数理解析研究所講究録 1285 巻 2002 年 178-185

水平発散のある f-面準地衡乱流の自己相似的発展

九州大学応用力学研究所　増田　章 (Masuda akira)
Research Institute for Applied Mechanics,
Kyushu University

水平発散効果を受け，スペクトル形を保ちながら発展する f-面上の準地衡乱流に関する三つの主題を扱う．最初に，自由減衰する準地衡乱流を論じる．この結果は，水平発散がない場合，Batchelor　(1969) の議論を一部に含む．次に慣性領域を論じる．流線関数のパワーあるいは運動エネルギーのスペクトルの方が，ポテンシャルを含めた全エネルギーよりも記述が容易になる．実際，運動エネルギー・スペクトルは，水平発散の有無によらず，同一の波数スペクトルを持つ．エネルギー流束 ϵ が決めるなら $\epsilon^{3/2}k^{-5/3}$ 形であり，エンストロフィー流束 η が決めるなら $\eta^{2/3}k^{-3}$ 形である．但し k は波数である．最後に，スペクトルの発展を常微分方程式の形に定式化する．自己相似性を仮定するので，全エネルギー，全エンストロフィー，ピーク波数の変化を記述する方程式を求めることになる．この常微分方程式に基づく力学は，水平発散効果を受け，あるいは受けない f-面上の準地衡乱流の自己相似なスペクトル発展を，様々な状況で統一的に説明する．この考え方と手法は，自由減衰乱流にも強制乱流にも適用できる．また有限の散逸を伴う場合を取り扱うことも可能である．

1　はじめに

海洋と大気の大規模で不規則な渦運動は準二次元であり，赤道域を除き準地衡渦度方程式に支配される．そのため準地衡乱流と呼ばれている．しかし，海洋と大気の運動には，ベータ効果や密度成層効果，海底地形効果といった地球流体力学的因子が強く働く．そのため準地衡乱流は「純」二次元乱流ではない．海洋と大気の大規模な渦全体の統計的特性を理解するには，上にあげたような地球流体力学的効果が 2 次元乱流の発展にどのような違いをもたらすかを解明していく必要がある．実際，順圧準地衡乱流においてベータ効果が働くと，二次元乱流に特有のエネルギー赤方輸送を止め，東西流成分を卓越させる．この現象は Rhines 効果と呼ばれ良く知られている (Rhines 1975, 1979)．しかし，「順圧化」を封じると，今度は密度成層に起因する水平発散効果がベータ効果を抑制するということも起こる．Okuno and Masuda (2002) では，水平発散のこの効果を数値実験により確認すると同時に，水平発散がベータ効果を抑制する仕組みを明らかにした．このように，地球流体力学的因子の効果は複雑なので，今後とも丹念に解明していく必要がある．

本研究では，f-面上準地衡流乱流に及ぼす密度成層ないし水平発散の影響を考察する．ここで扱う三つの主題は，相互に密接に関連しており，「水平発散」を含む f-面準地衡乱流スペクトルの「自己相似」な発展にまつわるものである．なお，最も重要と思われる第 4 節の動力学以外は，考え方の道筋のみを記す (詳細は Masuda 2002).

但し基礎方程式と数値実験の概略だけは述べておく．β 効果が無いこと以外は普通の準地衡乱流と同様である (Okuno and Masuda 2002)．f-面上の一層の海とする (表層と下層からなる二層

の海を想定する．ただし下層は静止していると考える)．東西・南北双方に周期的境界条件を課す．東向きに x 軸，北向きに y 軸，鉛直上向きに z 軸をもつ直交座標系をとり，時間を t で表すと，準地衡流渦位方程式に基づく渦位の時間発展は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi - F\psi) + J\left(\psi,\ \nabla^2\psi - F\psi\right) = -\nu_h\nabla^6\psi \tag{1}$$

