

自己相似タイル貼り構成の計算例

熊本県立大学 総合管理学部 貞広泰造 (Taizo Sadahiro)

Department of Administration,

Kumamoto Prefectural University

九州大学大学院システム情報科学研究所 櫻井幸一 (Koichi Sakurai)

Department of Computer Science and Communication Engineering,

Kyushu University

概要

Kenyon-Vershik によるトーラスの自己同型写像の記号表現アルゴリズムを用いた平面の自己相似タイル貼り構成の計算機実験の結果を示す。

1 序

自己相似タイル貼りは力学系 [15, 1, 5], 準結晶 [10, 14], Wavelet 理論 [6, 11] などとの関連から重要な研究対象となっている。また, 近年, 乱数生成系としても注目を浴びている [8, 7]. Thurston[16] は Pisot 数を基とする β -展開を用いた自己相似タイル貼りの構成方法を示した。Pisot タイル貼りについては Ito, Akiyama[4, 2, 3, 9] らにより非常に詳しく研究が行われている。Kenyon と Vershik[13] は β -展開を一般化したものを構成するアルゴリズムを与えた。本稿ではこのアルゴリズムを用いた数値実験の結果を示す。

定義 1. 内点全体の閉包が自身と一致するような \mathbf{R}^2 のコンパクトな部分集合をタイルと呼ぶ。 \mathcal{T} をタイルの集合とする。 \mathcal{T} が $\cup_{T \in \mathcal{T}} T = \mathbf{R}^2$ で \mathcal{T} に属する相異なるタイルが互いの内点で交わらないときタイル貼りと呼ぶ。

定義 2. タイル貼り $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i \in I}$ が以下の条件を満たすとき自己相似タイル貼りと呼ぶ。

- すべてのタイルは並行移動によって移り合うものを同一類として分類すると有限個の類から構成される。

- ある拡張定数 λ があってすべてのタイル T について λT は有限個のタイルの和集合となる.

Pisot 数を基とする β -展開を用いたタイル貼りの一例を以下に示す.

例 1. $\beta \in \mathbf{R}, \alpha, \bar{\alpha} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ は $x^3 - x - 1 = 0$ の相異なる根とする. このとき β は Pisot 数となる. w を $\{0, 1\}$ の有限列とし, その長さを $|w|$ で表す.

$$T(w) = \left\{ \sum_{n=-|w|}^{\infty} a_n \alpha^n : (a_n)_{n \geq -|w|} \text{は条件 (*) を満たす} \right\}.$$

$$(*) : \begin{cases} a_n \in D = \{0, 1\}, \\ a_{-l} a_{-l+1} \cdots a_{-1} = w, \quad l = |w|, \\ a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+5} \leq 1. \end{cases}$$

のようにタイル $T(w)$ を定める. このとき $T(\epsilon), T(1), T(10), T(100), T(1000), T(10000)$ を描くと図 1 のようになる. ただし, ここで ϵ は長さ 0 の列つまり, 空語を表す. 定義から明らかであるが, $T(\epsilon) \cup T(1) = \alpha^{-1} T(\epsilon)$, $T(\epsilon) \cup T(1) \cup T(10) =$

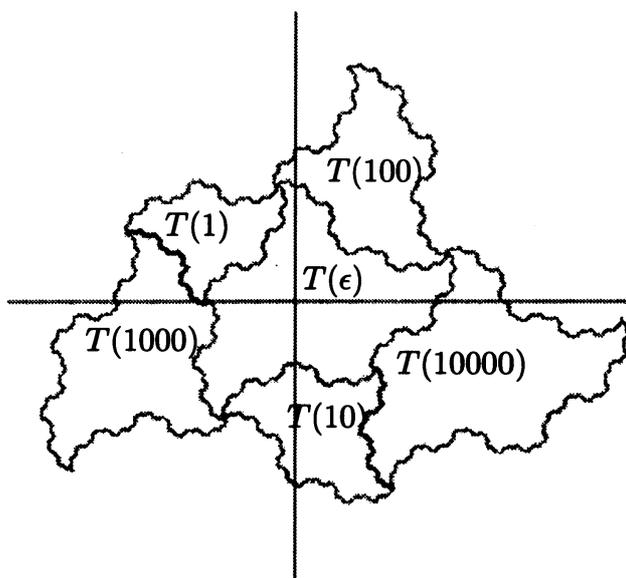


図 1:

