

等方乱流中の低圧力渦の構造

核融合研 榎原孝文 (Takafumi Makihara)

核融合研 木田重雄 (Shigeo Kida)

Theory and Computer Simulation Center,
National Institute for Fusion Science

1 はじめに

乱流中に比較的長く存在する管状の渦構造は乱流の種類を問わず共通に観察され、乱流運動を理解する上で重要な役割を演じているものと考えられている。渦構造を直視するために、渦度や圧力のラプラシアンを用いて管状渦が可視化されている^{1,2)}。本論文では、客観性を重視して著者の一人によって提案された低圧力渦を用いて管状渦を可視化する³⁾。この低圧力渦の解析によって管状渦の運動や役割に関する理解が深まってきている⁴⁾。例えば、渦軸に垂直な断面内での構造は渦度が渦芯とそのまわりの2重らせん層に集中し、このらせん層では渦軸に垂直な成分の渦度が卓越していること、およびらせん層内でエネルギー散逸が活発なことが示されている。しかしながら、これまでの解析で観察されたのはレイノルズ数が100前後の乱流での現象であり、レイノルズ数の大きい極限でも管状渦が安定に存在し、かつ重要な役割を果たし続けるかについては未だ詳細に分かっていない。そこで本論文では、異なる3個のレイノルズ数に対して一様等方乱流の直接数値計算を行い、低圧力渦の物理特性のレイノルズ数依存性を調べることによってレイノルズ数が大きな極限での管状渦の役割を推測する。

2 直接数値計算

支配方程式は以下の非圧縮性流体に対する連続の式、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

と Navier-Stokes 方程式、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2)$$

である。ここで、 \mathbf{u} , t , ρ , p , ν , \mathbf{f} は、それぞれ、速度ベクトル、時間、流体の密度、圧力、動粘性係数および外力ベクトルである。計算領域は周期 2π の立方体で、式(2)をスペクトル法によって空間を離散化し、4次精度 Runge-Kutta-Gill 法で時間進行させる。統計的定常状態を維持するために外力を加えるが、本論文では流れ場のフーリエ係数の絶対値を低波数側 ($|\mathbf{k}| < 2.5$) で常に一定にした。本計算で用いた格子分割数 N 、格子幅 $\Delta x = 2\pi/N$ 、時間ステップ Δt 、打ち切りフーリエ波数 k_{\max} を表1に示す。

この条件による流れ場の概要を表2に示す。ここで R_λ , u_{rms} , \mathcal{E} , Q , ϵ , η , λ , L , τ_η , T , $k_{\max}\eta$ はそれぞれテイラー長に基づくレイノルズ数、変動速度の rms 値、運動エネルギー

表 1: 解析条件

ν	N	Δx	Δt	k_{\max}
2.50×10^{-3}	256	0.0245	2.50×10^{-3}	92
1.25×10^{-3}	512	0.0123	1.25×10^{-3}	148
6.25×10^{-4}	512	0.0123	1.25×10^{-3}	256

表 2: 流れ場の統計量

R_λ	u_{rms}	\mathcal{E}	Q	ϵ	η	λ	L	τ_η	T	$k_{\max}\eta$
82	0.610	0.558	24.9	0.124	0.019	0.335	3.351	0.142	4.49	1.73
120	0.615	0.567	47.8	0.120	0.011	0.244	3.571	0.102	4.74	1.67
172	0.612	0.563	91.0	0.114	0.007	0.176	3.710	0.074	4.95	1.73

ギー, エンストロフィー, エネルギー散逸率, コルモゴロフ長, テイラー長, 積分長, コルモゴロフ時間, 積分時間および打ち切り波数とコルモゴロフ波数の比である. ただし, $R_\lambda = u_{\text{rms}}\lambda/\nu$, $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$, $\lambda = \sqrt{5\mathcal{E}/Q}$, $L = \mathcal{E}^{3/2}/\epsilon$, $\tau_\eta = (\nu/\epsilon)^{1/2}$, $T = \mathcal{E}/\epsilon$ である. 統計量の平均値はそれぞれ $4.9T$, $2.2T$, $1.5T$ の時間帯にわたってとっている. ここで $R_\lambda = 82$ と 120 において k_{\max} を計算可能な最大波数にとらず, 表 1 に示した波数で切断しているのは, 表 2 における $k_{\max}\eta$ の値をほぼ共通にすることにより計算精度を同程度にするためである.