と表される．ここで ψ が準地衡流線関数，$J(\cdot,\ \cdot)$ は Jacobian 演算子で，∇ は水平 nabla 演算子である．また $F=\lambda^2$ が水平発散の効果の大きさを与える量で，λ^{-1} は Rossby の変形半径に相当する．そのほか，水平規模の小さい運動を効果的に散逸させるために重調和型の水平超粘性を与える．ν_h はその係数である．実験では，自由減衰ほか様々な状況において λ を変えてみた．初期条件は狭い波数域にエネルギーを持つ等方的不規則乱流である．時間積分には擬スペクトル法を用いる．プラズマの分野ではこの基礎方程式を Charney-Hasegawa-Mima 方程式と呼んでいる (Horton and Hasegawa 1994)．なお，この方程式は成層した海洋の準地衡乱流を忠実に表現していない．鉛直モード間の変換を許さない単一モードの発展方程式である．順圧化を人為的に抑えているので，水平発散効果を純粋に考察できるという利点がある．

2 自由減衰乱流の自己相似な発展

純二次元乱流の自己相似的自由減衰については既に Batchelor (1969) の有名な研究がある．彼はエネルギー散逸が無く t が大きい時の振舞いを考え，初期状態によらない自己相似なスペクトル発展があることを仮定した．その場合，外部径数は乱流速度尺度 U と時刻 t しかない．内部変数は波数 k のみである．こう仮定すれば，次元的考察により 1 次元 (運動) エネルギースペクトル $E(k)$ を

$$\frac{E(k)}{E_p} = \frac{E(k)k_p}{U^2} =^{\exists} e\left(\frac{k}{k_p}\right) = e\,(Ukt)\,, \tag{2}$$

$$k_p = k_p(U,t) = \frac{1}{Ut}, \qquad E_p = E_p(U,t) = U^3 t = \frac{U^2}{k_p} \tag{3}$$

と表すことができる．但し E_p はピークスペクトル密度に対応し，k_p はスペクトルピーク波数または特性波数である．この表現を水平発散がある場合 $(\lambda \neq 0)$ に拡張したい．

さて，$\phi(k)$ を流線関数の 1 次元スペクトルとしよう．水平発散がある場合には，運動エネルギー・スペクトル $E^{(\mathrm{k.e.})}(k)$，ポテンシャル・エネルギーを加えた全エネルギーのスペクトル $E(k)$，エンストロフィー・スペクトル $W(k)$ はそれぞれ

$$E^{(\mathrm{k.e.})}(k) \equiv k^2\phi(k) \quad , \qquad E(k) \equiv (\lambda^2+k^2)\phi(k), \qquad W(k) \equiv k^2 E(k,t) \tag{4}$$

と表される．自己相似性の仮定から

$$\frac{\lambda^2+k_p^2}{\lambda^2+k^2}\frac{E(k,t)k_p}{U^2} = \frac{\phi(k,t)k_p}{\frac{U^2}{\lambda^2+k_p^2}} =^{\exists} e\left(\frac{k}{k_p}\,;\frac{\lambda}{k_p}\right), \tag{5}$$

$$k_p U t = {}^{\exists}f(\lambda U t) \tag{6}$$

を得る．次元的考察はここまでである．そこで基礎方程式をよく眺めて更に次の仮定をする．すなわち，外部径数 U, t は $U^2/(\lambda^2+k_p^2)$, $t/(\lambda^2+k_p^2)$ の組み合わせで入り k_p が決まるとする．こうすれば関数 f の形が決まり次式を得る:

$$\frac{\lambda}{k_p} = \left[\lambda^3\frac{\lambda\cdot Ut}{(\lambda^2+k_p^2)^{\frac{3}{2}}}\right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{\lambda\cdot Ut}{(1+\frac{k_p^2}{\lambda^2})^{\frac{3}{2}}}\right]^{\frac{1}{4}} \sim \begin{cases} \left[\frac{\lambda^3}{k_p^3}(\lambda\cdot Ut)\right]^{\frac{1}{4}} \sim \lambda\cdot Ut & (k_p \gg \lambda) \\ (\lambda\cdot Ut)^{\frac{1}{4}} \sim \lambda\cdot\left(\frac{Ut}{\lambda^3}\right)^{\frac{1}{4}} & (k_p \ll \lambda) \end{cases}. \tag{7}$$

