

電磁界解析におけるマルチグリッド法の有限要素法への適用について

北海道大学・工学研究科 渡辺浩太、五十嵐一、本間利久

Kota Watanabe, Hajime Igarashi, Toshihisa Honma
Graduate School of Engineering, Hokkaido University

1 はじめに

有限要素法による電磁場解析において、ICCG (Incomplete Cholesky decomposition Conjugate Gradient) 法が連立方程式の解法として広く用いられている。これは、ICCG法が他の反復法に比べて収束性がよくかつ種々のパラメータ変動に対してロバストなためである。実際、適切な冗長性を持たせた定式化を行うと、不完全コレスキ分解によってパラメータ変動にほとんど依存せずに有限要素行列の条件が改善され、CG法の収束性が良好に保たれることが知られている^{[1][2]}。しかしながら100万を超える未知数からなる連立方程式を解くためにはICCG法でも長大な計算時間がかかる。また時間依存の問題や非線形材料を含む問題の解析では数倍の計算時間が必要となる。さらに機器の設計パラメータ(形状、材料特性、配置など)を電磁場解析によって最適化しようとする、最適解を探索する過程で極めて多くの電磁場を解析する必要があるため、計算時間も非常に増大してしまう。よって現状では、2次元電磁場解析に基づくモータ回転子の形状などの簡易な最適化は行われているが、現実に設計が必要となるような複雑な3次元空間での最適化は事実上不可能となっている。

このように電磁場解析の高速化が強く要求されているが、段階的な空間スケールのメッシュ分割を利用するマルチグリッド法は高速化手法として最も有望視されている。

マルチグリッド法は元来、差分法の高速化のために開発されたものである。したがってそれを有限要素解析に適用する際にはメッシュの不均一性

についてのロバスト性を検討しなければならない。また辺要素を用いた有限要素法では剛性行列が特異であるため、解の不定性からくる収束性の影響も考慮する必要がある。本報告では特に有限要素の扁平率とマルチグリッド法の収束性の関係を、有限要素行列の条件数の観点から議論する。

2 有限要素法の定式化

本報告では、マルチグリッドの適用例として3次元静磁場の有限要素法解析を行った。解析領域を図1に示す。磁性体とその周りの空気領域に外部からz軸方向に一定の磁場を加えるモデルを考え、1/8領域を解析領域とする。また空気領域は磁性体の大きさの4倍までの範囲を解析領域とした。

解析に用いる変数には、磁束密度 \vec{B} に対して次式で与えられる修正磁気ベクトルポテンシャルを用いた^[3]。

$$\vec{B} = \nabla \times (\vec{A} + \vec{A}_0) \quad (1)$$

ここで \vec{A}_0 は外部から与えられる強制磁場に関する磁気ポテンシャルであり既知量である。この式をMaxwell方程式に代入することで次式を得る。

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times (\vec{A} + \vec{A}_0) = 0 \quad (2)$$

ここで μ は透磁率であり、磁性体領域、空気領域でそれぞれ一定値であるとした。さらに(2)式の弱形式を考え、離散化することで連立方程式

$$[\mathbf{K}]\{a\} = -[\mathbf{K}]\{a_0\} \quad (3)$$

を得る。ここで係数行列 $[K]$ は微分作用素 $\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla$ を離散化したものに相当し、メッシュ形状と透磁率より計算される。また $\{a\}$ と $\{a_0\}$ はそれぞれ \bar{A} と \bar{A}_0 を離散化したものであり、 \bar{A}_0 は既知量であるので(3)式の右辺は既知量となる。

未知数である磁気ベクトルポテンシャルは良く知られているように任意のスカラー関数の勾配だけの任意性があり、それを反映して係数行列 $[K]$ は特異行列である。そのため従来は木・補木ゲージを等ゲージを課して正則化が行われてきたが、ゲージを課すとICCG法の収束性が悪くなることが知られている。逆にICCG法では、ゲージを課さない特異行列のままでも収束解が得られ、しかもその収束はゲージを課したときよりも速いことが報告されている。そこで、本報告でもゲージを課さないことにした。

