を近似し，不始動状態（翼前縁上流に離脱衝撃波が発生している状態）にある超音速翼列の定常特性を解析的に求めた<sup>(1)</sup>．その結果では，超音速翼列の定常性能曲線に衝撃波による右上がり勾配が存在することが示されている．このことから，超音速翼列では失速線近傍で衝撃波が関連した流れ場の自励振動が発生する可能性が考えられる．本研究ではこの衝撃波が関連した流れ場の自励振動を調べるために微小じょう乱線形安定解析<sup>(2)</sup>および数値計算<sup>(3)</sup>を行い，その特徴や発生原因を調べた．

## 記号

$a$	: 音速	$m$	: 質量流量
$c$	: 翼弦長	$p$	: 圧力
$i$	: 虚数単位	$s$	: 翼列のピッチ
$k$	: $y$ 方向波数（正の実数）	$t$	: 時間
$M$	: マッハ数	$u, v$	: $x, y$ 方向速度成分

$x$ : 軸流方向座標	$\lambda$ : $x$ 方向波数 (複素数)
$y$ : 翼列軸方向座標	$\rho$ : 密度
$Z$ : 翼枚数 (= 10)	$\chi$ : 翼列の食違い角
$\gamma$ : 比熱比 (= 1.4)	$\omega$ : 複素角振動数
$\Delta t$ : 時間ステップ	

## 添字

$\wedge$ : 変動成分	22 : 翼列下流の音波による変動
$\prime$ : 変動成分の複素振幅	32 : 翼列下流の渦度変動およびエントロピー変動の波による変動
0 : よどみ点状態	$abs$ : 静止系
1 : 翼列上流または入口境界	$im$ : 虚部
2 : 翼列下流または出口境界	$re$ : 実部
11 : 翼列上流の音波による変動	

## 2. アクチュエータディスク法による微小じょう乱線形安定解析

## 2. 1 解析方法

解析は翼列とともに移動する相対系で行った。不始動状態にある超音速翼列を翼を平板で近似して描くと Fig. 1(a) のようになる。本解析では Fig. 1(a) を巨視的に見ることにより、Fig. 1(b) に示すように翼列を無限小厚さ、無限小ピッチ (本解析は非定常成分の  $x, y$  方向波数が翼列ピッチに比べて小さい場合を対象としている) を持つアクチュエータディスク (以下 AD) にモデル化する。AD 上 ( $x = 0$ ) では上・下流の流れを接続する境界条件が課せられる。本解析では定常成分が以下の 4 条件を満足するものとした。

(i) 連続の式

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (1)$$

(ii) 翼弦方向の運動量保存式

$$\rho_1 \cos \chi + \rho_1 u_1 (u_1 \cos \chi + v_1 \sin \chi) = \rho_2 \cos \chi + \rho_2 u_2 (u_2 \cos \chi + v_2 \sin \chi) \quad (2)$$

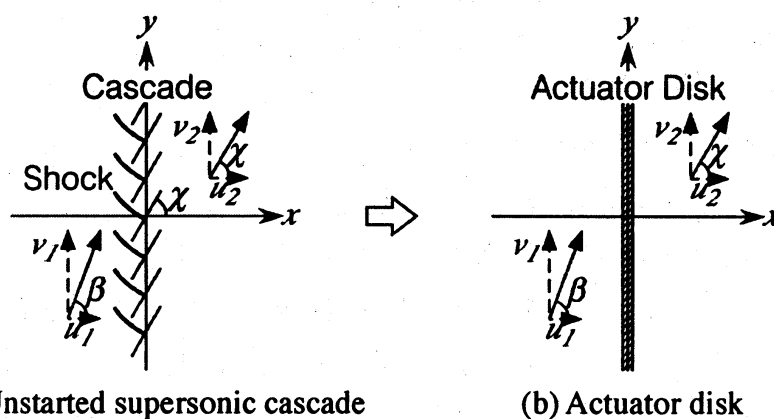


Fig. 1 Unstarted supersonic cascade and actuator disk

(iii) 全エンタルピ保存式

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}(u_2^2 + v_2^2) \quad (3)$$