3 低圧力渦

前節の直接数値計算によって得られる流れ場に対して低圧力渦を同定する. 低圧力渦は, 圧力ヘシアン of 第 3 固有ベクトルに垂直な 2 次元的な面内での圧力の極小値を結ぶ線を渦軸とし, 圧力の変曲面を渦芯の境界と定義する. 以下に低圧力渦の同定法の概略を示す (詳細は文献 3 を参照).

1. 全ての計算格子点に対して圧力ヘシアン of 固有値と固有ベクトルを計算し, 2 つ以上の固有値が正である格子点を探す.
2. 1 を満たした格子点に対して固有値と固有ベクトルを用いて圧力の極小点を求める. この極小点が格子点から格子間隔の半分以上になければ除外する.
3. 2 を満たした極小点に対して, 第 3 固有ベクトルに垂直な面内での 2 次元的な流線を考え, 流線が楕円的となる条件 (旋回条件) を満たさない点を除外する.
4. 以上で得られた極小点をつなぎ渦軸を構成する.
5. 渦軸を構成する極小点のまわり 32 点で圧力の変曲点を求め, 渦芯の境界を決める.

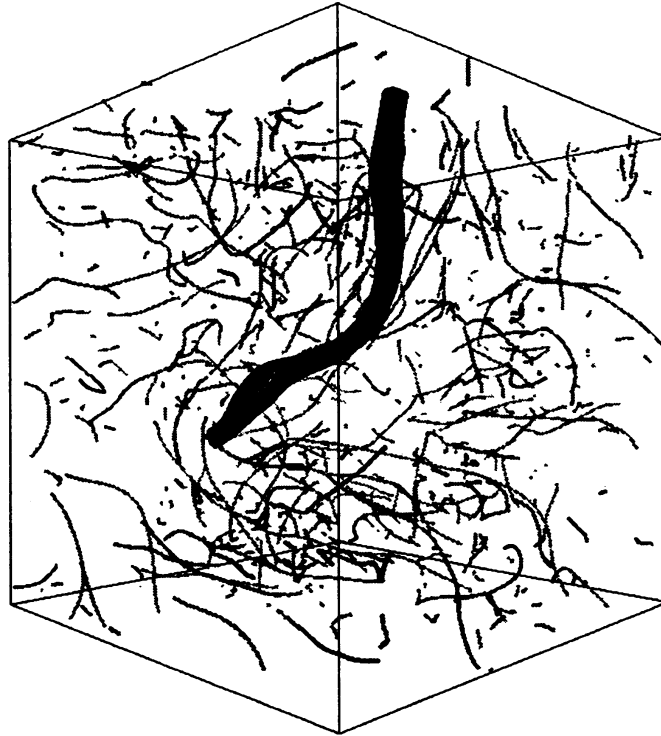


図 1: 低圧力渦の渦軸と代表的な渦芯

このようにして得られた低圧力渦の中心軸と代表的な渦を図 1 に示す。レイノルズ数は $R_\lambda = 85$ で、計算領域の $1/8$ を描いてある。描いた渦芯の平均直径は 8.7η であり、後に示すように全ての渦の平均直径が 10η 程度であることから、これは平均的な直径をもつ渦であるといえる。また渦軸上の平均軸方向渦度は ω_{rms} を変動渦度の rms 値 ($=\sqrt{Q}$) として、 $1.44\omega_{rms}$ となっている。図 1 に示した渦に対する断面構造を図 2 に示す。渦軸は図の中心に位置している。この断面での渦芯境界は平均直径 9.3η の楕円形であり、渦中心で圧力が低く、かつ渦軸に相対的な速度ベクトルは旋回流を示している。このとき渦芯境界内部と渦芯境界かららせん状に渦度の大きい領域が存在するが、渦芯境界内部では渦軸に平行な渦度成分が、らせん層では渦軸に垂直な成分が卓越している。中心における軸方向渦度は $1.36\omega_{rms}$ である。らせん層付近でエネルギー散逸が大きな値をとり、管状渦構造は乱流力学において重要な役割を果たしていることが分かる。参考までに低圧力渦の境界線と圧力のラプラシアン分布とは酷似している。