スペクトル形 e も一般には，λ/k_p に依存する:

$$\frac{\phi(k,t)k_p}{\frac{U^2}{\lambda^2+k_p^2}} = e\left(\frac{k}{k_p};\frac{\lambda}{k_p}\right) = \begin{cases} e\left(Ukt;\frac{\lambda}{k_p}\to 0\right) & (k \gg \lambda) \\ e\left(\left[\frac{Ut}{\lambda^3}\right]^{\frac{1}{4}}k;\frac{\lambda}{k_p}\to\infty\right) & (k \ll \lambda) \end{cases}. \tag{8}$$

前と同様，流線関数のスペクトルを決める際外部径数 U, t が $U^2/(\lambda^2+k_p^2)$, $t/(\lambda^2+k_p^2)$ の組み合わせで入るべきと考えると普遍スペクトル形が λ/k_p に依存しなくなる．これは後で述べる慣性領域のスペクトル形と矛盾しない．但し波数の小さいところでは問題がある．しかしこの仮定が成り立たない場合でも $\lambda/k_p \longrightarrow 0$ または ∞ を論じていると考えることはできる．

水平発散が無い場合，この表現は Batchelor の理論と同じになる．逆に水平発散が大きいときは，特性波長 $\sim 1/k_p \propto t^{1/4}$，ピークスペクトル密度 $E_p \propto t^{1/4}$ となる．これは Watanabe et al. (1998) の数値実験と考察，並びに後で述べる議論と矛盾しない．

ここでは省いたが，水平発散の無い場合と同様 (Batchelor 1969)，エンストロフィー散逸領域スペクトルが慣性領域スペクトルとうまく接続することなどを示すことができる．

3　慣性領域のスペクトル形

基礎方程式の各項の釣り合いを考える．出だしは Watanabe et al. (1998) と同じである．しかし推論の途中で異なる見積もり方をする．その結果得られるスペクトル形は簡明で見通しが良い．また数値実験結果とも矛盾しない．

さて基礎方程式の非線形項と時間変化項の釣り合いから

$$\frac{(\lambda^2+k^2)\psi}{t} \sim k^4\psi^2 \Rightarrow \psi \sim \frac{(\lambda^2+k^2)}{k^4t} \Rightarrow \psi \approx \frac{(\lambda^2+k^2)}{k^4t}\exists f\left(\frac{k}{\lambda}\right). \tag{9}$$

を得る．エネルギー流束 ϵ で決まるスペクトルを求めるには次のようにする．先ず

$$\epsilon \sim \frac{(\lambda^2+k^2)\psi^2}{t} \sim k^4\psi^3 \Rightarrow \frac{\lambda^2+k^2}{t_\epsilon} \sim \epsilon^{\frac{1}{3}}k^{\frac{8}{3}}f^{-1}\left(\frac{k}{\lambda}\right). \tag{10}$$

となる．従って

$$\phi(k) \sim \frac{\psi_\epsilon^2(k)}{k} \sim \frac{(\lambda^2+k^2)^2}{k^9t_\epsilon^2}f^2\left(\frac{k}{\lambda}\right) = \epsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{11}{3}} \tag{11}$$

となる．途中で関数 f が自動的に消えている．エンストロフィー散逸 (流束) η の場合も同様である．まとめると次のようになる．慣性領域の流線関数スペクトルの形は，水平発散の指標 λ に依存せずまた強制系であろうと自由減衰系であろうと同じである．エネルギー流束 ϵ で決まるなら

$$\phi(k,t) \sim \epsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{11}{3}} \qquad E^{(\mathrm{k.e.})}(k,t) \sim \epsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}} \qquad E(k,t) \sim \epsilon^{\frac{2}{3}}(\lambda^2+k^2)k^{-\frac{11}{3}} \tag{12}$$