(iv) Kutta の条件

$$u_2 \sin \chi - v_2 \cos \chi = 0 \quad (4)$$

定常成分に関するこれらの条件は1節で述べた Freeman and Cumpsty によって考案された定常性能評価モデルである。翼の反りや厚みが小さいことから式(2)では翼からの外力項が無視されている。(1)～(4)式を満足する翼列下流のマッハ数は2つ存在し、それらは衝撃波発生解と非発生解を表す。本解析では低マッハ数側の解を選択し、衝撃波発生時の流れを求めている。

非定常成分は微小じょう乱であると、その成分  $[\hat{\rho} \hat{u} \hat{v} \hat{p}]'$  は

$$[\hat{\rho} \hat{u} \hat{v} \hat{p}]' = [\rho' u' v' p']' \exp[i(\omega x - ky) + \lambda x] \quad (5)$$

のように複素指数関数で仮定した。ただし翼列のモデルであるため  $y$  方向波数  $k$  は正の実数としている。微小じょう乱成分の2次以上の項を無視した(線形化した)支配方程式(連続の式, Euler 方程式, エネルギー保存式)に(5)式を代入し、非自明解を仮定すると、 $x$  方向波数  $\lambda$  に関する永年方程式が得られる。この永年方程式を解くと以下に示す固有値が得られる。

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{a^2 - u^2} \left\{ iu(\omega - kv) + \alpha \sqrt{(a^2 - u^2)k^2 - (\omega - kv)^2} \right\} \quad (6)$$

$$\lambda_3 = -\frac{i}{u}(\omega - kv) \text{ (multiple root)} \quad (7)$$

式(6)で示される  $\lambda_{1,2}$  は音波に対応し、適切な複素平方根の分枝を選ぶことにより  $\lambda_1$  が翼列上流、 $\lambda_2$  が翼列下流に伝ばする波を表す。式(7)で示される  $\lambda_3$  の固有ベクトルには速度成分のみが連成して振動するものと密度のみが振動するものの2種類がある。前者は渦度変動、後者はエントロピ変動に対応する。

ここで  $\lambda_{1,2}$  の分枝の選び方について述べる。AD ( $y$  軸) 上の同一位相点は位相速度  $\omega_r/k$  で  $y$  軸上を移動する。本解析では  $0 < u < a$  を仮定しているが、 $|\omega_r/k - v| = \sqrt{a^2 - u^2}$  になれば同一位相点から見た流速は音速に達する。静止物体から発生する音波の伝わり方が  $M = 1$  を境に変化するように、本解析においても  $|\omega_r/k - v| = \sqrt{a^2 - u^2}$  を境にじょう乱の伝ば形態が変化する。そのため  $\lambda_{1,2}$  の分枝の選び方も  $|\omega_r/k - v|$  と  $\sqrt{a^2 - u^2}$  の大小関係によって異なり、 $\omega_{im} = 0$  の場合は以下のようにして  $\lambda_{1,2}$  の分枝を選ぶことができる。 $|\omega_r/k - v| < \sqrt{a^2 - u^2}$  の場合、 $\lambda_{1,2}$  の分枝として実部が正と負のものが得られる。このときは振幅が無限上、下流で0に減衰する分枝をそれぞれ  $\lambda_1, \lambda_2$  として選ぶ。 $|\omega_r/k - v| > \sqrt{a^2 - u^2}$  の場合、 $\lambda_{1,2}$  の分枝として2つの純虚数が得られる。それらの等位相面 ( $\lambda_{1,2m} x - ky = \text{const.}$ ) は同一位相点を頂点とし、翼列上、下流を通過する包絡線からなるマッハくさびを形成する。このときは等位相面の傾きから  $\lambda_{1,2}$  の分枝を選ぶことができる。以上の方法を  $\omega_{im} \neq 0$  の場合にも用いた。この方法では