$\alpha^{-2}T(\epsilon), \dots$ が図から読み取れる。一般に

$$\bigcup_{|w| \leq l} T(w) = \alpha^{-1}T(\epsilon)$$

となる。

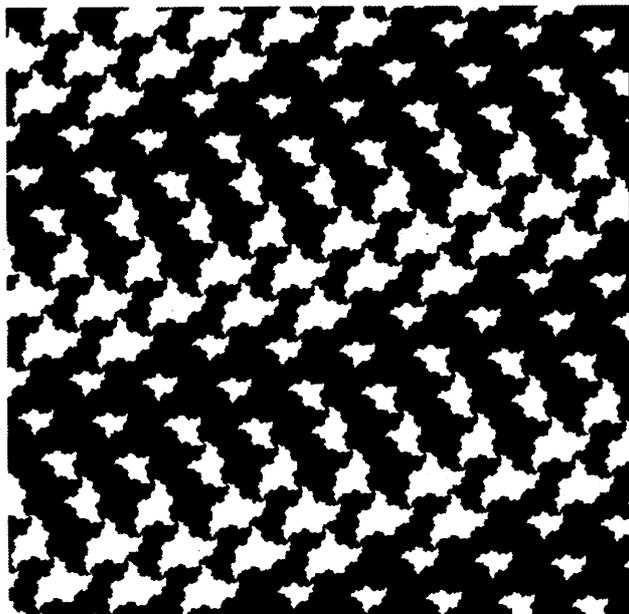


図 2:

条件(*)は図3のオートマトン M によって記述できる。つまり、係数列 (a_n) の任意の先頭有限個の並びは M によって受理される。このオートマトンは β -展開から計算される。

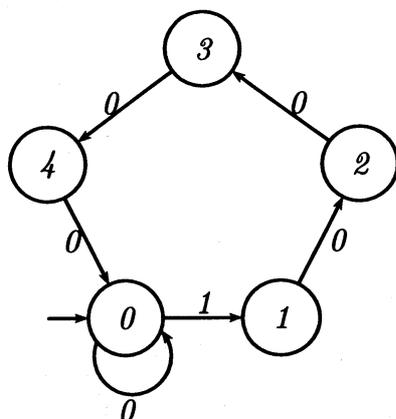


図 3: M

自己相似タイル貼りの拡張定数について次の結果が知られている。

定理 1. (Kenyon[12]) 平面の自己相似タイル貼りの拡張定数は *complex Perron number* となる。また任意の *complex Perron number* に対して、それを拡張定数とする自己相似タイル貼りが存在する。

よって例 1 の α や M を変化させることによって異なるタイプのタイル貼りを得られる可能性がある。

Pisot でない場合にはオートマトンを構成するために β -展開に代わるものが必要となる。Kenyon と Vershik[13] はトーラスの自己同型写像を表す記号力学系を構成するアルゴリズムを与えた。これは β -展開の一般化といえるものである。彼らは 3 次元トーラスの例についての計算結果の中で自己相似タイル貼りを与えている。

2 章でこのアルゴリズムに若干の変更を加えたものをいくつかの多項式に対して実際に適用した計算結果を与える。3 章以降でアルゴリズムについて述べる。

2 非総実 3 次の計算結果

$$p(X) = X^3 - a_2 X^2 - a_1 X + 1 \in \mathbf{Z}[X].$$

が有理数体上既約で $-2 < \beta < -1$ なる実根 β と互いに共役な複素根 $\alpha, \bar{\alpha}$ をもつ場合についての後述のアルゴリズムによる計算結果を示す。このような多項式は全部で 4 つ存在する。

例 2. $(x^3 + x^2 + 1)$

$$\beta = -1.46557123187\dots, \alpha = 0.23278561593\dots - i \cdot 0.7925519925154\dots$$

図 4 は後述のアルゴリズムにより得られたオートマトンである。このオートマトンと α を例 1 と同じように用いると M_α の各状態に対して一種類のタイル

が生成される (図 5). つまり, 状態 \textcircled{i} を初期状態として受理される無限列全体の集合を L_i とするとき各状態に対してタイルの基本型 $T_i = \{\sum_{n \geq 0} a_n \alpha^n : (a_n)_{n \geq 0} \in L_i\}$ が得られる. この 6 種類のタイルが図 6 のように平面上に配置される.