境界条件としては、 $x=0$ および $y=0$ 平面は対称面であるから $\nabla \times \bar{A} = 0$ を課した。また、 $x=1$ 、 $y=1$ 、 $z=h$ 平面では、磁性体から十分離れているとして、対称境界と同じ $\nabla \times \bar{A} = 0$ を与えた。要素には辺要素四面体要素を採用した。この要素分割はマルチグリッド法の収束性に大きくかわってくるので、その詳細は次節で論じる。

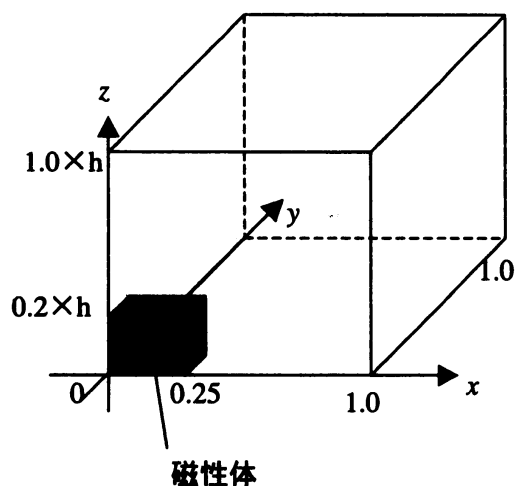


図1 解析領域

3 マルチグリッドの定式化

3-1 概要

マルチグリッド法では、解析を行う対象領域をメッシュ分割する際に、細かさの異なるいくつかのメッシュを用意する。そして、細かいメッシュに対して連立方程式を作成し、それに対してガウスザイデル法等の反復計算を数回程度行う (Smoothing操作)。ガウスザイデル法では、近似解に含まれる高周波成分は少ない反復回数で減少し、低周波成分が残る性質があり、この操作により誤差に含まれる高周波成分を除去される。またこのことがSmoothingと呼ばれる所以である。

次にこの操作で得られた近似解に対する残差を一段粗いメッシュに投影する (Restriction)。これは、残っている残差の低周波成分が粗いメッシュから見ると高周波成分として見えることを利用するためである。すなわち、粗いメッシュに投影された残差に関する残差方程式に対してSmoothing操作をすると、残っていた残差の低周波成分がすばやく収束することが期待される。さらにこのRestriction → Smoothingという一連の操作をもっとも粗いメッシュに達するまで行う。最も粗いメッシュにおいては、残差方程式を直説法、もしくは反復法で解が収束するまで計算を行い、残差方程式を完全に解く。この操作はもっとも粗いメッシュ上で行うので、計算時間は少なく済む。これで解として得られた誤差を一段細かいメッシュに投影する (Prolongation)。これはちょうどRestrictionと逆の操作に相当する。そして、この投影された誤差を用いて近似解の補正を行う。またこの際に補正後の近似解に対してSmoothing操作を行う (Post-Smoothing)。上記の一連の操作がVサイクルと呼ばれる典型的なマルチグリッドの計算手順である。マルチグリッド法にはこのVサイクルのほかに、もっとも粗いメッシュから計算を開始するフルマルチグリッドVサイクルや、Wサイクル等のいくつかのバリエーションが存在する。また、粗いメッシュを細かいメッシュから代数的に生成する方法もあり、これは代数マルチ

グリッド法と呼ばれる。

3-2. アルゴリズム

マルチグリッド法にはいくつかのバリエーションが存在するが、ここでは最も基本的かつ単純なVサイクルを採用する。この2段階Vサイクルでは、粗いメッシュと細かいメッシュの2種類のメッシュを用意する必要がある。一般にマルチグリッド法では粗いメッシュのそれぞれの要素を特定の規則により分割することで細かいメッシュを生成することで、両者のメッシュに幾何的な相関を持たせるネステッドマルチグリッド法と、両者のメッシュに相関を持たせないノンネステッドマルチグリッド法がある^[4]。前者のネステッドメッシュでは、粗いメッシュの形状が細かいメッシュに影響を与えてしまう問題があるが、後で述べるProlongation行列やRestriction行列の生成が容易であるという利点がある。一方、後者のノンネステッドでは、メッシュ間で相関を持たせる必要が無いために、自由な分割数でメッシュ生成が可能である反面、Prolongation行列やRestriction行列の生成に時間を要する。特に、本研究のような3次元4面体辺要素の場合、これらの行列の生成に時間がかかるばかりでなく、メッシュの相関によってはマルチグリッド法の収束性に悪影響を与える。これらのことから、本研究では、ネステッドマルチグリッド法を採用する。