$|\omega_r/k-v| > \sqrt{a^2-u^2}$  で  $\omega_{im} > 0$  の場合、翼列上、下流に向かって振幅が増加する。これは過去に大振幅で放出されたじょう乱が空間減衰なく伝わるためである。ところで  $v=0, 0 < u < a$  の 1次元流れで  $y$  軸上に  $\delta(x)H(t)e^{i\omega t}$  (ただし  $\omega_{im} > 0$  で、 $\delta$  は Dirac の delta 関数、 $H$  は Heaviside 関数) の体積湧き出しを考えた場合、 $t < 0$  でじょう乱が存在しない条件下での音圧分布  $\hat{p}$  は簡単に求めることができ、以下のようなになる。

$$\hat{p} = \frac{a^2}{2} H(t) \left( \frac{\exp[i\omega\{t+x/(a-u)\}]}{a-u} f(x) + \frac{\exp[i\omega\{t-x/(a+u)\}]}{a+u} g(x) \right) \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-(a-u)t < x < 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < (a+u)t) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (9)$$

本解析が用いた選び方で  $k \rightarrow 0$  とすると  $\lambda_1, \lambda_2$  で表される式(5)の指数部はそれぞれ式(8)右辺の第1, 2項の指数部に一致する。

本解析では翼列上流には上流に伝ばする音波  $\lambda_{11}$ 、下流には下流に伝ばする音波  $\lambda_{22}$  と渦度変動およびエントロピ変動の波  $\lambda_{32}$  の線形和が存在するものとする。各波の変動成分  $[\hat{p} \hat{u} \hat{v} \hat{p}]$  は固有ベクトルで表されるので、未知数は4つになる。非定常成分の境界条件には準静的変化を仮定し、式(1)~(4)を線形化したものを用いた。変動成分に非自明解を仮定すると  $\omega k$  に関する永年方程式が得られる。  $y$  方向波数  $k$  を正の実数としているので、得られた解  $\omega k$  の虚部は自励振動の時間的減衰率に対応する。

## 2. 2 解析結果

ここでは比熱比  $\gamma = 1.4$ 、食違い角  $\chi = 60^\circ$  の場合に対する結果を示す。流れの不安定 (自励振動発生,  $\omega_{im}/k < 0$ ) を示すモードは2種類見られた。1つのモードは非圧縮性翼列流れで典型的に見られる旋回失速を表す。旋回失速のモードが不安定を示すときは、流入マッハ数によらず性能曲線は右上がり勾配になっており、そのときの変動の伝ば速度比 (= (静止系から見た変動の伝ば速度)/(周速) =  $1 - \omega_r/(kv_1)$ ) は1よ

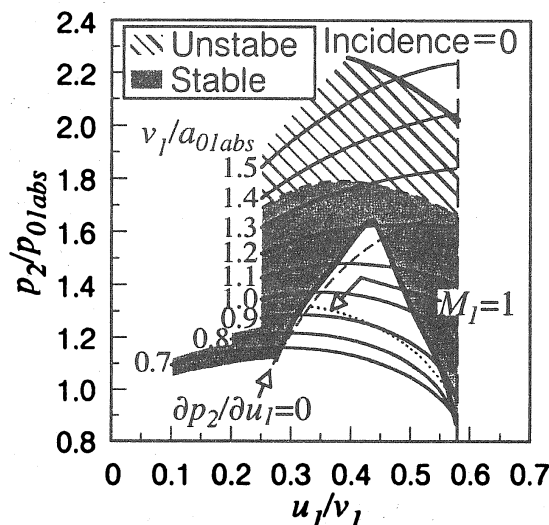


Fig. 2 Stability map of mode corresponding to shock related instability

りも小さい。もう1つのモードは超音速翼列流れに独特の衝撃波が関連した流れ場の自励振動を表していると考えられる。本モードの性能曲線上での存在範囲を Fig. 2 に示す。ハッチング領域で不安定、灰色領域で安定を示す。旋回失速と同様、本モードが不安定を示すときには性能曲線は右上がりになっているが、高流量側での伝ば速度比は1よりも大きい。本モードは圧縮性の影響が強い高回転領域 ( $v_1/a_{01abs}$  が大) において不安定を示す。また、超音速流入でかつ incidence = 0 ( $u_1/v_1 = \cot 60^\circ = 0.577$ ) の場合には、式(1)~(4)から得られる定常流れは垂直衝撃波の発生を表す。この条件下でも本モードが不安定として存在する。