であり，エンストロフィー流束 η で決まるなら

$$\phi(k,t) \sim \eta^{\frac{2}{3}}k^{-5} \qquad E^{(\mathrm{k.e.})}(k,t) \sim \eta^{\frac{2}{3}}k^{-3} \qquad E(k,t) \sim \eta^{\frac{2}{3}}(\lambda^2+k^2)k^{-5} \tag{13}$$

である．全エネルギーで見るより，流線関数のパワーまたは運動エネルギーで表現する方が簡明であることが分かる．事実，数値実験を行うと，$k \sim \lambda$ 付近に運動エネルギースペクトルの折れ曲がりや凹みなど見当たらない．上の慣性領域スペクトル形は妥当なものであろう．

なお，Watanabe et al. (1998) は，強制乱流の数値実験を基に，次元的解析を行い興味深い理論的結果を多く得ている．但し，自由減衰に対してもエネルギー散逸を基にしている．しかし，自由減衰を規定するのは，エネルギー散逸でなく寧ろエンストロフィー散逸である．実際に，エンストロフィー散逸により規定されるスペクトルの発展を調べると Watanabe et al. (1998) と同じ結論を得る．長くなるので詳細は Masuda (2002) に譲る．

4　スペクトル発展の直接考察　動力学

Watanabe et al.(1998) は水平発散の効く自由減衰で $E_p \sim t^{-1/4}$ になるという議論を展開している．また数値実験でも概ねこの結論を支持する結果を得ている．しかしながら数値実験では若干の食い違いが残った．Iga and Watanabe (2002) はこの食い違いの原因を切断波数における有限のエネルギー散逸によるものとし，これを定量化するための議論を展開し興味深い結果を得ている．ただバルク模型風表現を用いているため連続スペクトルの表現に難があった．

本研究では有限量のエネルギー散逸を含めて定量化する方法を求め，動力学という簡明な考え方に至った．この考え方は，様々な状況における自己相似なスペクトル発展に統一した視点を与え，解釈を容易にするだけでなく定量的な扱いも可能にする．その意味で汎用性のある優れた方法であろう．その基礎も単純で，高波数側スペクトルがエンストロフィー散逸で決まること，自己相似的にスペクトル発展することの二つだけである．

切断波数を k_d とし，その切断波数付近でのエネルギー散逸を E_d，エンストロフィー散逸を η_d と書こう．切断波数付近以外ではエネルギー散逸もエンストロフィー散逸も生じないとしておく．切断波数までの全エネルギーを E，切断波数までの全エンストロフィーを W とする．また，自己相似な形を保ちつつスペクトルが発展することを仮定する．このとき

$$W = E_p k_p^3 \int_0^{\frac{k_d}{k_p}} k'^2 \;\; {}^{\exists}e\left(k';\frac{\lambda}{k_p}\right) dk' \tag{14}$$

$$E = E_p k_p \int_0^{\frac{k_d}{k_p}} e\left(k';\frac{\lambda}{k_p}\right) dk' = \frac{W}{k_p^2}\frac{\int_0^{\frac{k_d}{k_p}} e\left(k';\frac{\lambda}{k_p}\right) dk'}{\int_0^{\frac{k_d}{k_p}} k'^2 e\left(k';\frac{\lambda}{k_p}\right) dk'} \tag{15}$$

$$W = W_d = k_d^2 E_d = k_d^2 d\left(\frac{W}{k_p^2}\cdot {}^{\exists}h\left(\frac{k_p^2}{k_d^2};\frac{\lambda}{k_p}\right)\right) = d\left(W\frac{k_d^2}{k_p^2}\cdot {}^{\exists}h\left(\frac{k_p^2}{k_d^2};\frac{\lambda}{k_p}\right)\right) \tag{16}$$