本研究では、粗いメッシュのそれぞれの四面体要素に対して、図2に示すように8分割をして細かいメッシュを生成した^{[5][6]}。

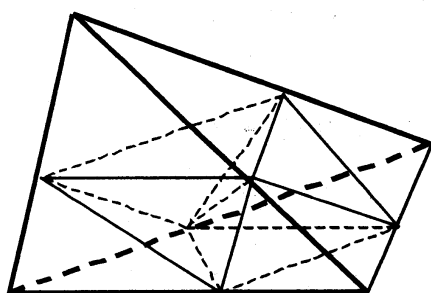


図2 4面体ネステッドメッシュ

つぎに2段階Vサイクルでの計算過程を示す。説明の都合により、解くべき方程式である(3)式を次のように書き直す。

$$[\mathbf{K}_f]\{x_f\} = \{b_f\} \quad (4)$$

ここで、 $[\mathbf{K}_f]$ は係数行列、 $\{b_f\}$ は右辺ベクトル、 $\{x_f\}$ は求める解ベクトルである。また、添え字の f は細かいメッシュから生成されたことを示す。

Step1 (Smoothing)

(4)式をガウスザイデル法により数回反復計算を行い、近似解 $\{\tilde{x}_f\}$ を得る。この操作により近似解に含まれる誤差の高周波成分が消え、低周波成分のみが残っていることが期待される。

Step2 (残差の計算)

Step1で得られた近似解に対する残差 $\{r_f\}$ を計算する。

$$\{r_f\} = \{b_f\} - [\mathbf{K}_f]\{\tilde{x}_f\} \quad (5)$$

Step3 (Restriction)

Step2で得られた残差を粗いメッシュに射影して、粗いメッシュでの残差 $\{r_c\}$ を生成する。この操作で用いるのがRestriction行列 $[\mathbf{R}]$ であり、細かいメッシュでの未知数を n_f 、粗いメッシュでの未知数を n_c とすると、 $[\mathbf{R}]$ は $n_c \times n_f$ の行列である。

$$\{r_c\} = [\mathbf{R}]\{r_f\} \quad (6)$$

$[\mathbf{R}]$ 行列の生成方法は、節点要素においては、細かいメッシュでのそれぞれの節点に対して、その節点座標を粗いメッシュの要素の内挿関数を利用して補間することで計算することができる。しかし辺要素の場合、未知変数が内挿したいベクトル場の辺上での線積分に相当することから、Restriction行列の各成分は線積分

$$R_{ij} = \int_{E_j^f} \tilde{w}_i^c \cdot d\vec{l} \quad (7)$$

により求める必要がある。ここで、 E_j^f は細かいメッシュにおける j 番目の辺を表し、 \tilde{w}_i^c は荒いメッシュの i 番目の辺に関する辺要素内挿関数である。しかしながら、図2に示すネステッドメッシュを使用した場合は、この線積分を直接実行せずに高速にRestriction行列を求めることが可能である。その方法は3-2節にて後述する。

Step4 誤差の算出

粗いメッシュにおける残差方程式を解くことで、

Step3で得られた残差 $\{r_c\}$ に対応する誤差 $\{e_c\}$ を計算する。

$$[\mathbf{K}_c]\{e_c\} = \{r_c\} \quad (8)$$

この計算は粗いメッシュに対する方程式であり、未知数の数が少ないので計算時間は少なく済む。また係数行列 $[\mathbf{K}_c]$ は細かいメッシュの係数行列 $[\mathbf{K}_f]$ と Restriction 行列 $[\mathbf{R}]$ および 後述の Prolongation 行列 $[\mathbf{P}]$ から

$$[\mathbf{K}_c] = [\mathbf{R}][\mathbf{K}_f][\mathbf{P}] \quad (9)$$

によって生成することができる。しかし、本研究では粗いメッシュに対して(3)式に基づく有限要素法の計算により求めた。このことからわかるように $[\mathbf{K}_c]$ も特異行列であり、一般的な直接法では(8)式を計算することが出来ない。そこで、本研究ではICCG法を用いて計算を行った。