### 3. 数値計算

#### 3. 1 数値計算法

衝撃波が関連した流れ場の自励振動の詳細を知るために、粘性および非粘性流れの数値計算を行った。ここでは数値計算法について述べる。対流項には Harten-Yee の2次精度 TVD スキーム、粘性項は2次精度中心差分、時間微分項は3点後退差分(2次精度)で評価した。粘性計算における乱流粘性には改良型 LES 乱流モデル<sup>(4)</sup>を用いた。粘性計算における時間ステップ  $\Delta t$  は、1/10 の時間ステップによる結果と比較して(周速)/(静止系淀み点音速) =  $v_1/a_{01abs} > 1.1$  の場合は  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$  [s] ( $v_1/a_{01abs} = 1.5, 1.3, 1.2$  に対してそれぞれ  $\Delta t/(s/v_1) = 0.0094, 0.0081, 0.0075$ )、 $v_1/a_{01abs} \leq 1.1$  の場合は  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$  [s] ( $v_1/a_{01abs} = 1.1, 0.9, 0.8, 0.6$  に対してそれぞれ  $\Delta t/(s/v_1) = 0.069, 0.056, 0.050, 0.037$ ) とした。非粘性計算では全て  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$  [s] ( $v_1/a_{01abs} = 1.5, 1.3, 1.2, 1.1$  に対してそれぞれ  $\Delta t/(s/v_1) = 0.0094, 0.0081, 0.0075, 0.0069$ ) とした。

Fig. 3 に粘性計算格子を示す。10 翼間で1周期を仮定し、各翼には1から10までの翼番号をつける。上・下流に H 型、各翼まわりに O 型格子を配置している。格子点数は H 型格子が上・下流ともに  $\xi \times \eta = 65 \times 321$ 、O 型格子が1つあたり  $241 \times 33$  である。翼面上最小格子高さは翼弦長に対して  $10^{-5}$  ( $y^+ \sim 2$ ) である。入口、出口境界はそれぞれ翼前縁、後縁から2翼弦長の位置にある。翼列形状には ARL-SL19 翼列<sup>(5)</sup>を用いた。その主要諸元を Table 1 にまとめる。非粘性計算格子の格子点数は上流の H 型格子が  $\xi \times \eta = 29 \times 321$ 、下流の H 型格子が  $65 \times 321$ 、O 型格子が1つあたり  $241 \times 17$  である。非粘性計算では下流域に発生する衝撃波が減衰しにくいため、計算領域内への数値的反射を抑えるべく後縁から5翼弦長の位置に出口境界をとっている。

境界条件は以下のように取り扱った。入口境界では静止系全温  $T_{01abs} = 300$  [K]、静止系全圧  $p_{01abs} = 0.1$  [MPa]、周速 (y 方向速度)  $v_1$  を与え、計算領域内点から1次元 Riemann 不変量を外挿した。出口境界では静圧  $p_2$  を与え、密度、x, y 方向の運動量を外挿した。粘性計算の翼面境界では粘着、断熱条件を課した。非粘性計算では全エンタルピを外挿して運動学的境界条件を課した。周期境界および異なる格子とつながる境界では算術平均を用いた。陽的なじょう乱は与えていない。

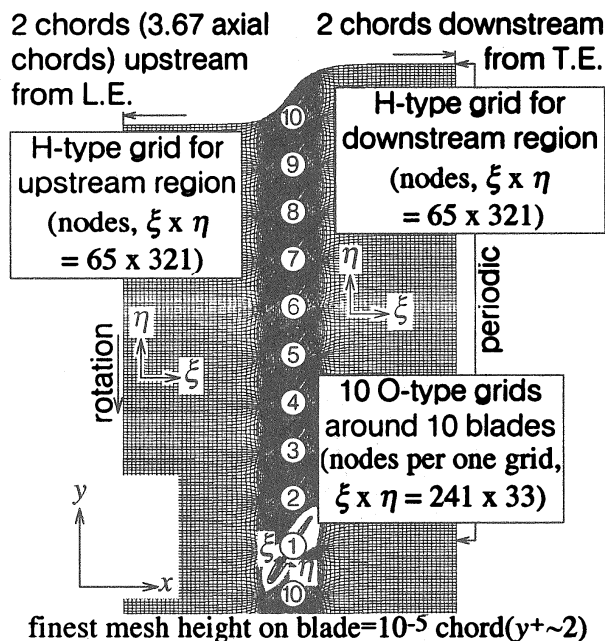


Fig. 3 Computational grid for viscous calculation (Every other grid line is shown)