となる．$\lambda/k_p \to 0$ または $\lambda/k_p \to \infty$ の極限を扱う場合は

$$e = e\left(k';\frac{\lambda}{k_p}\right) \quad = e\left(\frac{k}{k_p}\right), \qquad h = h\left(\frac{k_p^2}{k_d^2};\frac{\lambda}{k_p}\right) \quad = h\left(\frac{k_p^2}{k_d^2}\right) \tag{17}$$

と置いて良い．そのように考え，以下では λ/k_p を陽に書かない．ここで $\kappa \equiv k_p^2/k_d^2$ とおけば，

$$dW = d\left(W\frac{h(\kappa)}{\kappa}\right) = \frac{h(\kappa)}{\kappa}\cdot dW + W\cdot d\left(\frac{h(\kappa)}{\kappa}\right) \tag{18}$$

となり，これを解いて

$$W\left[1-\frac{h(\kappa)}{\kappa}\right] = \text{const} \qquad \Rightarrow \frac{W}{W_0} = \frac{1-\frac{h(\kappa_0)}{\kappa_0}}{1-\frac{h(\kappa)}{\kappa}} \tag{19}$$

を得る．これが W (または E) と k_p の間の関係である．これは Iga and Watanabe (2002) の結果の一部を連続スペクトルに拡張したものに相当する．しかしまだ不十分である．W または k_p を別途評価しなければならないからである．

こうして時間変化を陽に考慮した定式化，すなわち動力学が必要になってくる．考え方を概説しよう．λ が大きく ϵ が小さい極限の自由減衰を先ず例にとる．

高波数側のエンストロフィー・スペクトルを

$$W(k) \sim \eta^{\frac{2}{3}}\lambda^2 k^{-3} \sim W_p\left(\frac{k}{k_p}\right)^{-3} \tag{20}$$

と二様に書くことができる．自己相似スペクトルの仮定から総エンストロフィーは

$$W \equiv \int W(k)\,dk \sim W_p k_p \tag{21}$$

である．これを最初の式に代入すれば，総エンストロフィー W の散逸が

$$\eta \sim \frac{k_p^3}{\lambda^3}W^{\frac{3}{2}} \tag{22}$$

と表されることが分かる．従って総エンストロフィーの発展を記述する微分方程式は

$$\frac{dW}{dt} = -\eta \sim -\frac{k_p^3}{\lambda^3}W^{\frac{3}{2}} \tag{23}$$

となる．エネルギー散逸 $\epsilon \to 0$ の極限を考えているので

$$\frac{W}{k_p^2} \sim E = U^2 = U_0^2 = E_0^2 \sim \frac{W_0}{k_{p0}^2} \tag{24}$$

となる．ただし添え字 0 は初期値を表す．この式が本節で最初に述べた関係に対応する．これを用いてピーク波数 k_p を消去すれば微分方程式を

$$\frac{dW}{dt} \sim -\frac{W^3}{U^3\lambda^3} \tag{25}$$

と書き直すことができる．解は

$$\frac{1}{W^2} \sim \frac{2t}{U^3\lambda^3} \tag{26}$$

となり，

$$k_p \;\sim\; \frac{W^{\frac{1}{2}}}{U} \sim \left(\frac{Ut}{\lambda^3}\right)^{-\frac{1}{4}}, \qquad E_p \sim \frac{U^2}{k_p} \sim U^2\left(\frac{Ut}{\lambda^3}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{27}$$

を得る．これらは前節の議論や Watanabe et al. (1998). の数値実験ならびに議論と符合する．

もう一つの例は水平発散の小さい，上とは逆の極限である．上と全く同じ議論を用いて

$$\frac{dW}{dt} \;=\; -\eta \sim -W^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow W \sim \frac{1}{t^2} \tag{28}$$

という具合に微分方程式とその解を得る．従って

$$k_p \;\sim\; \frac{W^{\frac{1}{2}}}{U} \sim \frac{1}{Ut}, \qquad E_p \sim \frac{U^2}{k_p} \sim U^3 t \tag{29}$$