Step5 (Prolongation)

ここでは粗いメッシュで得られた誤差 $\{e_c\}$ を細かいメッシュに補完する作業を行う。

$$\{e_f\} = [\mathbf{P}]\{e_c\} \quad (10)$$

ここで用いる Prolongation 行列 $[\mathbf{P}]$ は Restriction 行列 $[\mathbf{R}]$ の転置行列とするのが一般的であるが、適当な定数 C を用いて

$$[\mathbf{R}] = c[\mathbf{P}]^T \quad (11)$$

とすると収束が早くなるとの報告がある^{[7][8]}

Step6 解の補正

Step5で得られた誤差 $\{e_c\}$ を用いてStep 1で得られた近似解 $\{x_f\}$ の補正を行う。

$$\{x_f\} = \{\tilde{x}_f\} + \{e_f\} \quad (12)$$

Step7 (Post-Smoothing)

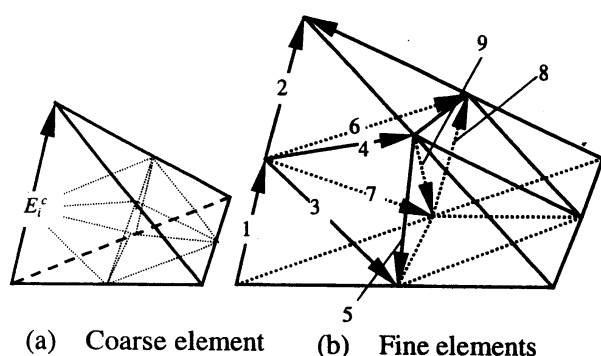
Step6で得られた解を初期値としてStep1と同様にSmoothing操作を行う。これをPost-Smoothingと呼んでいる。その後収束判定を行い、解が収束していれば計算を終了とし、収束条件に達していなければ、Step2に戻って計算を行う。

3-2 Restriction行列生成

既に述べたようにマルチグリッド法には、粗いメッシュの各要素を特定の規則により分割することで細かいメッシュを生成するネステッドメッシュ(図2参照)と、両者のメッシュに相関を持たせないノンネステッドメッシュがある。前者のネステッドメッシュでは、粗いメッシュの形状が細かいメッシュに影響を与えてしまう問題があるが、(7)式によるRestriction行列の生成が容易であるという利点がある。一方、後者のノンネステッドメッシュでは、メッシュ間で相関を持たせる必要が無いために、自由な分割数でメッシュ生成が可能である反面、(7)式の積分区間が複数の要素にまたがってしまうために計算が困難になる。そこで本研究では、ネステッドマルチグリッド法を採用し、図2に示すように粗いメッシュのそれぞれの四面体要素に対して、辺の中点を用いて8分割し細かいメッシュを生成した。このときRestriction行列の成分 R_{ij} は ± 0.5 、 ± 0.25 、 0 のいずれかの値となり、粗いメッシュの i 番目の辺 E_i^c と細かいメッシュの j 番目の辺 E_j^f との位置関係から決定できる。図3にその一例を示す。今、一つの粗い要素とそれを分割して生成した8個の細かい要素を考える。辺 E_i^c が図3(a)に示した位置にあり、細かい要素の辺の番号と向きが図3(b)のように与えられているとする($R_{ij}=0$ となる辺は省略した)。このとき、Restriction行列の成分 R_{ij} の図3に示した辺に関する成分は、

$$R_{ij} = \begin{cases} 0.5: j = 1,2 \\ 0.25: j = 4,6,8 \\ -0.25: j = 3,5,7,9 \\ 0: \text{上記以外の辺} \end{cases} \quad (13)$$

となる。上記操作を粗いメッシュの全ての要素に対して行うことによりRestriction行列 $[\mathbf{R}]$ を生成できる。このように図2の示すネステッドメッシュを採用することで(12)式の積分を行う必要がなくなり、高速にRestriction行列を生成することができる。