Table 1 Outline of ARL-SL19 cascade<sup>(5)</sup>

Solidity, chord/pitch	1.5294
Stagger angle	56.93°
Maximum blade thickness/chord	0.0255
Blade chord	85 mm
Leading edge radius/chord	0.00128
Design relative inlet Mach number	1.612
Camber angle at leading edge	-2.89°
Design static pressure ratio	2.15

### 3. 2 数値計算結果

粘性，非粘性計算結果を性能曲線にして Fig. 4 に示す。記号のある点が計算点であり，黒抜きの点で定常流れが得られた。白抜きの点では流れが非定常になるが，それらのうち○で示された点では変動が周 (y) 方向に伝ばする現象が見られた。変動が周方向に伝ばする現象は粘性計算では 4 種類（その内 1 つは旋回失速），非粘性計算では 2 種類に分類される。アクチュエータディスク解析の結果と変動の伝ば速度を比較した結果，粘性，非粘性いずれの計算においても Fig. 4 のラベル A ~ O を付

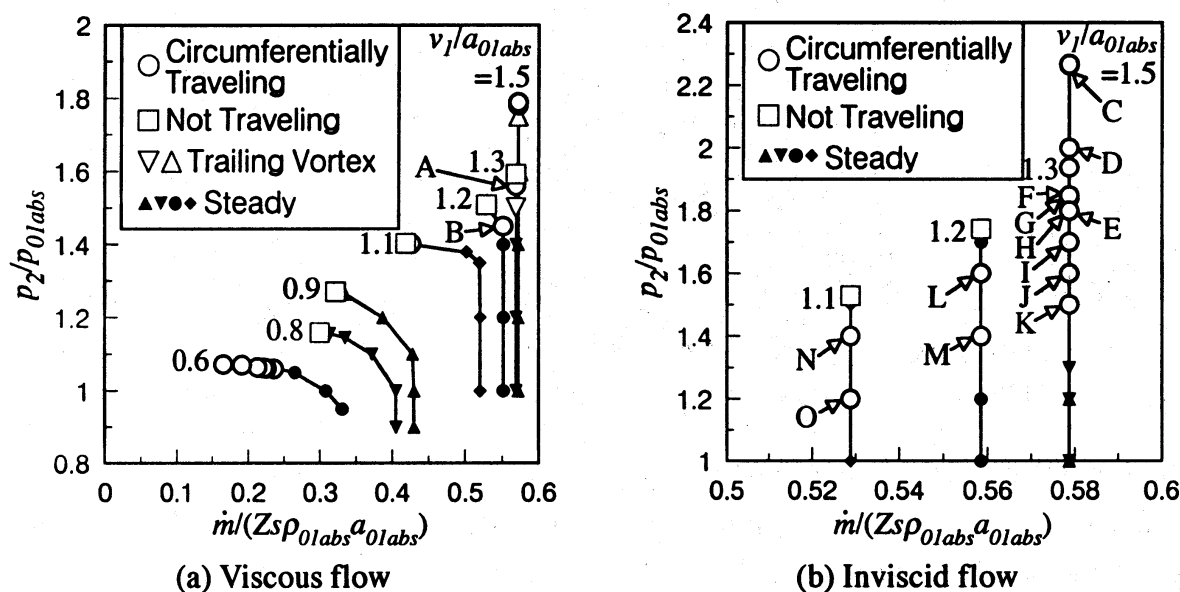


Fig. 4 Performance curves

した作動点で衝撃波が関連した流れ場の自励振動に相当する現象が見られた。流れ場の特徴や発生原因を示すために、粘性計算では作動点 A ( $v_1/a_{01abs} = 1.3$ ,  $p_2/p_{01abs} = 1.56$ ), 非粘性計算では作動点 E ( $v_1/a_{01abs} = 1.5$ ,  $p_2/p_{01abs} = 1.8$ ) の結果を示す。