4 レイノルズ数依存性

前節において管状の渦構造が乱流力学において重要な役割を果たしていることが分かったが、そのときのレイノルズ数は決して大きくはなかった。レイノルズ数が大きくなっても、管状の渦構造が変わらずに重要な役割を果たすかは未だ知られておらず、これを予測することは大変興味深い。そこでここでは表 2 に示したレイノルズ数に対して物理量のレイノルズ数依存性を調べ、レイノルズ数が大きい極限での管状渦の役割を予測する。図

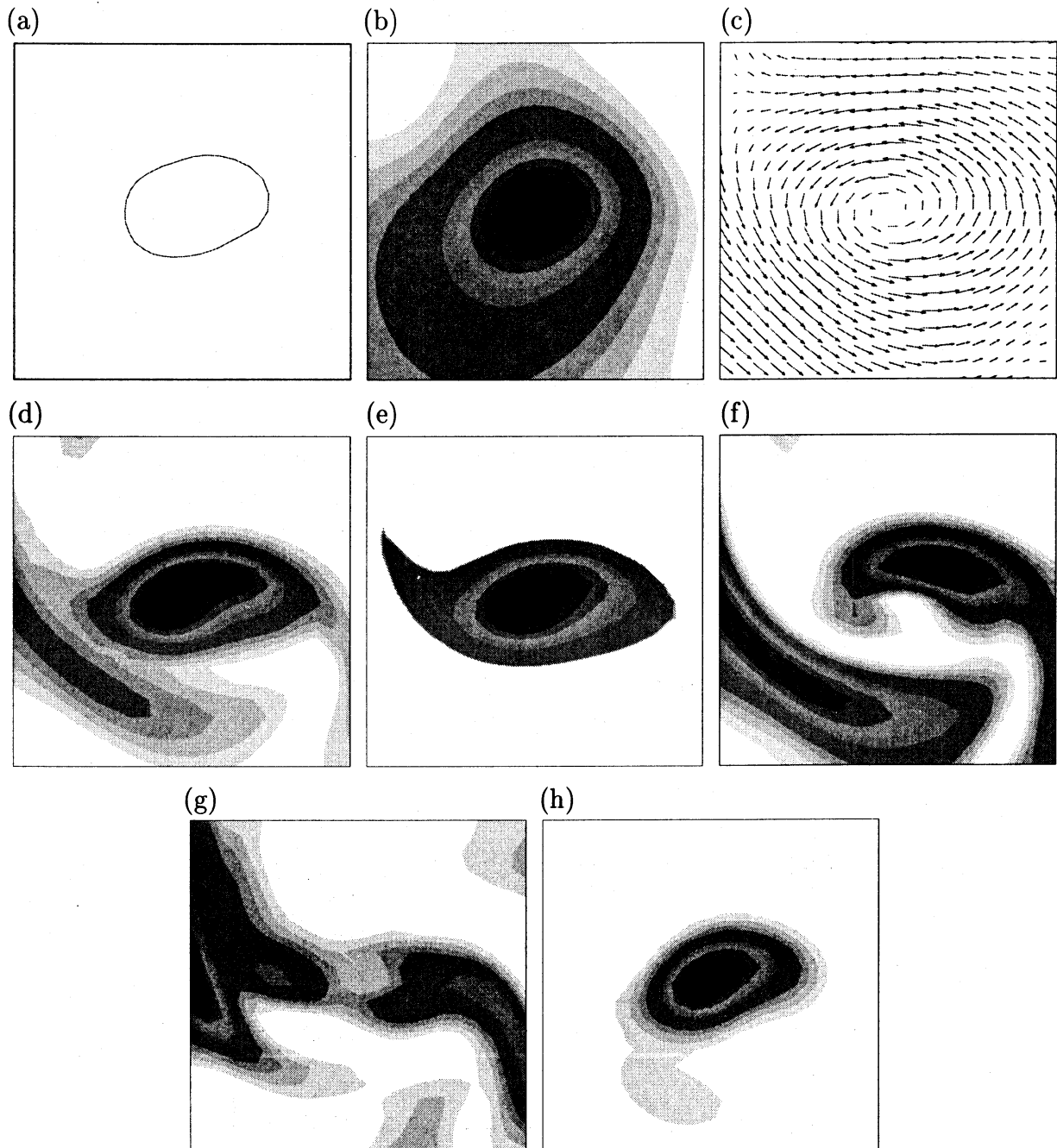


図 2: 渦軸に垂直な面内での物理量の分布. (a) 渦芯境界, (b) 圧力分布, (c) 渦軸に対する相対速度ベクトル, (d) 渦度, (e) 渦軸に平行な渦度成分, (f) 渦軸に垂直な渦度成分, (g) エネルギー散逸率, (h) 圧力のラプラシアン. 渦軸は図の中心に存在し, 正方形領域の一边は $20\Delta x (= 26\eta = 1.5\lambda = 0.16L)$ である. それぞれ値が大きいほど濃い色で示してあるが, 圧力のみ値が小さいほど濃い色で示してある.