図3 R_{ij} の生成例

4 解析結果

4-1 要素の扁平率と収束性

前節までの定式化に基づき図1のモデルの有限要素解析にマルチグリッド法を適用した。一般に要素の扁平率が高くなると、収束が遅くなることが報告されている。そこで、解析領域の高さ h (図1参照)を $h=1.0, 0.75, 0.5, 0.25, 0.0125$ と変化させた計5種類のモデルを考え、そのそれぞれのモデルを768個の四面体要素に分割して粗い要素を作成した。さらにその粗い要素を図2に基づく分割により6144個の細かい要素を作成した。当然、要素の高さ h を小さくすると解析領域が扁平となるので、要素も扁平になる。そこで、要素の扁平率として要素の最大辺長と最小辺長の比を考え、各メッシュにおける扁平率の平均値と、もっとも扁平な要素の扁平率を表1に示す。

表1 要素の扁平率

高さ h	扁平率 (最大)	扁平率 (平均)
1.0	1.63	1.63
0.75	3.12	2.89
0.50	5.00	4.51
0.25	17.00	12.63
0.125	65.00	44.65

一般に、反復法の収束性は係数行列の性質に依存する。そこで、このメッシュによって得られた係数行列の性質を把握するために、Mesh1、Mesh2のそれぞれの粗メッシュに関する係数行

列の固有値分布を図4に示す。但し、紙面の都合で $h=1.0, 0.25, 0.125$ の場合のみを表示した。また、密メッシュに関する固有値分布は計算機能力の関係で本報告には間に合わなかったが、粗メッシュと同様の傾向を示すと考えられる。

既に述べたように本解析では未知数としてベクトルポテンシャルを用い、かつゲージを課していないので、係数行列は特異行列である。従って、図4からも明らかのように零固有値が存在する。一般に零固有値はCG法の収束には影響を与えない。しかしながら、最大固有値と最小非零固有値の比で与えられる条件数は、CG法の収束に必要な反復回数と正の相関がある。そこで、これらの係数行列の条件数を表2に示す。要素の扁平率が高くなると、最小非零固有値はあまり変化しないが、最大固有値が大きくなることがわかる。従って、解析領域が扁平になるほど条件数が悪くなっており、収束が悪いことが予想される。そこで、ICCG法とマルチグリッド法で計算を行い、右辺ベクトルに対する相対残差が 10^{-6} 以下になるまでに要した反復回数を表3に示す。マルチグリッド法の反復回数がICCG法に比較して非常に少ないが、これはマルチグリッド法では一つの2段階Vサイクルを1回とカウントしているからであり、一回のVサイクルにSmoothingとPost-smoothingにそれぞれガウスザイデル法による反復計算を10回行っている。また、粗いメッシュ上での残差方程式の計算にはICCG法で平均40回程度の反復回数を要した。

表2 係数行列の固有値と条件数

高さ h	固有値		条件数
	最大	最小	
1.0	100.7	5.43×10^{-3}	1.85×10^4
0.75	115.0	5.05×10^{-3}	2.28×10^4
0.50	152.3	4.98×10^{-3}	3.06×10^4
0.25	281.4	6.57×10^{-3}	4.28×10^4
0.125	551.4	1.13×10^{-2}	4.84×10^4

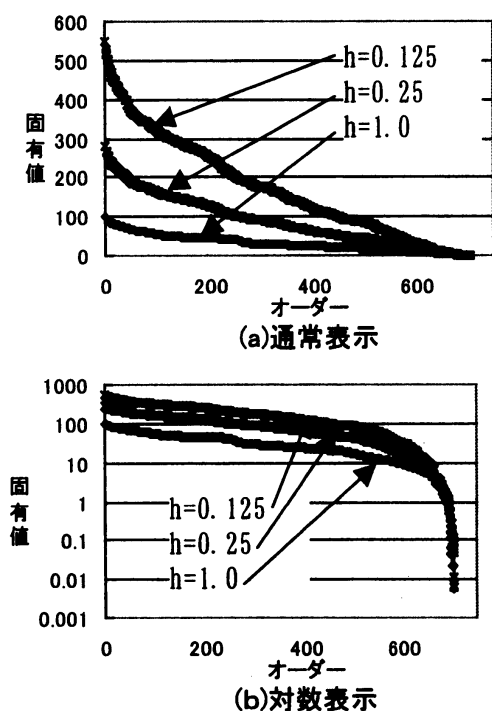


図4 固有値分布

表3 反復回数

高さh	反復回数	
	ICCG法	マルチグリッド
1.0	64	7
0.75	72	7
0.50	131	10
0.25	315	20
0.125	761	31

4-2計算時間の比較

つぎにICCG法とマルチグリッド法の計算時間を計測した結果を示す。前節で使用したモデルの中で高さを $h=1.0$ としたモデルを用い、細かいメッシュをさらに分割を繰り返すことで3レベルのメッシュを作成した。表4に各レベルにおける要素数および未知数を示す。このメッシュに対して、3段Vサイクルマルチグリッドを適用した。その際、Smoothingに用いる反復解法(Smoother)としてガウスザイデル法とSOR法を用いた。表5に計算時間を示す。比較のためにICCG法による計算時間も示