Fig. 5 に作動点 A, E での静圧等高線を示す。いずれの場合も翼列下流域の灰色部分が高圧領域である。この高圧領域が周速方向（図では下向き）に移動し、それに相関して翼間に発生する衝撃波が振動する。変動の伝ば速度比は作動点 A で 1.19,

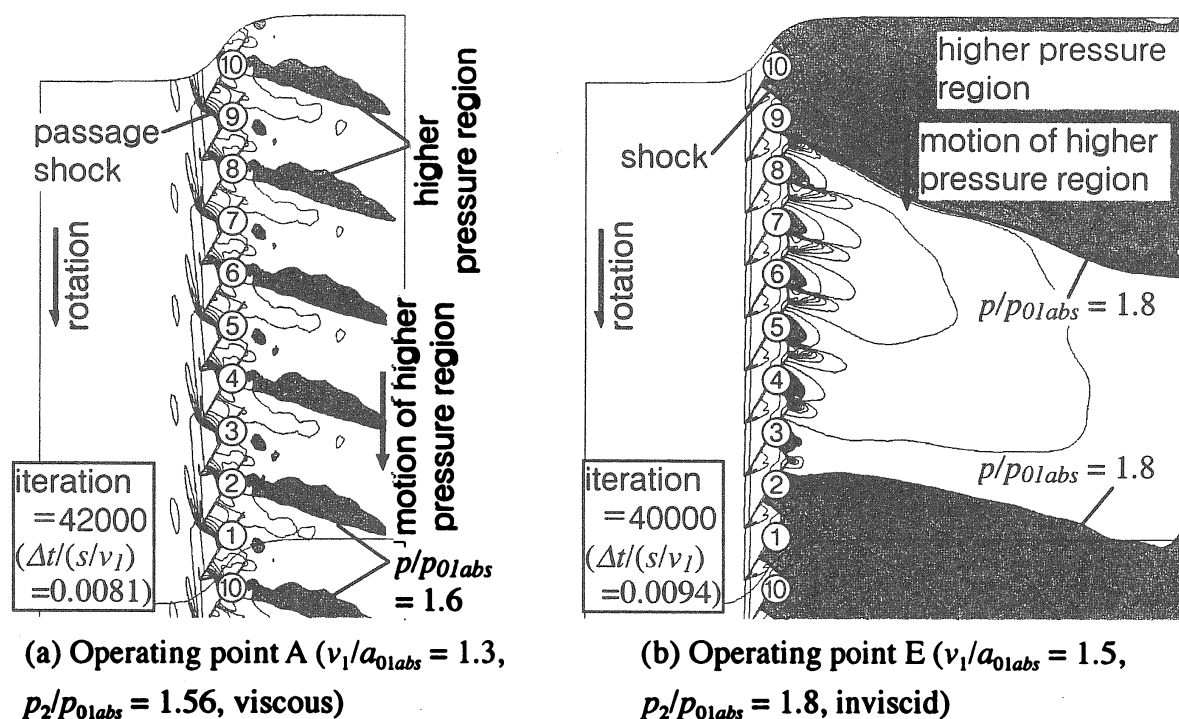


Fig. 5 Static pressure contour (increment of  $p/p_{01abs} = 0.1$ )