表 3: 低圧力渦の統計量

R_λ	D_{core}/η	V_{core}/V	Γ/ν	Q_{core}/Q	$\epsilon_{\text{core}}/\epsilon$	u_θ/u_K	u_θ/u_{rms}	$\omega_{\parallel}/\omega_{\text{rms}}$	l/L
82	10.42	0.348	109.3	0.603	0.314	2.976	0.647	2.49	404
120	9.90	0.298	106.7	0.566	0.278	2.993	0.538	2.65	980
172	10.74	0.307	122.9	0.587	0.310	3.255	0.488	2.71	2171

2(a)に渦芯境界を描いたが、低圧力渦に関して渦軸を構成するすべての圧力極小点の座標だけでなく、各極小点まわりの32分点における渦芯境界の座標もデータとして保存されている。そのため渦芯境界の直径や循環を直接計算することが可能である。また、体積を正確に計算することは困難であるが、渦芯境界内部の計算格子点数を数えることが可能であることから、計算領域に占める渦の体積の割合、エンストロフィーやエネルギー散逸率への寄与のおおよそを知ることができる。このようにして得られた低圧力渦の統計量を表3および図3に示す。これらは、先に示した平均時間内でそれぞれ23個、8個、6個の瞬時データの平均値である。また D 、 V 、 Γ 、 u_θ 、 u_K 、 ω_{\parallel} 、 l はそれぞれ直径、体積、循環、回転速度、コルモゴロフ速度、軸方向渦度、渦軸の総延長であり、下添字 core は渦に付随する値であることを示す。この結果によって低圧力渦はおおよそ直径が 10η 、全領域に占める体積が30%、エンストロフィーとエネルギー散逸率への寄与がそれぞれ60%、30%、回転速度が $3u_K$ もしくは $0.5u_{\text{rms}}$ をもつ管状渦と特徴づけられる。