例 3. $(x^3 + x^2 - x + 1)$

$$\beta = -1.83928675521 \dots, \alpha = 0.41964337760708 \dots + i \cdot 0.6062907292071 \dots$$

例 4. $(x^3 + 2x^2 + x + 1)$

$$\beta = -1.75487766624 \dots, \alpha = -0.1225611668766 \dots - i \cdot 0.744861766619 \dots$$

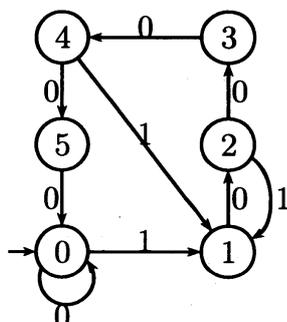


図 4: $M_\alpha : x^3 + x^2 + 1 = 0$ (例 2)

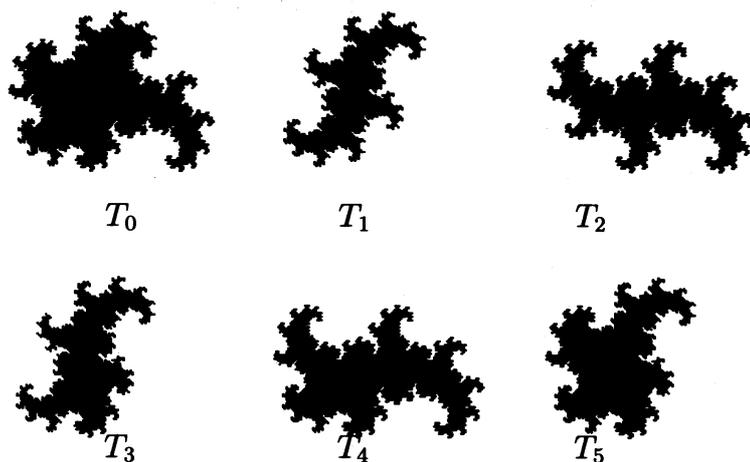


図 5: prototiles: $x^3 + x^2 + 1$ (例 2)

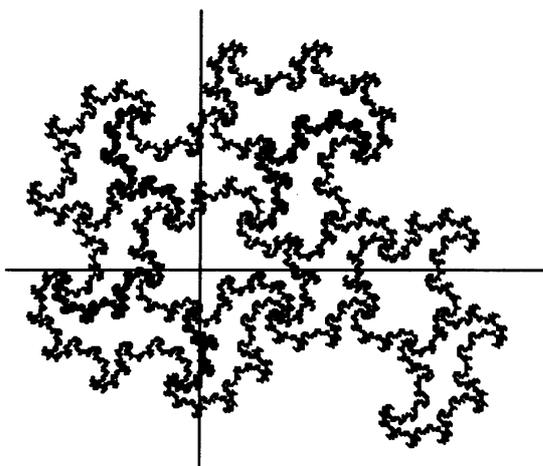


图 6: tiling: $x^3 + x^2 + 1$ (例 2)

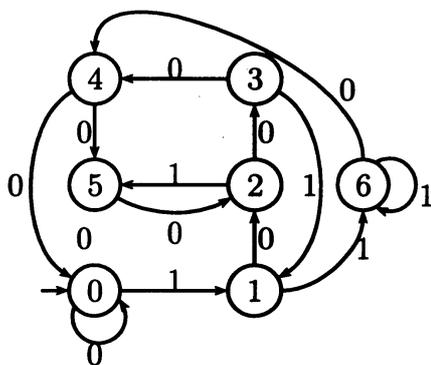


图 7: $M_\alpha : x^3 + x^2 - x + 1$ (例 3)

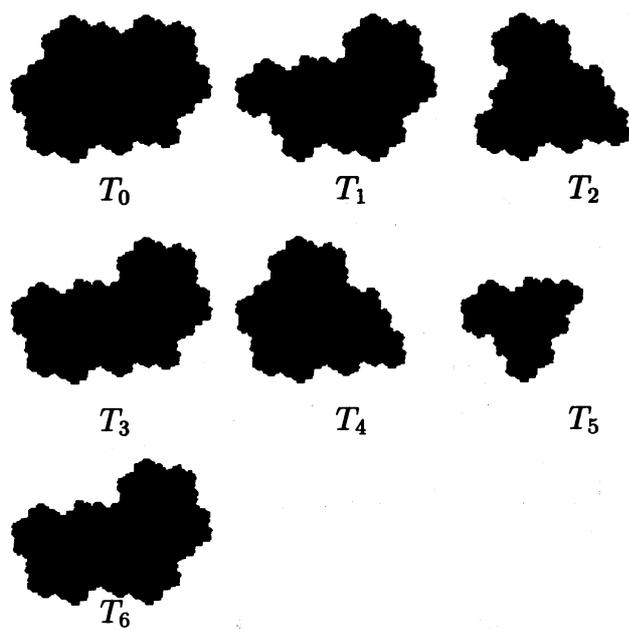


图 8: prototiles: $x^3 + x^2 - x + 1$ (例 3)