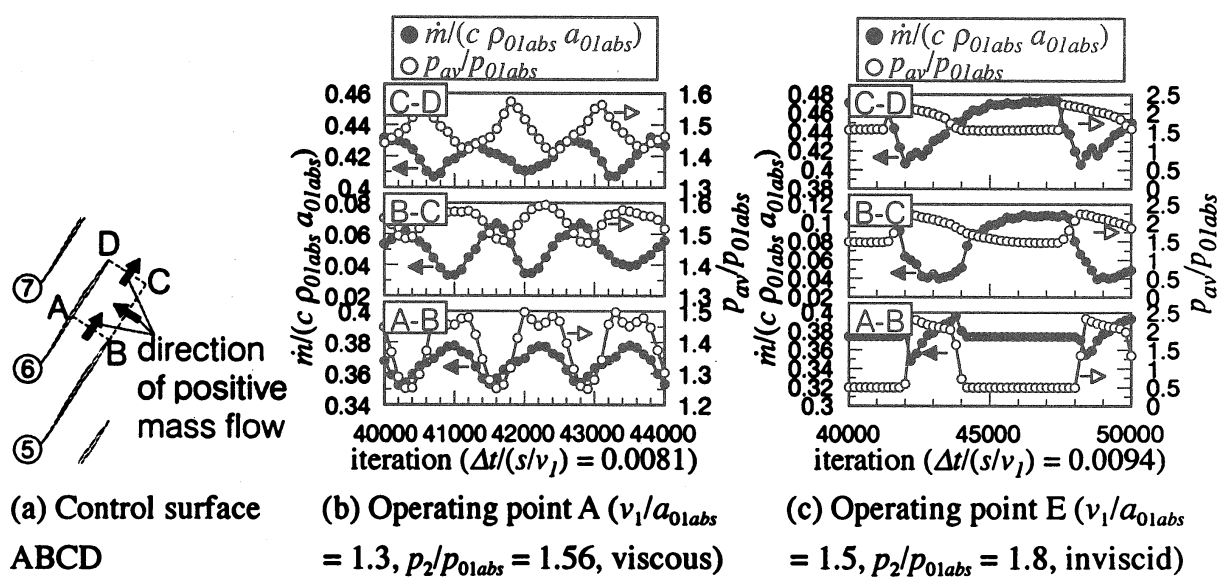


Fig. 6 Relationship between mass flow and area averaged static pressure on segments AB, BC,

E で 1.17 である。また、伝ば速度比から高圧領域とともに移動する座標系から見た高圧領域先端 (Fig. 5 の灰色部分の下側) の上→下流のマッハ数を算出してみたところ、作動点 A では  $1.13 \rightarrow 0.95$ , E では  $1.27 \rightarrow 0.86$  になった。これらは垂直衝撃波の場合 ( $1.13 \rightarrow 0.89$ ,  $1.27 \rightarrow 0.80$ ) に近いので、高圧領域の先端は弱い衝撃波になっていると考えられる。

Fig. 6 は(a)で示される翼列出口部の3つの検査面を通して流入出する質量流量と面積平均静圧の変化を示したものである。境界 CD の静圧が上昇する(高圧領域が境界 CD に達する)時にそこでの流量が減少する。境界 BC での流量が最小値をとるときには境界 AB での流量が大きくなり、境界 CD での流量が小さくなる傾向にある。このことから、ある翼列出口部における流量変化が周速方向に隣接する翼間からの流出を抑制していると考えられる。抑制された部分には新たに高圧領域が発生するため、結果として高圧領域は周速方向へ移動する。

#### 4. まとめ

衝撃波が関連した流れ場の自励振動を調べるために微小じょう乱線形安定解析および数値計算を行った。結果は以下のようにまとめられる。

- (1) アクチュエータディスク法による微小じょう乱線形安定解析では、超音速翼列には旋回失速の他に衝撃波が関連した流れ場の自励振動を表すモードがあることが示された。本モードが不安定を示す(自励振動が発生する)ときには性能曲線は右上がりになっており、高流量側での伝ば速度比は1よりも大きい。
- (2) 粘性および非粘性流れの数値計算では、いずれの流れ場においても衝撃波が関連した流れ場の自励振動に相当する現象が見られた。この現象では翼列下流にある高圧領域が周速方向に移動し、それに相関して翼間に発生する衝撃波が振動する。変動が周速方向に伝ばする理由としては、ある翼列出口部における流量変化が周速方向に隣接する翼間からの流出を抑制し、その抑制された部分に新たに高圧領域が発生することが挙げられる。

#### 参考文献

- (1) Freeman, C. and Cumpsty, N. A., 1989, *ASME Paper* 89-GT-326.
- (2) 岩本幸治, 横田和彦, 辻本良信, 1997, *機論(B編)*, 63巻, 612号, pp. 2667-2675.
- (3) 岩本幸治, 横田和彦, 辻本良信, 2002, *日本ガスタービン学会誌*, 30巻, 1号, pp. 55-62.
- (4) 高倉葉子, 小川哲, 石黒登美子, 1988, 第6回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, pp. 215-221.
- (5) Tweedt, D. L., Schreiber, H. A. and Starcken, H., 1988, *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 110, No. 4 pp. 456-466.