となり，当然ながら Batchelor (1969) の相似解と同じ結果を与える．

この方法を準地衡乱流の様様な状況に適用してみた．水平発散の有無も問わないし自由減衰乱流か強制乱流かも問わない．その結果，この動力学を用いれば，吟味した全ての状況のスペクトル発展を，一貫して明快に記述することが分かった．その多くが従来は様様な手法で議論されていたものである．例えば，次元的な議論だけでは自由減衰 2 次元乱流のスペクトル発展に関する Batchelor の相似形を理解するのは難かしい．しかし，この動力学を用いれば明快になる．

本節の最後に，この議論を従来殆ど調べられていなかった発展状況に適用してみよう．水平発散は大きい者とする．数値実験において相互作用の仕方を殆ど変えないが，全運動エネルギーは保存するようにフーリエ振幅を人為的に調節するという状況である．詳細は略すが，ベータ効果に及ぼす水平発散の効果を見る研究で実際にこの手法を採用した (Okuno and Masuda 2002)．その数値実験と同様，$k \ll \lambda$ の状況を考える．

$$W \;\approx\; \lambda^2 E^{(k.e.)} = \text{const} \tag{30}$$

から分かるように，総運動エネルギーの保存は，総エンストロフィーの保存に他ならない．従ってエンストロフィー散逸は全体として無いわけで $\eta \approx 0$ である．切断波数の所で失うエンストロフィー η_d の分だけを全波数域で少しずつ補充する．全域で補充するエントロフィーは，総和としては η_d に等しいが，個々の波数域では極く僅かなので，スペクトル形は η_d で決まる．エンストロフィーを供給していれば，エネルギーも供給している．従って

$$\frac{dE}{dt} \;\sim\; -\frac{\eta}{k_d^2} + \frac{\eta}{k_p^2} = -\left(\frac{1}{k_d^2} - \frac{1}{k_p^2}\right)\eta \sim \frac{\eta}{k_p^2} \sim \frac{k_p^4}{\lambda^3}E^{\frac{3}{2}} \tag{31}$$

となる．ここで $k_p \ll k_d$ を用いたし，高波数側スペクトル形が η_d で決まることを用いた．運動エネルギーを保存するような調節を施しているので

$$E \cdot k_p^2 \;=\; \text{const} = E_0 \cdot k_{p0}^2 \tag{32}$$

である．これを代入して

$$\frac{dE}{dt} \sim \frac{k_{p0}^4 E_0^2}{\lambda^3} E^{-\frac{1}{2}} \tag{33}$$

を得る．その解は

$$E^{\frac{3}{2}} \sim \frac{3k_{p0}^4 E_0^2}{2\lambda^3} t \tag{34}$$

である．これから

$$\frac{E}{E_0} \sim \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{k_{p0}^{\frac{8}{3}}}{\lambda^2} E_0^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \sim \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{U_0 t k_{p0}^3}{\lambda^2}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{35}$$

となること，及び

$$\frac{k_p}{k_{p0}} \sim \sqrt{\frac{E_0}{E}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\lambda^2}{U_0 t k_{p0}^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{k_{p0}} \left(\frac{\lambda^2}{U_0 t}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{36}$$

が出てくる．実際に数値実験を行い，ピーク波数 $\sim t^{-1/3}$ という予測を確かめることが出来た．定式化を見れば分かるように，有限のエネルギー散逸を含む場合でも，本方法に基づく常微分方程式を導いて，スペクトルの発展を数値的に追跡することができる．