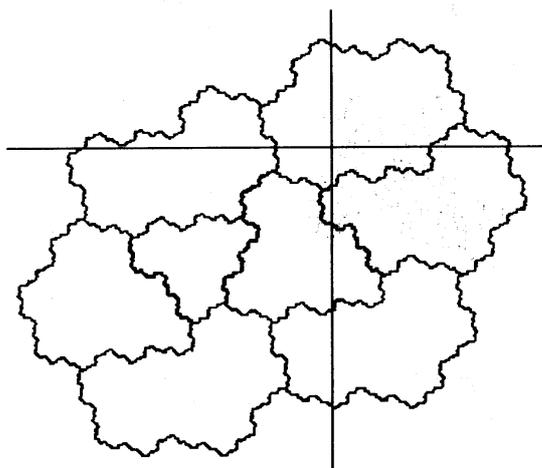


图 9: tiling: $x^3 + x^2 - x + 1$ (例 3)

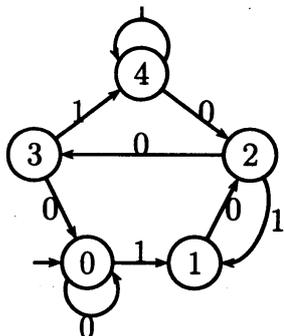


图 10: $M_\alpha : x^3 + 2x^2 + x + 1$ (例 4)

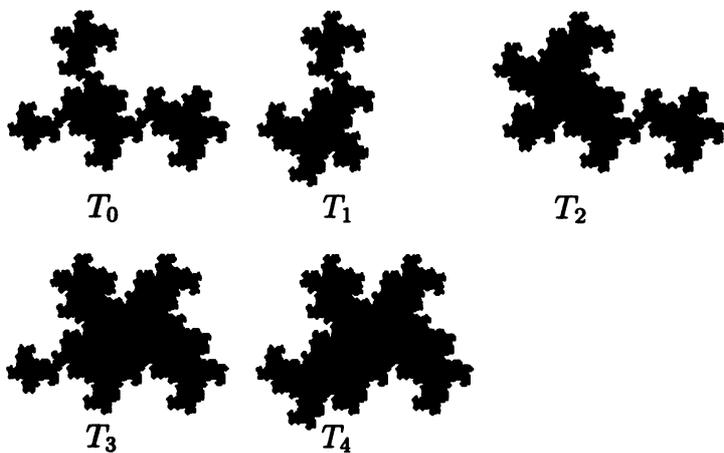


图 11: prototiles: $x^3 + 2x^2 + x + 1$ (例 4)

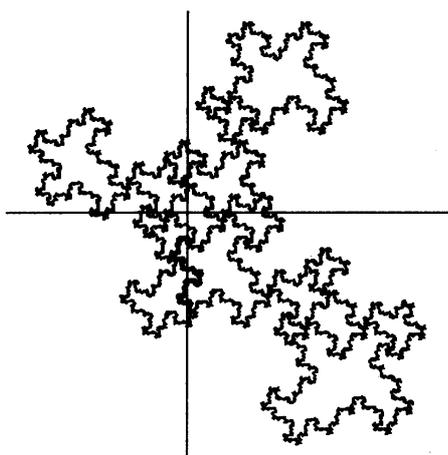


図 12: tiling: $x^3 + 2x^2 + x + 1$ (例 4)

3 オートマトン構成のアルゴリズム

前章で計算されたオートマトンの構成アルゴリズムを示す.

$$p(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0 \in \mathbf{Z}[X]$$

は単位円周上に根をもたない既約な整数係数多項式で $|a_0| = 1$ となるものとする. $p(X)$ の根全体を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とする.

ここで, 有限集合 $D \subset \mathbf{Z}[X]/(p(X))$ を一つ定める. タイルを得るために D をどのように選ぶべきかについては後述する. また D に任意に全順序 \preceq を一つ与える. 2章の計算例では $D = \{0, 1\}$, $0 \prec 1$ ととっている. (D, \preceq) を決定した後, オートマトンは以下のように構成される.