つぎに表3に示した各々の物理量に対するレイノルズ数依存性を表4に示す。この結果から直径、エンストロフィーとエネルギー散逸率への寄与はレイノルズ数によらず、体積

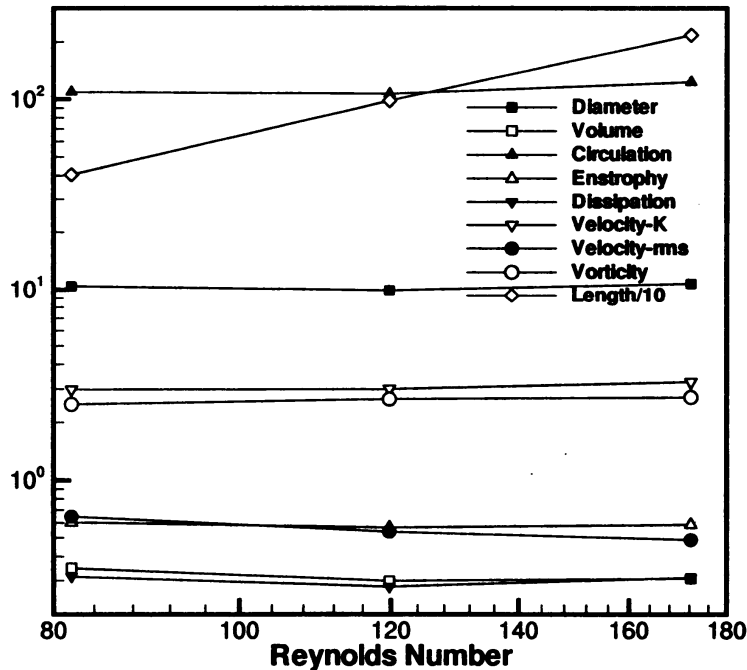


図 3: 低圧力渦の統計量とレイノルズ数の関係

表 4: レイノルズ数依存性

	D_{core}/η	V_{core}/V	Γ/ν	Q_{core}/Q	$\epsilon_{\text{core}}/\epsilon$	u_{θ}/u_K	$u_{\theta}/u_{\text{rms}}$	$\omega_{\parallel}/\omega_{\text{rms}}$	l/L
Present	$R_{\lambda}^{0.04}$	$R_{\lambda}^{-0.17}$	$R_{\lambda}^{0.16}$	$R_{\lambda}^{-0.04}$	$R_{\lambda}^{-0.02}$	$R_{\lambda}^{0.12}$	$R_{\lambda}^{-0.38}$	$R_{\lambda}^{0.11}$	$R_{\lambda}^{2.26}$
Jiménez	R_{λ}^0	R_{λ}^{-2}	$R_{\lambda}^{0.5}$	—	—	—	—	—	—

および u_{rms} で見積もった旋回速度はレイノルズ数とともに減少, 渦レイノルズ数 Γ/ν , u_K で見積もった旋回速度, 軸方向渦度および総延長はレイノルズ数とともに増加する傾向にあることがわかる. 同時に示した直径, 体積および渦レイノルズ数に対する Jiménez らの結果^{1,5)}と同様な傾向にあるが, 体積の減少率および渦レイノルズ数の増加率は小さくなっている. また, Jiménez らの結果では渦の旋回速度は u_{rms} で見積もられるが, 本解析結果では旋回速度は u_K で見積もられるといえる. これは対象としている渦の違いによると思われる. Jiménez らは渦度が極めて強い少数の渦を対象としているのに対して, 低圧力渦は圧力極小と旋回流の存在のみを条件とした渦度にはよらない渦であり, 渦度の強