ここまでくるとこの方法が自由減衰 3 次元乱流の論法に通じることに気づく．基礎となるのはエネルギー散逸を表現するもので

$$\frac{dE}{dt} = -\epsilon \sim -k_p E^{\frac{3}{2}} \tag{37}$$

と表される．しかし，準地衡乱流とは異なり，自由減衰 3 次元乱流では総 (運動) エネルギー E とピーク波数 k_p とを結びつける簡単な関係がない．そこで，乱流の大域構造に関する Loitsiansky の仮定または Birkhoff の仮定を使う．Loitsiansky の仮定を採用すれば

$$\frac{E}{k_p^5} = \frac{E_0}{k_{p0}^5}. \tag{38}$$

を得る．従って総エネルギーの変化を記述する常微分方程式は

$$\frac{dE}{dt} \sim -\frac{k_0}{E_0^{\frac{1}{5}}} E^{\frac{17}{10}} \tag{39}$$

と E だけで閉じる．その解は

$$E \sim \left(\frac{k_0}{E_0^{\frac{1}{5}}} t\right)^{-\frac{10}{7}}. \tag{40}$$

となり良く知られた結果を得る．Birkhoff の仮定を用いる場合も勿論同じである．

準地衡乱流の方が 3 次元乱流より扱いやすい．エネルギーの保存が総エンストロフィー W (あるいは総エネルギー E) とピーク波数 k_p とを陽に結びつける関係式を与えるからである．3 次元乱流では，Loitsiansky の仮定とか Brikhoff の仮定といった議論の余地のある仮定を用いる必要があったからである．

5 おわりに

自己相似なスペクトル発展に限定した上で，水平発散 ($\lambda \neq 0$) が f-面準地衡乱流の振る舞いに及ぼす影響を調べた．

最も重要な結果は自己相似性と慣性領域スペクトルを基礎とする動力学であろう．従来，自己相似なスペクトル発展は次元解析など様々な手段で考察されてきた．しかし，ここで考えた動力学を用いれば，自由減衰，運動エネルギーを一定に保つ発展，エネルギーを特定波数域に注入し続ける強制乱流等の発展の様子を統一的に説明することができる．Batchelor の自由減衰相似解がどういう意味かは分かりにくい．しかし動力学の見地から見れば納得できるようになるのである．

要点は，自己相似性を基に E, W と k_p の発展を記述する常微分方程式を導くことにある．強制問題も扱えるし有限のエネルギー散逸を含んでも良い．また切断波数付近で有限のエネルギー散逸がある場合を含め定量的記述が可能になる．

今後は更にベータ面乱流へと研究を進めていく必要がある．但し波動性が入るベータ面上の乱流は極めて難しい．現象としてはよく知られた Rhines 効果すら明快な説明は無い．東西流が強く非等方になるので 1 次元スペクトルでは済まない．2 次元スペクトルをまともに扱わなければならなくなる．ベータ面は面白いが難しい．

参考文献

[1] G. K. Batchelor (1969): Computation of the energy spectrum in homogeneours two-dimensional turbulence. *Phys. Fulids*, **12**, Supple. II, 233- 349.

[2] W. Horton and A. Hasegawa (1994): Quasi-two-dimensional dynamcis of plasmas and fluids. *Chaos*, **4**, 227–251.

[3] K. Iga and T. Watanage (2002): Scaling Law of Quasi-Geostrophic Turbulence with Weak Energy Dissipation. submitted to J. Metor. soc. Jappan.

[4] A. Masuda (2002): Self-simlar Spectral Evolutin of Quasi-Geostrophic Turbulence on an f-plane with and without Horizontal Divergence. (in preparation)

[5] A. Masuda and A. Okuno (2002): Quasi-Geostrophic Turbulence in a One-layer Ocean Affected by Horizontal Divergence. submitted to *Proc. Nagoya Workshop 2001*.

[6] A. Okuno and A. Masuda (2002): Effect of Horizontal Divergecne on the Geostrophic Turbulence on a Beta-Plane: Suppresion of the Rhines Effect. submitted to *Phys. Fluids*.

[7] Rhines, P. B. (1975): Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid. Mech.*, **69**, 417–443.

[8] Rhines, P. B. (1979): Geophysical Turbulence. *Ann. Rev. Fulid Mech.*, **11**, 401–441.

[9] T. Watanabe, T. Iwayama and H. Fujisaka (1998): Scaling laws for coherent vortices in decaying drift Rossby wave turbulence. Physical Review E, **57**, No.2, 1536–1643.