した。マルチグリッド法ではSmoothing回数によって、収束までに必要なVサイクル回数が増え、収束までの計算時間が変化する。一般に、Smoothing回数を減らすと一回のVサイクルの計算に必要な時間が減るものの、収束までに多くのVサイクルが必要となるために全体の計算時間が長くなる。また、Smoothing回数を増やすと収束に要するVサイクルが減るものの、一回のVサイクルに必要な計算時間が増えるので、全体の計算時間が長くなる。従って、最適なSmoothing回数が存在する。表5に掲載した結果は最適なSmoothing回数における計算時間である。また、SOR法における加速係数は1.5とした。

この結果ではマルチグリッド法はICCG法よりも2、3倍程度高速であることがわかる。しかし、要素が偏平になるとマルチグリッド法の収束性は急激に悪化して、ICCG法よりも遅くなることが知られている。現在、ロバスト性の向上のために新しいSmootherの開発、最適なSmoothing回数を事前に決定する方法の確立などを模索しているところである。

表4 計算時間比較用メッシュ

レベル	要素数	未知数
粗	6144	7768
中	49152	59696
細	393216	468064

表5 計算時間

Method	反復回数	CPU時間 [秒]
ICCG法	209	130
マルチグリッド (Gauss-Seidel)	6	49
マルチグリッド (SOR)	6	38

5 まとめ

本報告では、近年の大規模数値解析において必要となる大きな連立方程式の有力な解法と期待されるマルチグリッド法を取り上げ、特に要素の扁平率がマルチグリッド法の収束性に与える影響について調べた。その結果、従来のCG法と同様にマルチグリッド法においても、扁平な要素があると収束性が悪くなることが確認できた。また、係数行列の固有値の分布を見ると、要素が扁平になるにつれて、最小非零固有値の値はほとんど変化しないものの、最大固有値が大きくなることが確認できた。従って、要素が扁平になると最大固有値と非零最小固有値の比で与えられる条件数が大きくなる。この条件数はCG法の収束性と相関があることが知られているが、マルチグリッド法の収束性の判断にもこの条件数を利用することができると言える。

参考文献

- [1] H. Igarashi, "On the property of the Curl-Curl matrix in Finite Element Analysis with Edge Elements", *IEEE Trans. Magn.*, 37, 3129-3132, 2001.
- [2] H. Igarashi and T. Honma, "On the Convergence of ICCG Applied to Finite Element Equation for Quasi-Static Fields.", *ibid*, vol.38, 565-568, 2002.
- [3] O. Biro, K. Preis, G. Vrisk and K. R. Richter, "Computation of 3-D Magnetostatic Fields Using a Reduced Scalar Potential", *IEEE Trans. Magn.*, vol.29, pp1329-1332, 1993.
- [4] 坪田克己, 他 "ノンネスティッドマルチグリッド法を用いた有限要素解析の高速化", 回転機静止器合同研究会資料 SA-99-4 RM-99-58, pp. 19-24, 1999.
- [5] V. Cingoski, Ryutaro Tokuda, So Noguchi and Hideo Yamashita, "Fast Multigrid Solution Method for Nested Edge-based Finite Element Meshes", presented at COMPUMAG-Sapporo, October, 1999.
- [6] M Schinnerl, J. Schoberl, M. Kaltenbacher: "Nested multigrid methods for the fast numerical computation of 3D magnetic fields", *IEEE Trans. Magn.*, 36, 4, 1557-1560, 2000.
- [7] Wolfgang Hackbusch, "Multi-Grid Methods and Applications", Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [8] Peter Wesseling, "An Introduction To Multigrid Methods", John Wiley & Sons, 1992.