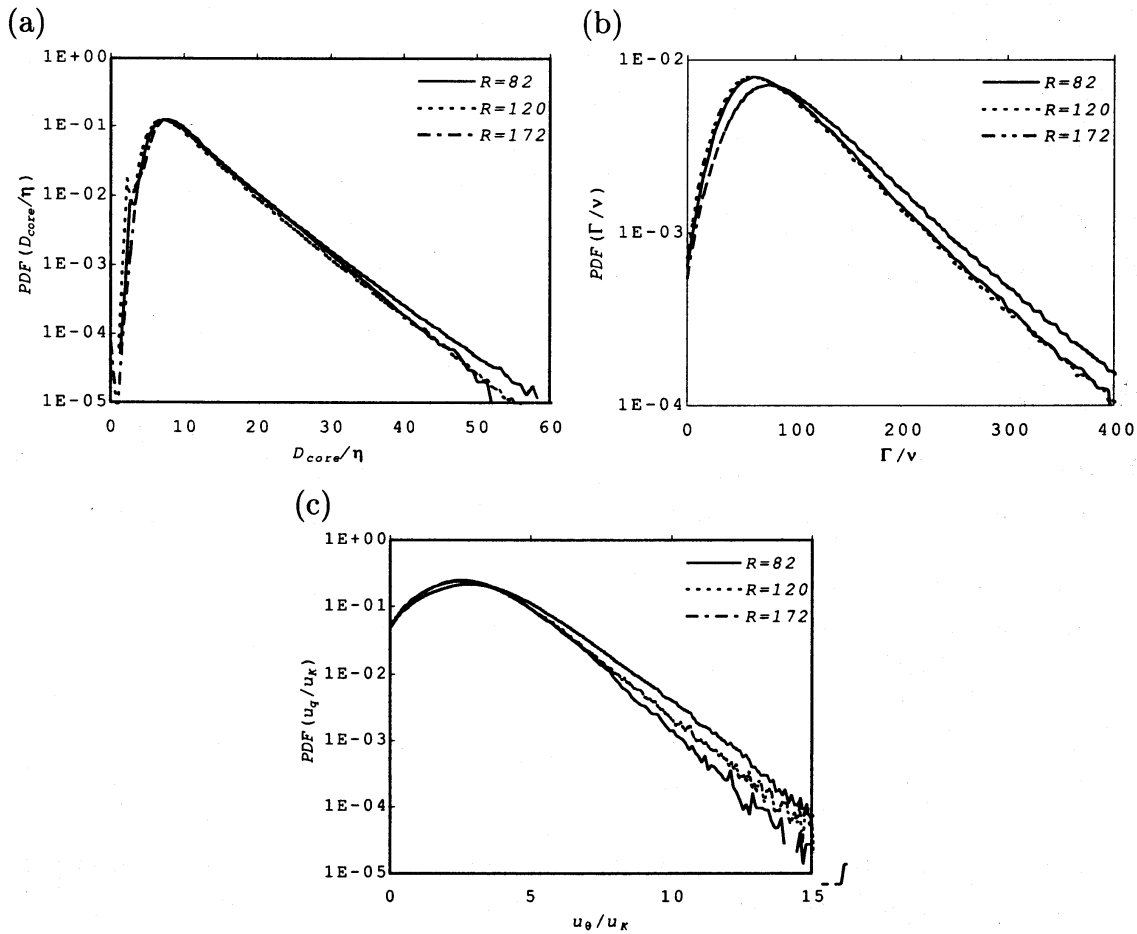


図 4: 確率密度関数. (a) 直径, (b) 循環, (c) 旋回速度

い渦だけでなく渦度の小さい渦も含む。この結果、低圧力渦の統計は背景流れ場のもつコルモゴロフ的描像 $D_{\text{core}}/\eta \propto R_\lambda^0$, $\Gamma/\nu \propto R_\lambda^0$, $u_\theta/u_K \propto R_\lambda^0$ に近くなると考えられる。

図4には直径 D_{core}/η , 循環 Γ/ν と回転速度 u_θ/u_K の確率密度関数を示す。それぞれのピーク値はおよそ直径がコルモゴロフ長の8倍, 渦レイノルズ数が60, 回転速度がコルモゴロフ速度の3倍である。それぞれのピーク値は表3に示した平均値に比べて若干小さい値をとっているが, これはスケールの小さい渦が支配的であるものの, 大きな渦も存在するためである。

また, 渦軸が積分長 L の長さで計算領域に等間隔に配置されるとすると, 渦軸は計算領域に l/L 本, 1列には $\sqrt{l/L}$ 本並ぶ。表3から渦軸の間隔は $R_\lambda = 82, 120, 172$ に対してそれぞれおよそ0.314, 0.202, 0.134となる。表2のテイラー長と比較すると, これらの値は若干小さいものの近い値を示す。ただし, 間隔を s とすると $s/\eta \propto R_\lambda^{0.22}$ および $s/\lambda \propto R_\lambda^{-0.28}$ となり, コルモゴロフ長とテイラー長の間隔の長さで規格化される。

5 おわりに

異なる3個のレイノルズ数に対する一様等方乱流の直接数値計算を実行し, レイノルズ数依存性を調べた。解析の結果, 低圧力渦はおよそ直径がコルモゴロフ長の10倍, 体積が計算領域の30%, エンストロフィーとエネルギー散逸率への寄与がそれぞれ60%と30%, 回転速度がコルモゴロフ速度の3倍と特徴づけられる。さらに, 体積はレイノルズ数とともに減少し, 循環は増大するものの, 直径, エンストロフィーおよびエネルギー散逸率への寄与はレイノルズ数に依存せず, 大きなレイノルズ数の極限でも安定に存在し, 乱流力学において重要な役割を果たし続けると推測される。

参考文献

- 1) Jiménez, J., Wray, A.A., Saffman, P.G. and Rogallo, R.S., "The structure of intense vorticity in isotropic turbulence", *J. Fluid Mech.*, **255**, (1993), pp. 65-90.
- 2) Tanahashi, M., Miyauchi, T. and Ikeda, J., "Scaling law of Coherent fine scale structure in homogeneous isotropic turbulence", *Proc. 11th Symp. Turbulent Shear Flows 1*, (1997), pp. 4-17 - 4-22.
- 3) Kida, S and Miura, H., "Identification and analysis of vortical structures" *Euro. J. Mech. B*, **17**, (1998), pp. 471-488.
- 4) Kida, S and Miura, H., "Double spirals around a tubular vortex in turbulence" *J. Phys. Soc. Japan*, **69**, (2000), pp. 3466-3467.
- 5) Jiménez, J. and Wray, A.A., "On the characteristics of vortex filaments in isotropic turbulence", *J. Fluid Mech.*, **373**, (1993), pp. 255-285.