1.

$$V = \left\{ z \in \mathbf{Z}[X]/(p(X)) : \forall i \in [1, r+c], |\rho_i(z)| < \frac{2\max\{|d| : d \in D\}}{|1 - |\lambda_i||} \right\}$$

を計算する. ここで $\rho_i : \mathbf{Q}[X]/(p(X)) \rightarrow \mathbf{Q}(\lambda_i)$ は $\rho_i(X) = \lambda_i$ を満たす体の埋め込みである.

2. グラフの頂点集合 S を V の部分集合で 0 を含まないもの全体の集合とする。

S を S の元とする。 $d \in D$ に対して、

$$\frac{1}{x}S + d - b = 0.$$

となる $b \prec d \in D$ が存在しないとき、 S と

$$S' = V \cap \left[\left(\frac{1}{x}S + d - D \right) \cup (d - D) \right] \setminus \{0\}.$$

を d でラベルされた S から S' へ向かう辺で結ぶ。

3. 初期状態を空集合 \emptyset として、 \emptyset から到達出来るすべての頂点とそれらを結ぶ辺からなるグラフを求め、これと等価な状態数最小のオートマトンを求める。

このアルゴリズムから得られるオートマトンは以下の性質をもつ。

D の順序 \preceq より、 D の長さ m の有限列全体の集合 D^m にも自然に辞書式順序が入る。 $d = (d_0, d_1, \dots, d_m) \in D^m$ に対して d と異なる $d' = (d'_0, d'_1, \dots, d'_m) \in D^m$ が、 K の元として

$$(1) \quad d_0 X^m + d_1 X^{m-1} + \dots + d_m = d'_0 X^m + d'_1 X^{m-1} + \dots + d'_m.$$

であるならば $d \prec d'$ となるとき、 d は最小であるということにする。上述のアルゴリズムで得られたオートマトンがある語を受理するならばその語の逆は最小である。つまり、列 $d_m d_{m-1} \dots d_0$ が受理されるならば (d_0, d_1, \dots, d_m) は最小である。[13]では最小列を順向きに受理するように構成されており、そのため、若干、本稿と構成方法が異なる。

参考文献

- [1] R. Adler and B. Weiss. Entropy is a complete metric invariant for automorphisms of the torus. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 57:6:1573–1576, 1967.

- [2] Shigeki Akiyama. Self affine tiling and pisot numeration system. pages 7–17, 1999.
- [3] Shigeki Akiyama. On the boundary of self affine tilings generated by pisot numbers. *to appear in Journal of Math. Soc. Japan.*, 2002.
- [4] S. Akiyama and T. Sadahiro. A self-similar tiling generated by the minimal pisot number. *Acta Mathematica et informatica Universitatis Ostravensis*, 6:9–26, 1998.
- [5] R. Bowen. Equilibrium states and the ergodic theory of anosov diffeomorphisms. *Springer Lecture Notes in Math*, 470:78–104, 1975.
- [6] K. Gröchnig and W.R. Madych. Multiresolution analysis, haar bases, and self-similar tilings of \mathbf{R}^n . *IEEE Transactions on Information Theory*, 38:556–568, 1992.
- [7] Louis-Sévastien Guimond and Jirm Patera. Proving the deterministic period breaking of linear congruential generators using two tile quasicrystals. *Math. Comp.*, 71:319–332, 2002.
- [8] L.S. Guimond, Jan Patera, and Jiri Patera. Combining random number generators using cut and project sequences. *Czech. J. Phys.*, 51:305–311, 2001.
- [9] S. Ito and M. Kimura. On rauzy fractal. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 8:461–486, 1991.
- [10] J. Lagarias. Geometric models for quasicrystals I. *Discrete and Computational Geometry*, 21:161–191, 1999.
- [11] H. L. Resnikoff and R.O. Wells. *Wavelet analysis*. Springer, 1998.

- [12] R.Kenyon. The construction of self-similar tilings. *Geom. and Func. Analysis*, 6:417–488, 1996.
- [13] R.Kenyon and A.Vershik. Arithmetic construction of sofic partition of hyperbolic toral automorphisms. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 18:357–372, 1998.
- [14] M. Senechal. *Quasicrystal and Geometry*. Cambridge U. P., 1995.
- [15] Y Sinai. Constructions of markov partitions. *Func. Anal.and its Appl.*, 2:2:70–80, 1968.
- [16] W.P. Thurston. *Groups, tilings and finite state automata*. AMS Colloquium lectures, 1989.